

Vorlesung 20

Joe Satz 8.1.2

bis Ableitung
Arkuskotangens

Satz 8.1.2

Es sei $f: I \rightarrow J$ eine Funktion, die differenzierbar in $x_0 \in I$ ist, wobei I ein offenes Intervall ist. Dann ist f stetig in x_0 .

Beweis

(Satz 5.3.1)

Falls x_0 ein Häufungspunkt von I ,

dann

$$f \text{ stetig in } x_0 \iff \boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

I offenes Intervall
 $x_0 \in I$ $\} \Rightarrow x_0$ innerer Punkt von I

$\Rightarrow x_0$ Häufungspunkt

Bwk : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f(x) = \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ 0}} + \underbrace{f(x_0)}_{\substack{\downarrow x \rightarrow x_0 \\ f(x_0)}}$

$\boxed{\Rightarrow}$

Zu beweisen: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \right)}_{f'(x_0) \in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)}_{= 0} =$$

$$= 0$$



Beispiel : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

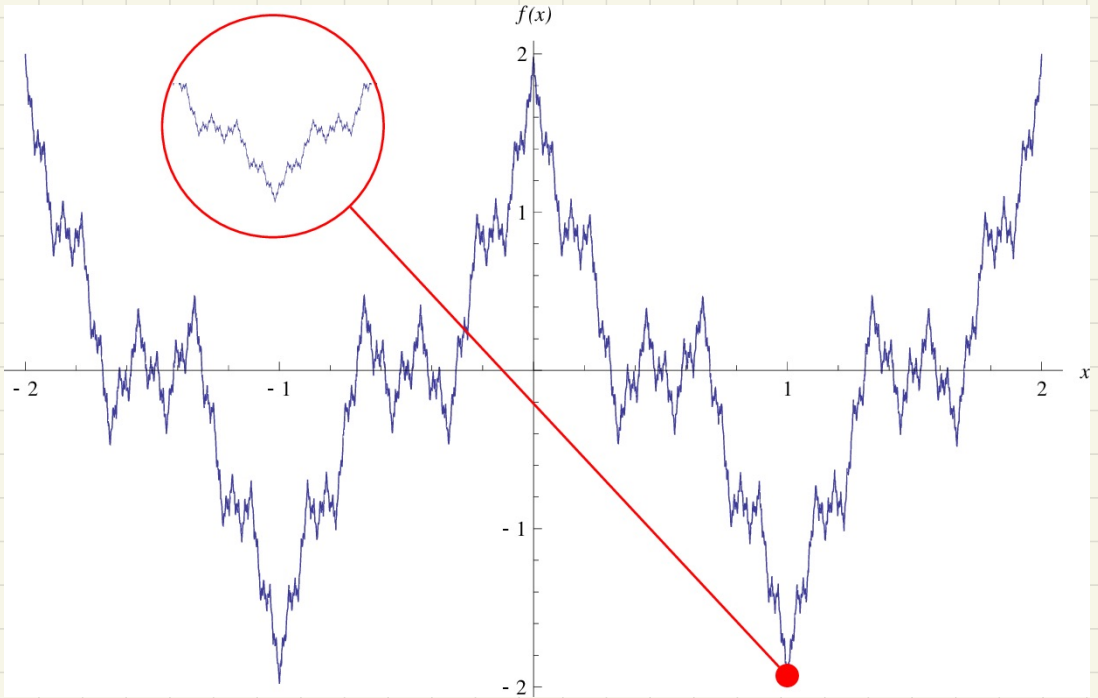
Wir haben schon bewiesen:

f ist in keinem Punkt stetig

$\Rightarrow$ in keinem Punkt differenzierbar

Satz 8.1.2

* Frage: Gibt es Funktionen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die stetig (in $\mathbb{R}$) sind, aber in keinem Punkt differenzierbar?



$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

Weierstrass-Funktion

$$f(x) = |x|$$

"Algebra der Ableitungen"

Satz 8.1.3: I offenes Intervall, $x_0 \in I$
 $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0
 $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Dann

(1) $f + g$ differenzierbar ^{in x_0} und

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\Delta f(x) := f(x) - f(x_0) \quad (\Delta g(x) = g(x) - g(x_0))$$

Beweis 1) $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta h(x)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta(f+g)(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x) + \Delta g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta g(x)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f$ differenzierbar in x_0

$$(\alpha \cdot f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$$

Übung

(3) $f \cdot g$ differenzierbar in x_0

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Beweis: $\Delta(f \cdot g) \neq \Delta f \cdot \Delta g$

$$\Delta(f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) =$$

$$= \overbrace{f(x) \cdot g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0)g(x_0)} =$$

$$= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))$$

$$= \underbrace{\Delta f(x) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \Delta g(x)}$$

Bwk : g diff. in $x_0 \Rightarrow g$ stetig in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta(f \cdot g)(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x) \cdot g(x) + f(x_0) \Delta g(x)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{\Delta f(x)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}_{g(x_0)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{f(x_0)}_{f(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{\Delta g(x)}{x - x_0}}_{g'(x_0)}$$

$$= \underline{f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

Bwk : (3) $\Rightarrow$ (2)

$$\underline{g(x) = \alpha \quad \forall x \in I}$$

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot f)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot \alpha + f(x_0) \cdot 0 \\ &= \alpha \cdot f'(x_0) \end{aligned}$$

(4) $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0
mit Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Zuerst beweisen wir, dass

$\frac{1}{g}$ differenzierbar in x_0 ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} \right)}_{\text{differenzierbarkeit}}$$

Zu beweisen: $\exists U$ von x_0 : _____

wohldefiniert ist in $U \setminus \{x_0\}$

$$g(x_0) \neq 0$$

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0}$$

Bwk : g stetig in x_0 und $g(x_0) \neq 0$

$\implies \exists \mathcal{U}$ von x_0 : $g(x) \neq 0$ in $\mathcal{U}$

Übung

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x) &:= \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)} \\ &= - \frac{\Delta g(x)}{g(x) \cdot g(x_0)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x)}{x - x_0} &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{\Delta g(x)}{x - x_0}}_{g'(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\frac{1}{(g(x_0))^2}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta g(x)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} = \\ &= - g'(x_0) \cdot \frac{1}{(g(x_0))^2}\end{aligned}$$

$$\implies \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = - \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \star$$

Mit (3) und *

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) \stackrel{(3)}{=}$$

$$= f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$\stackrel{*}{=} \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} =$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$



Satz 8.1.4

(Kettenregel) Es seien I und J offene Intervalle und $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(I) \subseteq J$. Es sei $x_0 \in I$ und nehmen wir an, dass g in x_0 und f in $g(x_0)$ differenzierbar sind. Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar mit Ableitung gegeben durch

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0). \leftarrow$$

I, J offene Intervalle

$$I \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c} \cup \\ J \end{array} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$g(I) \subseteq J$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ wohldefiniert}$$

$$x_0 \in I : g'(x_0) \text{ existiert}$$

$$f'(g(x_0)) \text{ existiert}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0}$$

"Falsche Idee"

$$\rightarrow \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{\underbrace{g(x) - g(x_0)}} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \frac{f'(g(x_0))}{g'(x_0)}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x \rightarrow x_0} &\Rightarrow g(x) \rightarrow g(x_0) \quad (g \text{ stetig in } x_0) \\ \underbrace{y \rightarrow g(x_0)} &\Rightarrow \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} \rightarrow \underbrace{f'(g(x_0))} \\ \text{und} &\Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \underbrace{g'(x_0)} \end{aligned}$$

(Satz 5.3-4) $\Rightarrow$

$\{x \in I : g(x) - g(x_0)\} = A \ni x_0$
Problem: x_0 könnte kein isolierter Punkt von A es könnte sein,
 dass $\nexists U$ von $x_0 : \underline{\underline{(U \setminus \{x_0\}) \cap A = \emptyset}}$

Bmk : Um Satz (5.3.4) zu benutzen,
müssen wir eine Umgebung von x_0
finden, wobei $g(x) \neq g(x_0) \forall x \in U$

$$\left[\lim_{(y \rightarrow y_0)} \underbrace{f(y)} = \dots \right]$$

↓

Satz 5.3.4.

$\underbrace{f(g(x))}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ g(x) \rightarrow y_0}}$

Trick :

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \underline{y \neq g(x_0)} \\ f'(g(x_0)) & y = g(x_0) \end{cases}$$

Bmk F stetig in $y = g(x_0)$

$$\lim_{\underline{y \rightarrow g(x_0)}} \underline{F(y)} = \lim_{y \rightarrow g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0))$$

- $x \rightarrow x_0 \Rightarrow g(x) \rightarrow g(x_0)$ (Stetigkeit von g)
- $y \rightarrow g(x_0) \Rightarrow \underline{F(y)} \rightarrow \underline{F(g(x_0))}$

$\Rightarrow (F \circ g)$ stetig in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \underline{F(g(x))} = \underline{F(g(x_0))} = \underline{f'(g(x_0))}$$

Bmk : $\forall x \in I$

$$\underline{[f(g(x)) - f(g(x_0)) = F(g(x))(g(x) - g(x_0))]}$$

Beweis der Bmk:

(*) Falls $g(x) = g(x_0) \rightarrow$ Beide Seiten $= 0$

(*) Falls $g(x) \neq g(x_0)$

$$\underline{F(g(x))} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(g(x)) = F(g(x_0)) = \underline{f'(g(x_0))}$$

$$\textcircled{\star} \underline{f(g(x)) - f(g(x_0)) = F(g(x))(g(x) - g(x_0))}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overbrace{F(g(x))} \cdot \underbrace{(g(x) - g(x_0))}_{x - x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} F(g(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \boxed{f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)}$$

$$\searrow (f \circ g)'(x_0)$$



Beispiele

(*) Tangensfunktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus D$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan(x) &= \frac{\cos(x) \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{(\cos(x))^2} = \\ &= \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\underbrace{(\cos(x))^2}} \\ &= \frac{1}{1 + (\tan(x))^2} \end{aligned}$$

* Kotangensfunktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus D' \rightarrow \mathbb{R}, D' = \{x \in \mathbb{R} : x = \underline{k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Übung :

$$\underline{(\cot)'(x)} = - \frac{1}{\underline{(\sin x)^2}} = -1 - (\cot(x))^2$$

* Potenzfunktion (mit reellem Exponent)

$$h: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Behauptung: $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \forall x > 0$

$$\underbrace{x^\alpha} = \underbrace{e^{\log(x^\alpha)}} = e^{\alpha \log(x)}$$

$$g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha \log(x)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(y) = e^y$$

$$f'(y) = e^{y \leftarrow}$$

$$g'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x}$$

$$\underline{(f \circ g)'(x)} = f'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

$$= \underbrace{e^{\alpha \cdot \log x}} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Satz 8.1.5

(Ableitung der Umkehrfunktion)

Es sei I ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow J$ eine bijektive, stetige Funktion. Nehmen wir an, dass f in x_0 differenzierbar ist mit Ableitung $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist $f^{-1}: J \rightarrow I$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \quad (8.1.8)$$

Beweis

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \text{ existiert und} \quad (8.1.8)$$

→ (falls $y \neq y_0 \Rightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$: Injektivität von f^{-1})

$$= \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}}$$

$$g(x) := \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

$$G(x) := \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$

$$G(f^{-1}(y)) = \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}$$

Bmh (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0)$

(b) (Satz 7.1.4) $f: \underbrace{I}_{\text{offenes Intervall}} \rightarrow J$
 $\Rightarrow f^{-1}: J \rightarrow I$ stetig

$$\Rightarrow [y \rightarrow y_0 \Rightarrow x = f^{-1}(y) \rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0)]$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} G(f^{-1}(y)) \stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) (=$$

|| Per Def.

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Satz 5.3.4 $(*) y \rightarrow y_0 \Rightarrow f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y_0)$
 (Stetigkeit von f^{-1} ✓)
 $(*) f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) \quad \forall y \neq y_0$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$



Beispiele :

* Arkussinus

$$\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1) \text{ bijektiv}$$

$$(i) \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \text{ injektiv, weil sie streng monoton ist}$$

$$(ii) \text{ (Übung) } \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$$

Umkehrfunktion: Arkussinus

$$\arcsin : (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

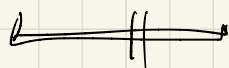
$\arcsin(y)$

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1) \text{ stetig}$$

$$\implies \arcsin : (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Satz 7.1.4

Bmk : $\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos(x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\varphi := \sin : I \rightarrow J$$

$\begin{matrix} \text{"} & & \text{"} \\ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & & (-1, 1) \end{matrix}$

$$\varphi^{-1} : J \rightarrow I = \frac{d}{dy} [\arcsin(y)]$$

$$\frac{d}{dy} (\varphi^{-1}(y)) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \quad (\equiv)$$

Bmk : $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

$$\cos(x) = \pm \sqrt{1 - \sin(x)^2}$$

$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(x) > 0 \quad \nearrow \sqrt{1 - (\sin(x))^2}$

(ii)

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \underbrace{\sin^2(\arcsin(y))}_{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

* Arkus kosinus (Übung)

$$\cos : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} :$$

1. streng monoton fallend

2. $\cos : (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$ bijektiv

3. Arkuskosinus : $\arccos : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$

$$\frac{d}{dy} (\arccos(y)) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

* Arkustangens

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv
(weil sie streng
monoton wachsend)

Arkustangens :

$$\underline{\underline{\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}}$$

$$\underline{\text{Bwk}} \quad \frac{d}{dx} (\tan(x)) = 1 + \underbrace{(\tan(x))^2}_{\uparrow} > 0$$

Satz 8.1.5.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\frac{d}{dy} \arctan(y)}} &= \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(y)))^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{1 + y^2}}} \end{aligned}$$

* Arkus Kotangens

$$\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{bijektiv}$$

$$\text{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$$

$$\frac{d}{dy} \text{arccot}(y) = -\frac{1}{1+y^2}$$