

Vorlesung 8

Kapitel 3:

Komplexe Zahlen

Bis zum Prop. 3.2.2.
(ohne Beweis)

Satz 3.1.1. Die Menge $\mathbb{R}^2$, mit der Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ die wir definiert haben, ist ein Körper

$(\mathbb{R}^2, +)$ Komm. Gruppe, $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ Komm. Gruppe

• distributiv über der Addition ist

$$0_{\mathbb{C}} := (0, 0)$$

$$1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$$

$$-(a, b) := (-a, -b)$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Warum nicht

$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)?$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\forall (a, b) \neq (0, 0)$$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$: Körper der komplexen Zahlen

Bemk: $\mathbb{R}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}^2$

$\leadsto \exists j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ injektiv, sodass:

$$j(a+b) = j(a) + j(b) \quad (*)$$

$$j(a \cdot b) = j(a) \cdot j(b) \quad (**)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow j(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$$

$$a, b \in \mathbb{R} \leadsto j(a), j(b) \in \mathbb{C}$$

$$\underbrace{a+b}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow{\quad} j(a+b) = j(a) + j(b) \quad \left[j(a \cdot b, 0) \right]$$

① $j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $a \mapsto (a, 0)$ erfüllt (*) und (**)

$$j(a) + j(b) = (a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0+0) = (a+b, 0) = j(a+b)$$
$$j(a) \cdot j(b) = (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a \cdot b, 0)$$

Übung : Ist

$$\tilde{j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$a \mapsto (0, a) \quad \text{"gut" ?}$$

↓

$$\tilde{j}(a+b) = \tilde{j}(a) + \tilde{j}(b)$$

und

$$\tilde{j}(a \cdot b) = \tilde{j}(a) \cdot \tilde{j}(b) ?$$

Warum $\underline{(a,b)} \cdot \underline{(c,d)} = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot c + b \cdot d)$?

$$\begin{aligned}(0,1) \cdot (0,1) &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \\ &= (-1, 0) = -(1, 0) = \\ &= -\underline{\underline{\frac{1}{\mathbb{C}}}} = -1\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{a \in \mathbb{R} \mapsto (a, 0)}}$$

$$\underline{\underline{x^2 + 1 = 0}}$$

Def.: Das Element $(0,1)$ heißt
imaginäre Einheit, und wird mit
 i bezeichnet

$$\mathbb{R} \ni a \xleftrightarrow{\text{green dot}} \underline{(a, 0)} \quad \underline{a, b \in \mathbb{R}}$$

$$\underline{a \cdot i} \leftrightarrow (a, 0) \cdot (0, 1) = (a \cdot 0 - 0 \cdot 1, a \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, a)$$

$$\underline{\underline{a + i b}} = (a, 0) + (0, b) = \underline{\underline{(a, b)}}$$

$$\star \underbrace{(a_1 + i b_1)} + \underbrace{(a_2 + i b_2)} =$$

$$= a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2) = \underbrace{(a_1 + a_2, b_1 + b_2)}$$

$$(\star) \quad \begin{aligned} (a_1 + i b_1) &= (a_1, b_1) \\ a_2 + i b_2 &= (a_2, b_2) \end{aligned}$$

$$\underbrace{(a_1 + i b_1)} \cdot \underbrace{(a_2 + i b_2)} =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i a_1 \cdot b_2 + i b_1 \cdot a_2 + i^2 b_1 b_2 =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2 =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) =$$

$$= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)$$

$$\mathbb{C} \ni z = \underbrace{a}_{\downarrow} + i \underbrace{b}_{\downarrow} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Realteil

Imaginärteil

$\Re(z)$

$\Im(z)$

Def: Die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

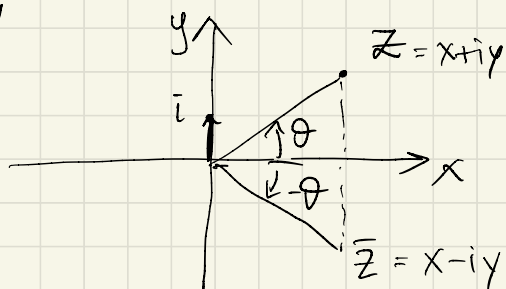
$$z \mapsto \bar{z} = x - iy$$

"

$$x + iy$$

Bwk 2:

$$\overline{\bar{z}} = z \quad (\star)$$



$\bar{z}$: komplex konjugierte von z

Bwk 1) Übung: Die komplexe Konjugation ist
ein Körperautomorphismus

↓

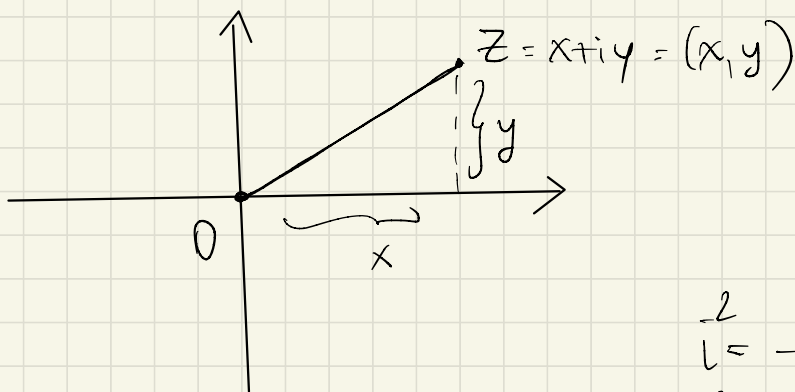
eine bijektive Abbildung, die
kompatibel / verträglich mit den Operationen
des Körpers ist:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{und} \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

Def : Der Betrag von $z \in \mathbb{C}$ ist

$$z = x + iy$$

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\begin{aligned} \frac{z}{i} &= -1 \\ -i^2 &= 1 \end{aligned}$$

Bwk : $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$$\parallel$$
$$x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + \overset{0}{\underbrace{i(yx - xy)}} + \\ &\quad - i^2 \cdot y^2 = \\ &= \underbrace{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Lemma 3.1.2

Für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden:

1. $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2};$
2. $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$
3. $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$ (wobei $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ betrachtet wird);
4. falls $z \neq 0$, ist z^{-1} genau $\frac{\bar{z}}{|z|^2};$
5. $|\bar{z}| = |z|;$
6. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|;$
7. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|;$
8. (Dreiecksungleichung) $|z + w| \leq |z| + |w|.$
9. $||z| - |w|| \leq |z + w|.$

$$4. \quad z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

(Schon bemerkt, falls $(a, b) \neq (0, 0) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ (a, b)^{-1} &= \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{1}{a^2 + b^2} (a, -b) \\ z^{-1} &= \underbrace{\frac{1}{a^2 + b^2}}_{= \frac{1}{|z|^2}} \cdot \underbrace{(a - ib)}_{= \overline{a + ib} = \bar{z}} \\ &= \frac{1}{|z|^2} \bar{z} \end{aligned}$$

$$4. \quad z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$\underbrace{z^{-1} \cdot z}_{=1} \cdot \bar{z} = z^{-1} \cdot |z|^2$$

1

$$\bar{z} = z^{-1} \cdot |z|^2$$

$$\rightarrow (|z|^2)^{-1}$$

$$\bar{z} \cdot (|z|^2)^{-1} = z^{-1}$$

1

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$7. \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)} = (z \cdot w) \cdot (\bar{z} \cdot \bar{w}) = \\ &= (\bar{z} \cdot \bar{z}) \cdot (w \cdot \bar{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2 \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow |z \cdot w| = \pm |z| \cdot |w| \text{ aber } | \cdot | \geq 0 \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|)$$

8. Dreiecksungleichung

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

$$\begin{aligned} \text{Bwk : } z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} &= \underbrace{z \cdot \bar{w}} + \overline{(w \cdot \bar{z})} = \\ &= \overline{\overline{(w \cdot \bar{z})}} = \overline{\bar{w} \cdot z} = w \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{1.}{=} 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) &\stackrel{6.}{\leq} 2 \cdot |z \cdot \bar{w}| = \\ &= 2 |z| \cdot |\bar{w}| \stackrel{5.}{=} 2 |z| \cdot |w| \end{aligned}$$

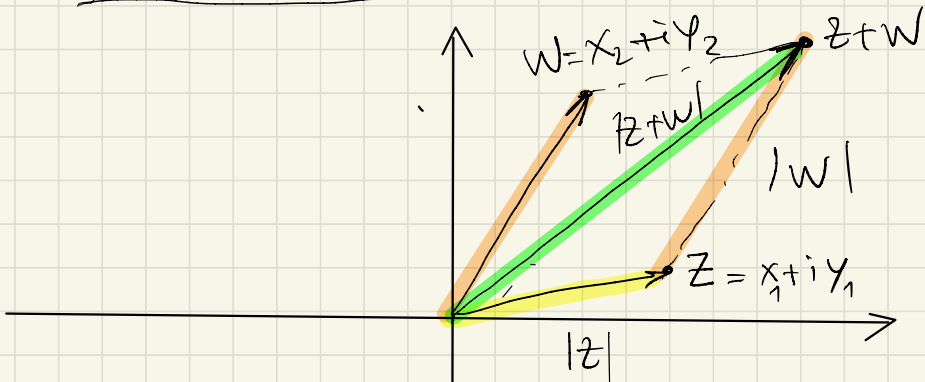
$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot \overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = \\ &= z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + \underbrace{z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z}}_{\text{Bwk}} \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |z+w|^2 &= (z+w) \cdot \overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = \\
 &= z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} = \\
 &= |z|^2 + |w|^2 + \underbrace{z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z}}_{\text{Burk} + 2|z| \cdot |w|} \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w|
 \end{aligned}$$

$$|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2 = (|z|+|w|)^2$$

$\Downarrow$

$$|z+w| \leq |z|+|w|$$



$$z+w = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

3.2 Die Polarform der Komplexen Zahlen

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) = x + iy$$

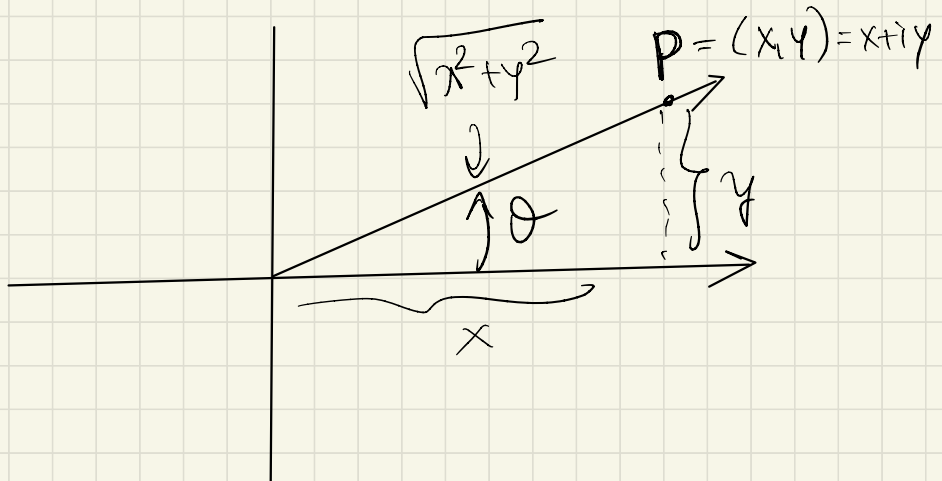
$$i = (0, 1) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times \{0\}$ identif.

- $r :=$ Betrag von $(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Für $P \neq (0, 0)$

- ϑ : der Winkel



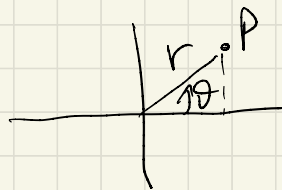
Bemk : 1) falls ϑ ein solcher Winkel ist

$$\leadsto \vartheta + 2\pi \cdot k, k \in \mathbb{Z}$$

(2) Gegeben zwei Punkte P_1, P_2 in Polarkoordinaten

$$P_1: (r_1, \vartheta_1) \quad P_2: (r_2, \vartheta_2)$$

Denn
$$\begin{cases} r_1 = r_2 \\ \vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi \cdot k \end{cases}, \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$



$$(r, \vartheta) \leadsto (x, y)$$

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases}$$

$$(x, y) \leadsto (r, \vartheta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

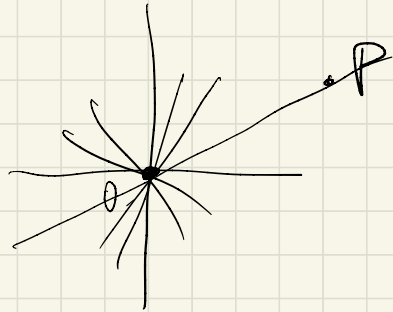
$$\vartheta: \cos \vartheta = \frac{x}{r}, \sin \vartheta = \frac{y}{r}$$

Buch : Polarkoordinaten können
nur für Punkte $P \in$

$$\mathbb{C} \setminus 0 = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

definiert werden!

Für $0 \rightarrow "r=0"$
 $\theta = ??$



Für $z = x + iy$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Polarform von z :

$$\text{Betrag} = 1$$

$$z = x + iy = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Gegeben $z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Was ist

(a) $z_1 \cdot z_2 = ?$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

(b) Was ist z^{-1} ? $z \neq 0$

$$z = r (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

↓

$$z^{-1} = r^{-1} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$(z \cdot z^{-1} = 1)$$

$$= r^{-1} (\cos \theta - i \sin(\theta))$$

$$= \frac{1}{|z|} \cdot \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

(c) Was ist $\frac{z_1}{z_2}$?

↓

$$z_1 \cdot z_2^{-1}$$

$$z_1 = r_1 (\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$$

$$z_2 = r_2 (\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$$

$$z_2^{-1} = r_2^{-1} (\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = r_1 \cdot r_2^{-1} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

↳ Aus (a) und (b)

Gegeben $z_j = r_j (\cos \vartheta_j + i \sin \vartheta_j)$

$$j = 1, \dots, n$$

$$(*) \quad z_1 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \left(\cos(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_n) + i \sin(\vartheta_1 + \dots + \vartheta_n) \right)$$

Formel von de Moivre

$$z = r (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$$

$$z^n = r^n \left[\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta) \right]$$

$P(z)$: Polynom in z , $\mathbb{C}[z]$



Menge der Polynome
mit $\mathbb{C}$ Koeff.

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_i \in \mathbb{C} \\ i = 1, \dots, n$$

z_0 : Nullstelle von P , d.h.

$$P(z_0) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{z.B. } P(z) = z^2 + 1 \\ P(i) = i^2 + 1 = 0 \\ i \text{ Nullstelle von } z^2 + 1 \end{array} \right)$$

Dann $\exists Q_1(z)$, $Q_1 \in \mathbb{C}[z]$, sodass

$$P(z) = \underbrace{(z - z_0)}_{\text{Nullstelle}} \cdot Q_1(z)$$

Es könnte sein, dass $Q_1(z_0) = 0 \rightarrow$

$$\exists Q_2 \in \mathbb{C}[z] : Q_1(z) = (z - z_0) \cdot Q_2(z)$$

$$\rightarrow P(z) = (z - z_0)(z - z_0)Q_2(z) = (z - z_0)^2 \cdot Q_2(z)$$

Falls $Q_2(z_0) \neq 0$ ✓ Falls $Q_2(z_0) = 0$

$$\rightarrow P(z) = (z - z_0)^3 Q_3(z) \dots P(z) = (z - z_0)^k Q_k(z) \\ \text{wobei } Q_k(z_0) \neq 0$$

... Falls

$$P(z) = (z - z_0)^k Q_k(z)$$

wobei $Q_k(z_0) \neq 0$

k die Vielfachheit von z_0

$$P(z) = (z-1)^2 (z-2)^3$$

$z_0 = 1$ Nullstelle für P

$$(z_0 - 2)^3 \neq 0$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{Q(z)}$$

$$P(z) = (z-1)^2 \cdot \underbrace{Q(z)}_{(z-2)^3}$$

$$Q(1) \neq 0 \Rightarrow \underbrace{z_0 = 1}_{(z-2)^3} \text{ Vielfachheit } \underline{\underline{2}} \text{ hat}$$

* $z_1 = 2$ Nullstelle für P mit Vielfachheit 3

Satz 3.2.1

(Fundamentalsatz der Algebra)

Es sei $P(z)$ ein nicht konstantes Polynom vom Grad n mit komplexen Koeffizienten

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1.$$

Dann hat $P(z)$ eine komplexe Nullstelle, d. h. es gibt eine komplexe Zahl z_0 , so dass $P(z_0) = 0$ gilt. Genauer gilt, dass die Anzahl der Nullstellen, wenn sie mit den richtigen Vielfachheiten gezählt werden, insgesamt gleich n ist.

$$z_0 \quad n_0, \quad z_1 \quad n_1 \quad \dots, \quad z_k \quad n_k$$

$$\left[P(z) = \alpha (z - z_0)^{n_0} (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_k)^{n_k} \right]$$
$$\sum_{i=0}^k n_i = n$$

In $\mathbb{R}$, nicht alle Polynome eine Nullstelle besitzen! Zu Beispiel...

Aber $P(z) = z^2 + 1$

$$z^2 = -1$$

$$z_0 = i \quad z_0 = -i$$

$$P(z) = (z - i)(z + i)$$

Bmk : Falls $P(z)$ ein Polynom $\mathbb{C}[z]$

$$P(z) = \underline{a_0} + \underline{a_1}z + \dots + \underline{a_n}z^n, \quad \underline{a_i \in \mathbb{R}}$$

Denn, z_0 Nullstelle $\Rightarrow$

$$P(z_0) = 0$$

$$\underline{a_0 + a_1 z_0 + \dots + a_n z_0^n} = \underline{0} = 0$$

$$\underline{a_0} + \underline{a_1} \underline{z_0} + \dots + \underline{a_n} \cdot \underline{z_0}^n$$

$\parallel \star$

$$a_0 + a_1 \overline{z_0} + \dots + a_n \overline{z_0}^n = 0$$

$\Rightarrow \overline{z_0}$ Nullstelle

z_0 Nullstelle ist und $P(z) \in \mathbb{R}[z] \subset \mathbb{C}[z]$

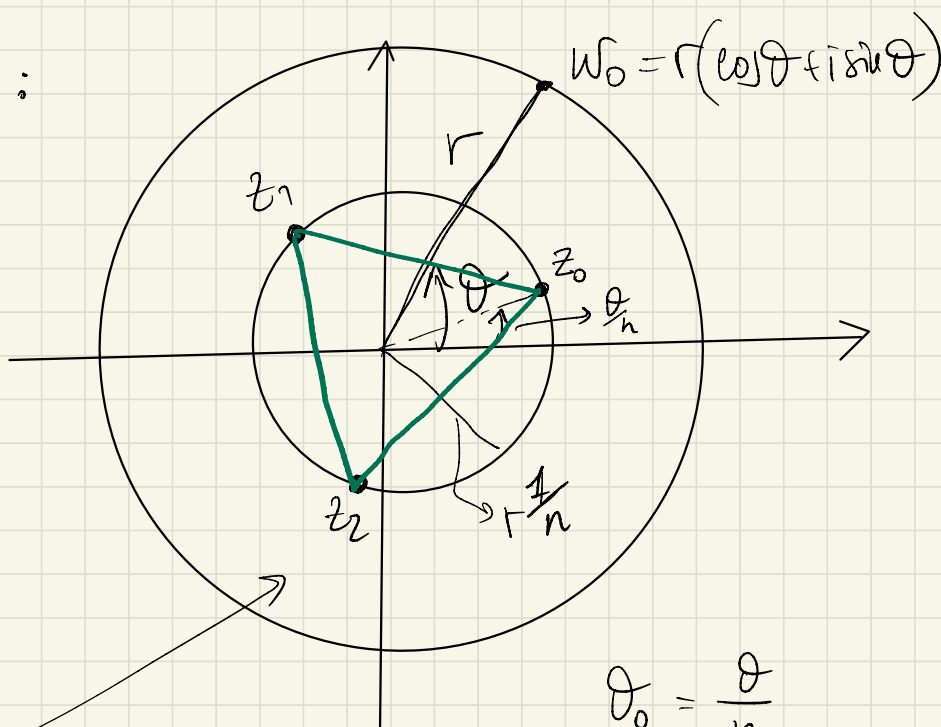
$\Rightarrow \underline{z_0}$ Nullstelle ist

Proposition 3.2.2

Es sei $w_0 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann hat das Polynom $P(z) := z^n - w_0$ genau n Nullstellen, wenn sie mit ihrer Vielfachheit gezählt werden. Insbesondere, falls $w_0 \neq 0$ und $w_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, sind die Nullstellen gegeben durch

$$z_j = r^{\frac{1}{n}}(\cos \theta_j + i \sin \theta_j), \quad \text{wobei } \theta_j = \frac{\theta + 2\pi j}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.2.3)$$

Bild :



(z. B.
 $n=3$)

$$\theta_0 = \frac{\theta}{n}$$

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{2\pi}{n}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{n} \dots$$

