Prof. Silvia Sabatini *Universität zu Köln*
Dr. Alexander Caviedes Castro *23.11.2020*

ANALYSIS I
Übungsblatt 4

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 30.11.2020, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. (i) Beweisen Sie, dass die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{Q}$ sind, d.h. zu je zwei $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$, es ein $r \in \mathbb{Q}$ gibt, mit $x < r < y$.

(ii) Beweisen Sie, dass die irrationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind, d.h. zu je zwei $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x < y$, es ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt, mit $x < r < y$.

(iii) Beweisen Sie, dass die irrationalen Zahlen dicht in $\mathbb{Q}$ sind, zu je zwei $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$, es ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt, mit $x < r < y$. (*Hinweis*: es seien $x, y \in \mathbb{Q}$, und nehmen wir $\frac{x}{\sqrt{2}}$ und $\frac{y}{\sqrt{2}}$; dann, nach Lemma 2.3.2, es ein $q \in \mathbb{Q}$ gibt, mit

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}},$$

und dann...?)

Präsenzaufgabe 2. Beweisen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden gelten:

1. $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$;
2. $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$;
3. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$ (wobei $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ betrachtet wird);
5. $|\overline{z}| = |z|$;
6. $|\mathrm{Re} z| \leq |z|$ und $|\mathrm{Im} z| \leq |z|$;
9. $||z| - |w|| \leq |z + w|$.

Hausaufgabe 1. (11=2+6+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der irrationalen Zahlen nicht abzählbar ist.

(b) Eine reelle Zahl x heißt *algebraisch*, wenn es rationale Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}, a_n \neq 0$, gibt mit:

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,.$$

Eine reelle Zahl, die nicht algebraisch ist, heißt *transzendent*.

Alle rationalen Zahlen sind algebraisch (warum?), aber es gibt auch irrationale Zahlen, die algebraisch sind, wie zum Beispiel $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ (Warum sind sie algebraisch?). Die Zahl π ist ein klassisches Beispiel für eine irrationale transzendente Zahl.

Zeigen Sie, dass die Menge der reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge der irrationalen transzendenten Zahlen nicht abzählbar ist.

Hausaufgabe 2. (6=3+3 Punkte)

(a) Es sei z_0 eine komplexe Zahl, sodass $|z_0| = 1$. Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Funktion $D\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $D(z) := z_0 \cdot z$.

(b) Beweisen Sie, dass die Wurzeln der Gleichung $z^n = 1$ eine kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{C}$ bilden.

Hausaufgabe 3. (8=5+3)

1. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene alle Punkte $z = (r, \theta)$, so dass:
   - $r = 3$
   - $\theta = \dfrac{\pi}{3}$
   - $\mathrm{Re}(z) \geq -1$ und $\mathrm{Im}(z) < 3$
   - $\mathrm{Re}(z^2) > k\ (k \in \mathbb{R})$
   - $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = k\ (k \in \mathbb{R})$
2. Es seien a und b zwei verschiedene Punkte in der komplexen Ebene. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene alle Punkte z, so dass

   $$|z - a| = |z - b|$$

   gilt. Geben Sie eine geometrische Beschreibung dieser Punktmenge an.