Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
20.1.2016

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 11

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 27.01.16 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $0 < r < R$. Sei $\mathbb{T}$ der Torus, der durch Rotation der Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) + R \\ 0 \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

um die z-Achse entsteht. In der Vorlesung wurde gezeugt, dass die Christoffel-Symbole auf zwei Arten ausgerechnet werden können : Mit Formel (4.1) und Lemma 4.2.14 in Bärs Buch [1]. Berechnen Sie die Christoffel-Symbole des Torus T auf beide Arten.

Aufgabe 2. (15 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Sei S die reguläre Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in U, z = f(x, y)\}.$$

Wir wollen die Christoffel-Symbole der Parametrisierung $(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y))$ ausrechnen.

a) Erklären Sie, warum man aus den Symmetrieeigenschaften dieser Fläche alle Christoffelsymbole einfach ausrechnen kann, falls man

$$\Gamma^x_{xx}, \qquad \Gamma^x_{xy}, \qquad \text{und} \qquad \Gamma^x_{yy}$$

kennt.

b) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole von S.

---

1. Formel (4.1) und Lemma 4.2.1 im ersten Druck

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei S eine reguläre Flache, und seien $X, Y, Z : S \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder auf S. Sei $[X, Y]$ die Lie-Klammer der Vektorfelder X und Y.

a) Gilt
$$[fX, Y] = f[X, Y]$$
für jede glatte Funktion $f : S \to \mathbb{R}$? Zeigen Sie dass diese Formel korrekt ist, oder geben Sie ein Gegenbeispiel und eine korrekte Formel für $[fX, Y]$ an.

b) Zeigen Sie, dass
$$[X, Y] = -[Y, X].$$

c) Zeigen Sie die Jacobi-Identität :
$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Aufgabe 4. (15 Punkte)

Seien S eine reguläre Flache und $X, Y : S \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder auf S. Wir definieren den *Torsionstensor* T durch
$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

a) Zeigen Sie, dass
$$T(X, Y) = -T(Y, X). \tag{1}$$

b) Zeigen Sie, dass
$$T(fX, gX) = fgT(X, Y) \tag{2}$$
für alle glatte Funktionen $f, g : S \to \mathbb{R}$. Nutzen Sie Aufgabe 2a) und die Linearitätseigenschaften der kovariante Ableitung.

c) Zeigen Sie, dass $T(X, Y) = 0$.

Es erscheint vielleicht seltsam um T zu definieren, wenn es immer gleich Null ist. Aber es gibt einen algemeineren Sinn der kovariante Ableitung, und dafür gilt nicht immer $T \equiv 0$. Troztem gelten die Formeln (1) und (2) dafür immer.