

Vorlesung 6

Reelle Zahlen:

2.2.: Reelle Zahlen als Dezimalzahlen $\mathbb{R}$

2.2.1: die Operationen $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{R}$

(2.2.2. Ordnungsvollständigkeit)

2.3.1.: Das Archimedische Axiom und
die Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

2.3.2. (Definition der) Potenzen und
(Quadrat)wurzeln

Vom letzten Mal...

Definition 2.1.5 • Es sei X eine nichtleere Menge mit Ordnung $\preceq$. Dann ist die Ordnung **ordnungsvollständig**, falls jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum hat. Diese Eigenschaft wird als **Supremumseigenschaft** bekannt.

- Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, \preceq)$ heißt **ordnungsvollständig**, falls die Ordnung $\preceq$ ordnungsvollständig ist.

↳ $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist nicht ordnungsvollständig

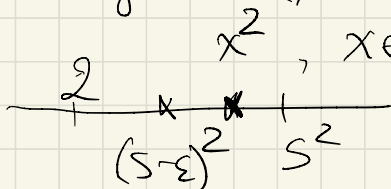
(Grund: $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subsetneq \mathbb{Q}$
besitzt kein Supremum)

Widerspruchsbeweis...

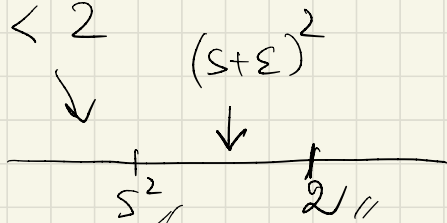
$s = \sup(S)$ existiert, $s \in \mathbb{Q}$

• $s^2 = 2 \rightarrow$ nicht möglich ($\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$)

• $s^2 > 2 \rightarrow$



• $s^2 < 2$



$s - \varepsilon < s$
 $x \in S$

$s - \varepsilon < x < s$

Satz 2.1.9

Es gibt einen ordnungsvollständigen angeordneten Körper, der bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt ist.

Angenommen die Existenz ---

"Def": Der Körper der reellen Zahlen ist der einzige ordnungsvollständige Körper, und wird mit

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$$

bezeichnet

Wir gehen eine Idee der Existenz von $\mathbb{R}$:

2.2. : Reelle Zahlen als Dezimalzahlen (Idee)

Wir sollten beweisen, dass

$$\mathbb{R}, +, \cdot, \leq$$

* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper

* $\leq$ kompatibel mit $+$ $\cdot$

$\hookrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper

* Vollständigkeit

Decimalzahlen

• $[(p, q)] = \frac{p}{q}$ rationale Zahl

• Nehmen wir an, $p, q > 0$

$$\exists! p_0, r_0 \in \mathbb{N} : p = p_0 \cdot q + r_0, \quad 0 \leq r_0 < q$$

$\in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\underbrace{\hspace{10em}} \rightarrow$ Rest

$$\exists! \alpha_1, r_1 \in \mathbb{N} : 10 r_0 = \alpha_1 \cdot q + r_1, \quad 0 \leq r_1 < q$$

$$\exists! \alpha_2, r_2 \in \mathbb{N} : 10 r_1 = \alpha_2 \cdot q + r_2, \quad 0 \leq r_2 < q$$

...

$$\frac{p}{q} \rightarrow p_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

Übung: $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Übung: Die Dezimalbrüche, die aus $\frac{p}{q}$ kommen, sind periodisch

Z. b.: $\frac{1}{3} = 0,333\dots = 0,\overset{\downarrow \text{periodisch}}{3}$

$$\frac{5}{7} = 0,714285714285\dots = 0,\overline{714285}$$

Kleines Problem...

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

$$0,3333\dots + 0,6666\dots$$

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

$$0,9999\dots = 0,\overline{9}$$

Def: Eine Decimalzahl ist eine
Aneinanderreihung

$$p_0 \cdot d_1 d_2 d_3 \dots$$

$$\text{wobei } d_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$p_0 \in \mathbb{Z}$$

mit der Identifizierung:

$$p_0 \cdot d_1 \dots d_k \overline{9} \longmapsto p_0 \cdot d_1 d_2 \dots \underbrace{\underbrace{(d_k + 1)}_k \overline{0}}$$

Reihen ...

$$p_0 \cdot d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$$

$\Downarrow$

$$p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot 10^{-k}$$

$\mathbb{R}$ ist nur eine Menge...

• Ordnung auf $\mathbb{R}$

$$a = p. \underbrace{\alpha_1}_{\text{}} \underbrace{\alpha_2}_{\text{}} \underbrace{\alpha_3}_{\text{}} \dots \quad b = q. \underbrace{\beta_1}_{\text{}} \underbrace{\beta_2}_{\text{}} \underbrace{\beta_3}_{\text{}} \dots$$

$$(*) \quad \underline{a = b} : \Leftrightarrow p = q \text{ und } \alpha_i = \beta_i \quad \forall i$$

(*) Falls $p, q > 0$, denn

$$a > b : \Leftrightarrow p > q \quad \text{oder}$$

$$\begin{cases} p = q \text{ und } \alpha_i = \beta_i \quad \forall i \leq k, \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ \text{und } \alpha_{k+1} > \beta_{k+1} \end{cases}$$

(*) Falls $p < 0$ & $q > 0$ denn ist

$$\underline{a < b}$$

* falls $p < 0$, $q < 0$

$$a < b : \Leftrightarrow -a > -b$$

Bulk : $\leq$ ist eine Totale Ordnung

2.2.1 : Operationen auf $\mathbb{R}$ (als Dezimalzahlen)

Folge : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$a : \mathbb{N} \rightarrow A$, $A \neq \emptyset$

$n \mapsto a(n) =: a_n$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$

• Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist definitiv konstant:

$\exists b \in A$ gibt , sodass

$\downarrow$ $a_n = b$ für alle $n \geq \underline{\underline{N}}$

und $\exists$ ein $N \in \mathbb{N}$

Beispiel : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $a: \mathbb{N} \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{N}}}$

(i) monoton steigend : $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
und

(ii) nach oben beschränkt : $\exists \textcircled{M} \in \mathbb{N}$, sodass
 $(0 \leq) \underline{a_n} \leq \underline{M}$

Dann ist
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definitiv konstant

Zielmenge von a : Derivatschleier

$$a_0 = p_0 \cdot d_{01} d_{02} d_{03} \dots$$

$$a_1 = p_1 \cdot d_{11} d_{12} d_{13} \dots$$

$$a_2 = p_2 \cdot d_{21} d_{22} d_{23} \dots$$

$$a_3 = p_3 \cdot d_{31} d_{32} d_{33} \dots$$

$$\vdots$$

Z.B. $\textcircled{N} = 2$

Falls
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
definitiv
konstant
ist ...
 $\forall n \geq N$
 $a = a_i = a_j \forall i, j \geq n$

Def: Eine Folge der Dezimalzahlen
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist stabilisiert,

falls alle Folgen $s_0, s_1, \dots$ der
Spalten definitiv konstant sind:

↓

Z.B.

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0 \cdot \alpha_{01} \alpha_{02} \alpha_{03} \dots \\ a_1 &= p_1 \cdot \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \\ a_2 &= p_2 \cdot \alpha_{21} \beta_2 \alpha_{23} \dots \\ a_3 &= p \cdot \alpha_{31} \beta_2 \beta_3 \dots \\ a_4 &= p \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \\ a_5 &= p \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \end{aligned}$$

$N_0=4 \quad N_1=5 \quad N_2=3 \quad \dots$

Es sei $a := p \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots$

Wir schreiben

$$a_n \Rightarrow a$$

Lemma : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von nicht-negativen Dezimalzahlen, die

* nach oben beschränkt ist :

$$\exists M \in \mathbb{Z}_{>0} : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

* monoton steigend ist : $a_n \leq a_{n+1}$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

(1) Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stabilisiert :

$$\exists a \text{ Dezimalzahl} : a_n \Rightarrow a$$

(2) Dann gilt :

$$\underline{a_n \leq a \leq M}$$

Beweis (Idee)

$$(1) \quad a_0 = p_0 \cdot \alpha_{01} \alpha_{02} \alpha_{03} \dots$$

$$a_1 = p_1 \cdot \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots$$

$$a_2 = p_2 \cdot \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots$$

$$a_3 = p_3 \cdot \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots$$

$$a_4 = p_4 \cdot \alpha_{41} \alpha_{42} \alpha_{43} \dots$$

$$\vdots$$

$$(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

$$p_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\mathbb{N}} \quad \forall k$$

$(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend und nach oben beschränkt

Bemerkung $\Rightarrow (p_k)$ definitiv konstant

$$(\exists N_0 : p_k = p \quad \forall k \geq N_0)$$

$$* (\alpha_{n1})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$1.9 < 2.1$$

(a_n) nach oben beschränkt
 (a_n) monoton steigend

$$\begin{aligned}
 a_0 &= p_0 \cdot \alpha_{01} \alpha_{02} \alpha_{03} \dots \\
 a_1 &= p_1 \cdot \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \\
 a_2 &= p_2 \cdot \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \\
 a_3 &= p_3 \cdot \alpha_{31} \alpha_{32} \alpha_{33} \dots \\
 a_4 &= p_4 \cdot \alpha_{41} \alpha_{42} \alpha_{43} \dots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$\downarrow$
 p

Bmk $\Rightarrow (p_k)$ definitiv konstant

$$(\exists N_0 : p_k = p \quad \forall k \geq N_0)$$

$(\alpha_{ni})_{n \in \mathbb{N}}$

$$1.9 < 2.1$$

$(\alpha_{ni})_{n \geq N_0}$ muss monoton steigend sein
 $\alpha_{ni} \in \{0, \dots, 9\}$

Bmk: $\Rightarrow (\alpha_{ni})_{n \geq N_0}$ definitiv konstant

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ und } \exists \alpha_1 \in \{0, \dots, 9\} : \underline{\alpha_{ni} = \alpha_1 \quad \forall n \geq N_1}$$

$$\begin{array}{lcl}
 a_0 = p_0 \cdot \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \dots \\
 a_1 = p_1 \cdot \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \dots \\
 a_2 = p_2 \cdot \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \dots \\
 a_3 = p_3 \cdot \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \dots \\
 a_4 = p_4 \cdot \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \underline{p} & \underline{\alpha_2} &
 \end{array}$$

$\downarrow \quad \downarrow$

$$(\alpha_{k2})_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\alpha_2$$

$\downarrow$
 monoton steigend $\forall n \geq \max\{N_{\alpha}, N_{\beta}\}$

(durch Induktion...)



Addition und Multiplikation

$$a = p. d_1 d_2 d_3 \dots$$

Nehmen wir an, dass
 $p \geq 0$

$$b = q. \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$$

$$q \geq 0$$

Wir bilden:

$$(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$(b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a^{(n)} := p. d_1 d_2 \dots d_n 00 \dots$$

$$b^{(n)} := q. \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n 00 \dots$$

Bwk: $(a^{(n)})$ und $(b^{(n)})$ sind ...

$$(*) \mid a^{(n)} \text{ und } b^{(n)} \in \mathbb{Q}$$

(*) $(a^{(n)}), (b^{(n)})$ nach oben beschränkt
sind

$$(*) \text{ Monoton steigend } \mid \begin{pmatrix} a^{(n)} \leq p+1 \\ b^{(n)} \leq q+1 \end{pmatrix}$$

$$(a^{(n)}) \quad (b^{(n)})$$

$$a^{(n)} \Rightarrow a$$

$$b^{(n)} \Rightarrow b$$

$$s^{(n)} \\ \text{ii} \\ a^{(n)} + b^{(n)}$$

$$\text{und } a^{(n)} \cdot b^{(n)} = p^{(n)}$$

Bwk: * $(s^{(n)})$ und $(p^{(n)})$ noch oben beschränkt

* // // monoton steigend

Lemma: $\Rightarrow \exists (s, p \in \mathbb{R})$, sodass

$$a^{(n)} + b^{(n)} \Rightarrow s =: a + b$$

$$a^{(n)} \cdot b^{(n)} \Rightarrow p =: a \cdot b$$

Satz 1: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein angeordneter Körper

Satz 2: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein ordnungsvollständiger Körper:

$\forall A \subseteq \mathbb{R}, A$ nach oben beschränkt,
 $\exists \sup(A) \in \mathbb{R}$

Bem: Die Existenz eines Supremums für A , wobei A nach oben beschränkt ist, $A \neq \emptyset$

Übung



Die Existenz eines Infimums für A , wobei A nach unten beschränkt ist

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$$

• $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Menge der irrationalen Zahlen

Bmk (algebraisch / transzendent)

$$x^2 = 2$$

• $x_0 \in \mathbb{R}$ ist algebraisch (über $\mathbb{Q}$), falls

$$\exists \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$a_i \in \mathbb{Q}$$

$$\text{so dass } P(x_0) = 0$$

(E.g. $\sqrt{2} = x_0$ erfüllt $x_0^2 - 2 = 0$)

• $x_0 \in \mathbb{R}$ ist transzendent, falls sie nicht algebraisch ist

π ist transzendent

Bmk: ~~$\sqrt{2} = 1,414213$~~
 ~~$\pi = 3,14$~~

2.3.1 Das Archimedische Axiom

Lemma : $\mathbb{R}$ erfüllt das Archimedische Axiom : $\forall a, b > 0, \exists n \in \mathbb{N} : na > b$

Beweis

(Übung 2.3.1)

Supremumseigenschaft $\Rightarrow$ AA

$$* \quad \forall x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

$$\exists \bar{x} > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : n < \bar{x}$$

$$\{n \in \mathbb{N} : n < \bar{x}\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{wäre nach oben beschränkt}$$

$$* \Rightarrow \text{AA}$$

• Die Gauß Klammerfunktion

$$L \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$L a \rfloor$: die größte ganze Zahl n ,
sodass $n \leq a$

Falls $a = p.d_1d_2\dots$, $p \geq 0$

$$L a \rfloor = p$$

(z.B.
 $L 3.5412\dots \rfloor = 3$)

Falls $a = p.d_1d_2\dots$, $p < 0$

$$L a \rfloor = p - 1$$

$$L -3.5412\dots \rfloor =$$

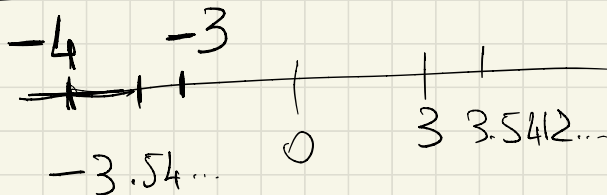
"

-4

Übung (2.3.2) : Benutzen Sie

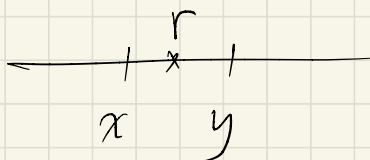
$L \cdot \rfloor$, um zu beweisen, dass $\mathbb{R}$

AA
erfüllt



Lemma : $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h.

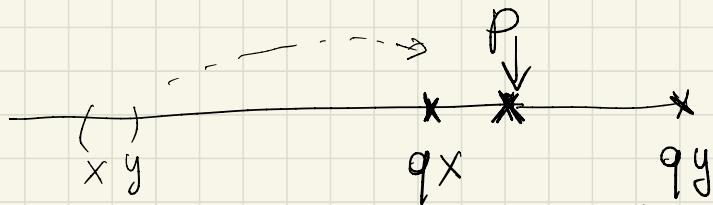
Zu je zwei $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$,
 $\exists r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < y$



Beweis : $r = \frac{p}{q}$ wobei $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Zu beweisen : $\exists p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existieren,
so dass

$$x < \frac{p}{q} < y \Leftrightarrow \boxed{qx < p < qy}$$



$$qy - qx > 1$$

(3.5...
4.6...)

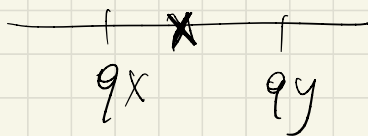
$$(1) \exists q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : qy - qx > 1$$

$$\varepsilon := y - x > 0$$

Lemma 2.1.5. 1. $(\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{n} < \varepsilon)$

$$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{1}{q} < y - x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow qy - qx > 1$$



(2)

$$qx < qx+1 < qy$$

$$\xrightarrow{\quad} \lfloor qx \rfloor + 1$$

Bmk (Übung): $qx < \lfloor qx \rfloor + 1 \leq qx+1$

$$\Rightarrow qx < \lfloor qx \rfloor + 1 \leq qx+1 < qy$$



2.3.2. Potenzen und (Quadrat) wurzeln

$$S_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$$

$$s := \sup(S)$$

$$1) s^2 = 2 \quad \begin{matrix} \nwarrow \\ \downarrow \\ \swarrow \end{matrix}$$

$$2) s^2 > 2$$

$$3) s^2 < 2$$

→ Widerspruch

$$S_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} \rightarrow \text{nach oben beschränkt}$$

$$\underbrace{\sup S_{\mathbb{R}} =: s \in \mathbb{R}}_{s^2 = 2} \text{ muss erfüllen:}$$

Ähnlich:

$$s := \sup \{ x \in \mathbb{R} : x^2 < a \} \stackrel{\leq \mathbb{R}}{\leq} \mathbb{R}, \text{ wobei } a \geq 0 \\ a \in \mathbb{R}$$

erfüllt:

$$\boxed{s^2 = a}$$

Def: Die Quadratwurzel von $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

ist

$$s := \sup \{ x \in \mathbb{R} : x^2 < a \}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{2}} =: s \text{ und erfüllt } \boxed{s^2 = a}$$

• n-te Wurzel von $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$

$$s := \sup \{ x \in \mathbb{R} : x^n < a \}$$

s ist die n -te Wurzel von a

$\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$ bezeichnet

Dazu, erfüllt $s : \boxed{s^n = a}$ //

