E1. Wir haben die stetige Abbildung $i: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

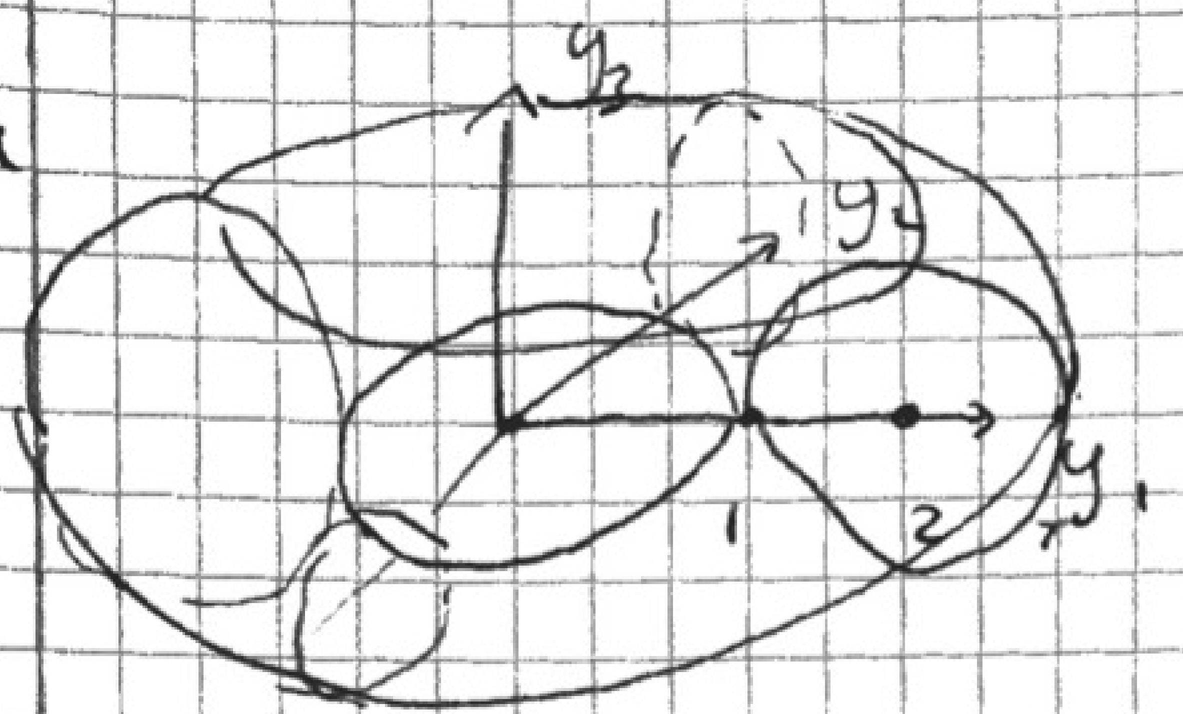
$$x \longmapsto x$$

stetige.

und die Projektion $\pi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/_\sim$

~~Es~~ Die Abbildung $\pi \circ i: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}/_\sim$ ist stetig und $[0,1]$ ist kompakt. Es folgt dass $\mathbb{R}/_\sim$ kompakt ist.

E2 a



b Definieren wir $r: X \longrightarrow T^2$ via.

$$(t,s) \longmapsto ((\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)).$$

Dann ist r stetig und surjektiv.
Es ist einfach zu kontrollieren, dass $r(x) = r(y)$ dann genau wenn $x \sim y$. ~~Das~~ So wir haben eine stetige Abbildung $\tilde{r}: X/_\sim \longrightarrow T^2$.

Aber $X/_\sim$ ist kompakt, und T^2 Hausdorff.
und $\tilde{r}$ ist eine ~~ein~~ injektive Funktion. $\Rightarrow \tilde{r}$ ist ein Homöomorphismus.

T ist Homöomorph zu $\tilde{T}$.

Wir definieren ein Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \big((x_1+2)x_3, (x_1+2)x_4, x_2 \big).$$

Falls $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T$ dann

$$\left(\sqrt{((x_1+2)x_3)^2 + ((x_1+2)x_4)^2} - 2\right)^2 + x_2^2 = \left(\sqrt{(x_3^2+x_4^2)(x_1+2)^2} - 2\right)^2 + x_2^2 \quad \Big\} \text{ da } x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

$$= \left(\sqrt{(x_1+2)^2} - 2\right)^2 + x_2^2 \quad \Big\} \text{ da } x_1 + 2 > 0$$

$$= (x_1 + 2 - 2)^2 + x_2^2 = 1.$$

So f ~~kt~~ kann restrictiert werden zu ein stetige abbildung $T \to \tilde{T}$.

~~Fa~~ Sei $(y_1, y_2, y_3) \in \tilde{T}$

dann definieren Sie.

$$g : \tilde{T} \to T$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = \left\{ \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - 2,\ y_3,\ \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}},\ \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \right) \right.$$

~~Dass~~ g ist wohl definiert. Aus $\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2} - 2\right)^2 + y_3^2 = 1$

folgt, dass $y_1^2 + y_2^2 \neq 0$

~~G~~ g ist stetig.

~~...~~ Kontrolieren Sie dass $g \circ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

und $f \circ g(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3)$.

$\Rightarrow$ f ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 3: a) ~~Zeige (x,y)~~ Nehmen Sie an, dass $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffsch ist. Sei $x, y \in X \times X \setminus \Delta_{X \times X}$.

Es gibt ~~...~~ $U \ni x$ $V \ni y$ Offen sodass $U \cap V$ ~~...~~ $= \emptyset$. Aber, dann $U \times V \cap \Delta_{X \times X} = \emptyset$.

Sodass $\Delta_{X \times X}$ abgeschlossen ist.

Sei $\Delta_{X \times X}$ abgeschlossen, und $x, y \in X$ $x \neq y$.

Es gibt offene menge $U \ni x, V \ni y$ sodass $U \times V \cap \Delta_{X \times Y} = \emptyset$.

Aber, dass sagt ~~mir~~ ~~offen so~~ dass $y \notin U$ und $x \notin V$.

$\Rightarrow$ X ist Hausdorffsch.

b. ~~$(X/_\sim, \pi_\sim)$ ⟺~~ $X/_\sim \times X/_\sim \setminus \Delta_{X/_\sim} \times \Delta_{X/_\sim}$ ist abgeschlosse

Wir haben $X \times X \setminus$ ~~...~~

$$\downarrow \pi \times \pi.$$

$X/_\sim \times X/_\sim$ ~~...~~.

Da π offen ist ist ~~...~~ ist $X \times X \setminus M_\sim$ offen genau dann wenn $X/_\sim \times X/_\sim \setminus \Delta_{X/_\sim} \times \Delta_{X/_\sim}$ offen ist. Aber $M_\sim$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\Delta_{X/_\sim} \times \Delta_{X/_\sim}$

Abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $(\mathbb{R}/_\sim, \tau_\sim)$ Hausdorffsch

Aufgabe 4

a) $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{R}/_\sim$ ist nicht Hausdorffs. ~~Sei~~

~~$[x] \in \mathbb{R}/_\sim$. Jede offene Menge U~~

Sei $x, y \in \mathbb{R}$

Denn für jede offene Menge $U \ni x$ $V \ni y$

haben wir $z \in U$ $w \in V$ sodass

$z - w \in \mathbb{Q}$. ~~Also~~ da

b) Sei $U \ni [x]$ offen in $\mathbb{R}/_\sim$.

Dann ist $\pi^{-1}(U)$ offen in $\mathbb{R}$ und ~~hat~~

enthält ein Intervall (a,b). ~~Denn~~

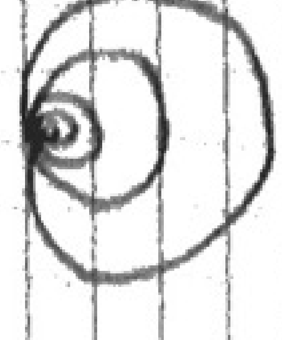
Wann $[y] \in (U) \Rightarrow y + \mathbb{Q} \in \pi^{-1}(U)$

~~Es~~ folgt $(a,b) + \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. sodass $\pi^{-1}(U) = \mathbb{R}$.

So einzige offene Mengen in $(\mathbb{R}/_\sim, \tau)$ sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}/_\sim$

$\Rightarrow$ Diese Topologie ist nicht Hausdorffs.

Aufgabe 5

a. 

b. $(\mathbb{R}/_\sim, T_\pi)$ ~~ist kompakt und~~ Hausdorff.

Zz $[x] \in \mathbb{R}/_\sim$ $[y]$ $\sim$? $[x] \neq [y]$

falls $x, y \notin \mathbb{Z}$ dann $\exists\, \varepsilon$ mit $B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$.

falls $x \in \mathbb{Z}$ $y \notin \mathbb{Z}$ ~~$\exists \varepsilon > 0$~~ sodass dann $dist(x, \mathbb{Z}) = \varepsilon > 0$

sodass $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbb{Z}) = \emptyset$.

und $B_{\varepsilon/3}(x)$ ~~&~~ $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbb{Z})$ sind unabhängig.

$\mathbb{R}/_\sim, T_\pi$ ist nicht compact. Sei

$U = $ ~~$\{x \in \mathbb{R}$~~ $\pi (B_{\frac{1}{3}}(n)) \mid n \in \mathbb{Z}\}$

und $V_n = \pi(B_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{2} + n)) \mid n \in \mathbb{Z}$.

hat kein endliche subcovering.

$(\;)V_1(\;)V_2(\;)V_3(\;)$ U

1 2 3 4

c) H ist ~~top~~ abgeschränkt und geschlossen in $\mathbb{R}^2$

darum kompakt, so ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}/_\sim$.