

Tutorium 7



Satz 5.3.2. : $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $f: D \rightarrow \mathbb{C}$)
 $x_0 \in D$, x_0 Häufungspunkt von D

Dann sind die folgenden äquivalent:

(1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

(2) Für alle Folgen $(a_n) \in D$ mit $a_n \neq x_0 \forall n$,

$$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0 \implies \underbrace{f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l}_x$$

Ganz analog gilt Satz 5.3.2. falls

$$l \longleftrightarrow \pm \infty$$

und/oder

$$x_0 \longleftrightarrow \pm \infty$$

Eg.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \begin{cases} \forall (a_n) \subseteq D \\ a_n \rightarrow +\infty \implies f(a_n) \rightarrow l \end{cases}$$

Übung 1: Prüfen Sie nach, dass die folgende
(i) Implikation gilt:

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) \right) = l$$

(ii) Gilt die gegenteilige Implikation?

(i) Es genügt zu bemerken, dass
$$a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow f(a_n) \rightarrow l$$

(ii) Nein

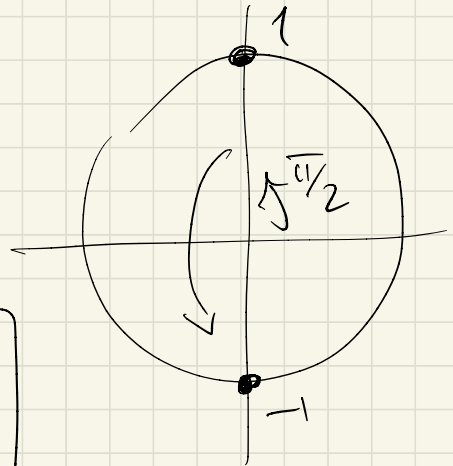
f finden, sodass $f\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow l$ konver-
giert, aber $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existiert nicht

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \rightarrow 0$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)$$

Zu finden: (a_n) , $a_n \rightarrow 0$ und
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ existiert nicht



$$a_n : \boxed{\frac{2\pi}{a_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi}$$

$$\left(\sin\left(\frac{2\pi}{a_n}\right) \right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ existiert nicht

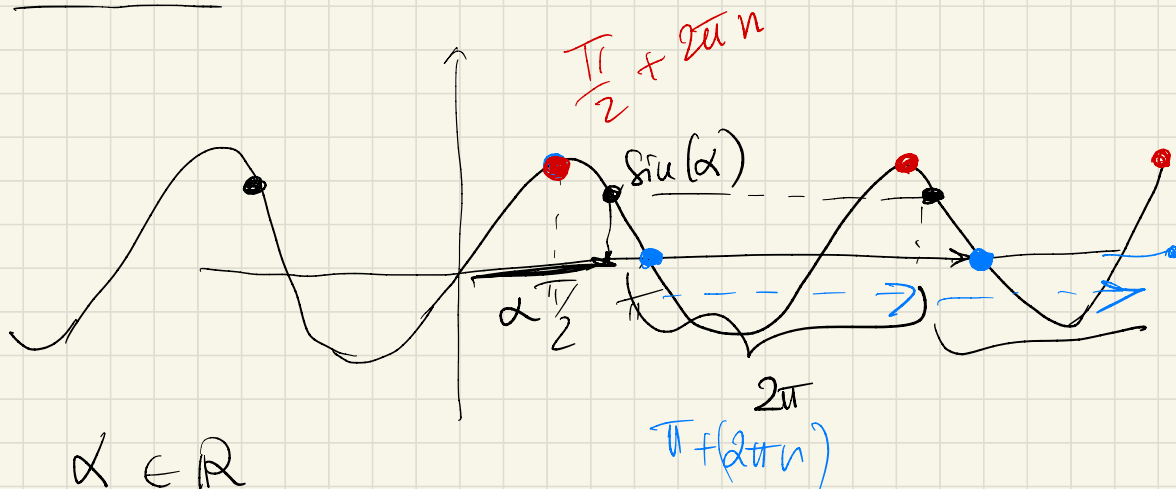
$$\frac{2\pi}{a_n} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow \frac{2}{a_n} - \frac{1}{2} - n = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_n = \frac{4}{1+2n} \left(\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right)$$

Übung 2: Prüfen Sie nach, dass

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x) \text{ " " } = l$$

nicht existiert



$$x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a_n) = \alpha + 2\pi n \rightarrow +\infty$$

$$\sin(a_n) = \sin(\alpha) \rightarrow \sin(\alpha)$$

$$b_n = \beta + 2\pi n$$

$$\beta: \sin(\alpha) \neq \sin(\beta)$$

$$\sin(b_n) = \sin(\beta) \rightarrow \sin(\beta)$$

* Eine Funktion f heißt **infinitesimal** in x_0 falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ oder $x_0 = \pm \infty$

Zum Beispiel:

$\sin x$ infinitesimal in $x_0 = 0$

$\sqrt{x}$ " in $x_0 = 0$

2^{-x} infinitesimal in $x = +\infty$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

(Wir wissen $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (Bernoullische Ungleichung))

Übung: Falls $(a_n) \in \mathbb{R}$, $a_n \rightarrow +\infty$
 $\Rightarrow q^{a_n} \rightarrow 0$, falls $|q| < 1$

* Man betrachtet oft:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ wobei } g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}_f(x_0) \setminus \{x_0\}$$

wobei f und g infinitesimal in x_0 sind

$$\frac{0}{0} \quad (\text{Unbestimmter Ausdruck})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 1. \quad 0 : "f \text{ geht schneller als } g" \text{ gegen } 0 \\ 2. \quad l \neq 0, l \in \mathbb{R} : "f \text{ geht so schnell wie } g" \\ 3. \quad +\infty, -\infty : "f \text{ geht langsamer als } g" \\ 4. \quad \text{existiert nicht} \end{cases}$$

• Im 1. Fall $f(x) = o(g(x))$ (Landau-Symbol)

• Im 2. Fall $f \sim g$ (f vergleichbar mit g)

f_1, f_1, g, g_1 infinitesimal $x \rightarrow x_0$
Übung 3: Es sei $\frac{f_1}{f}(x) = o\left(\frac{f(x)}{f(x)}\right)$ für x_0
 $\frac{g_1}{g}(x) = o\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right)$ "

Beweisen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f + f_1}{g + g_1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)$$

("f₁ und g₁ sind vernachlässigbar")

$$\frac{f + f_1}{g + g_1} = \frac{f \left(1 + \frac{f_1}{f} \right)}{g \left(1 + \frac{g_1}{g} \right)} \rightarrow 0$$

$$f_1 = o(f) \text{ in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1}{f} = 0$$

Übung 4 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + (\sin x)^2 + 2x^4}{x^3 - x}$

Bank 1. $(\sin x)^n \sim x^n$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n = 1$$

$$\begin{array}{l} f \rightarrow l \\ g \rightarrow l' \end{array}_{x \rightarrow x_0} \Rightarrow \begin{array}{l} f \cdot g \rightarrow \\ l \cdot l' \end{array}_{x \rightarrow x_0}$$

$$(\sin x)^2 \sim x^2$$

Bank 2 : $x^n = o(x^m) \quad \forall n > m, x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\overbrace{n-m}^{>0}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left[(\sin x)^2 = o(x^2) \right] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x} = 1 \cdot 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sin x)^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + (\sin x)^2 + 2x^4}{x^3 - x}$$

$$\bullet (\sin x)^2 = o(x)$$

$$2x^4 = o(x)$$

$$\left(x^n = o(x^m) \right. \\ \left. \forall n > m \right)$$

$$\bullet x^3 = o(-x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + (\sin x)^2 + 2x^4}{x^3 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{3x}}{\cancel{-x}} = \underline{\underline{-3}}$$

Ganz analog:

f, g

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$$

$x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \quad (\text{Unbestimmter Ausdruck})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 1. \quad \pm \infty & : "f \text{ geht schneller als } g" \\ & \text{gegen } \pm \infty \\ 2. \quad l \neq 0 & : "f \text{ geht so schnell wie } g" \\ & \text{gegen } \pm \infty \\ 3. \quad 0 & : "f \text{ geht langsamer als } g" \\ & \text{gegen } \pm \infty \\ 4. \quad \text{existiert nicht} & \end{cases}$$

x^m geht schneller als x^n

Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{m-n} = \pm \infty$$

gegen $+\infty$ $x \rightarrow +\infty, \forall m > n$

Übung 5

$$: \left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f + f_1}{g + g_1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} \right]$$

falls

f schneller als $\underline{f_1}$ gegen $+\infty$ geht

und

" g " " g_1 gegen $+\infty$ geht

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f + f_1}{g + g_1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f \left(1 + \frac{f_1}{f} \right)}{g \left(1 + \frac{g_1}{g} \right)}$$

$\downarrow$
 0

(⁴ die Funktionen, die langsamer gegen $+\infty$ gehen, sind vernachlässigbar)

Übung 6 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 + \sqrt{|x|}}{3x - x^3} =$

x^2 geht schneller $\rightarrow +\infty$ als "1" und $\underbrace{|x|^{\frac{1}{2}}}$

x^n " " " " als x^m

$\forall n > m$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 + \sqrt{|x|}}{-x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$