Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Kegel

Universität zu Köln
15.11.2017

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 6

Abgabe: Bis spätestens Mittwoch 22.11.17 11:55 Uhr im Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock). Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und groß und fett Ihre Übungsgruppe auf die erste Seite Ihrer Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Verspätete Abgaben oder Abgaben per E-Mail sind nicht möglich.

Wichtig: Falls Sie eine **Altzulassung** in diesem Semester geltend machen wollen, dann werfen Sie bitte das Formular 'Altzulassung':
http://www.mi.uni-koeln.de/Institutsdokumente/Pruefungsanmeldung/Altzulassung.pdf
bis spätestens zum 1. Dezember 2017 (12:00 Uhr) in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum ein.

Aufgabe 1. (30 Punkte)

Beweisen Sie den Hauptsatz der ebenen Kurventheorie.

Satz 1 (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie)
Sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Fuktion definiert auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ. Diese ebene Kurve ist bis auf Verknüpfung mit orientierungserhaltenden Isometrien des $\mathbb{R}^2$ eindeutig.

Aufgabe 2. (5+15 Punkte)

Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit $\ddot{\beta} \neq 0$. Die Evolute der Kurve ist die Kurve $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\epsilon(s) = \beta(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \underline{n}(s).$$

a) Erklären Sie die geometrische Bedeutung der Evolute von Raumkurven.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Schraubenlinie, gegeben durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} a\cos(s) \\ a\sin(s) \\ bs \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \qquad a, b \neq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Evolute der Schraubenlinie wieder eine Schraubenlinie ist. (Hinweis: Dabei kann es hilfreich sein die Lösungen von Übungsblatt 5 zu benutzen.) Was sind die Parameter der Evolute?