

Vorlesung 1

1.1.3: Mengenlehre

1.2 : Relationen und Abbildungen

1.2.1: Spezielle Funktionen und
Verknüpfung zweier Funktionen

Mengenlehre, Abbildungen ...

- $\mathbb{N}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z}$ ganze "
- $\mathbb{Q}$ rationale "
- $\mathbb{R}$ reelle Zahlen
- $\mathbb{C}$ Komplexe "

Mengenlehre

Menge

Cantor 1895:

"Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen."

$\{\underline{a}, \underline{a}, b, c, d, \dots\}$

$A = \{a, b, c, d, \dots\}$

~~B ein Element von A~~

$a \in A$

$\hookrightarrow$ gehört

$\notin$
nicht gehört

Bmk : $a \neq \{a\}$
 $\uparrow$ Element $\downarrow$ eine Menge

$$a \in \{a\}$$

• $\emptyset$: leere Menge

$\emptyset$ $\{ \emptyset \}$
 $\downarrow$ leere Menge $\downarrow$ Menge mit einem Element
 $(\emptyset)$

• P Prädikat / Aussage

$P(n)$: n ein Vielfaches von 4

$Q(n)$: n ist eine gerade Zahl

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$P(n)$: n Vielfaches von 4

$Q(n)$: n " " 2

↗ hinreichend

$P(n) \Rightarrow Q(n)$ → notwendig

- Es reicht aus, dass eine Zahl n ein Vielfaches von 4 ist, damit sie gerade ist

↗ $P(n)$ ist ^{eine} hinreichende
Bedingung für $Q(n)$

- Eine Zahl n muss gerade sein, damit sie ein Vielfaches von 4 ist

↗ $Q(n)$ ist eine notwendige
Bedingung für $P(n)$

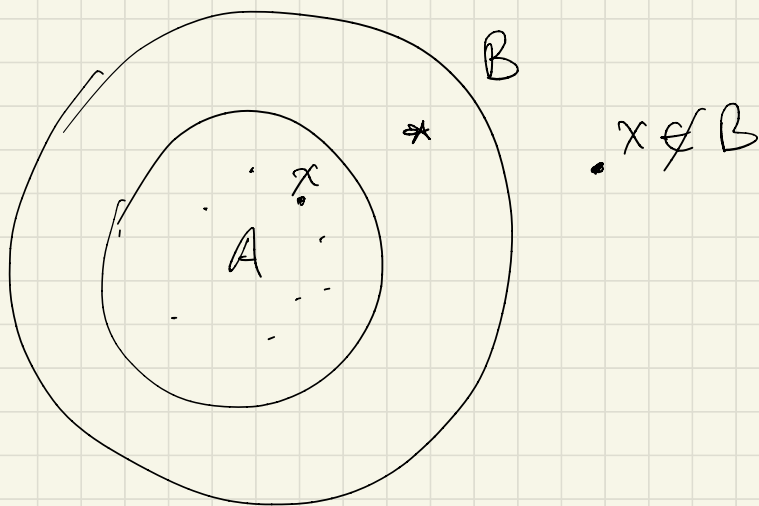
$$Q(n) \not\Rightarrow P(n) \quad 2+4n, n \in \mathbb{N}$$

• $\subseteq$ $\rightarrow$ A ist eine Teilmenge von B

$$A \subseteq B : \iff (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

↓
Definition
(genau dann, wenn)

$$\left[\begin{array}{c} P \iff Q \\ \hookrightarrow P \Rightarrow Q \text{ UND } Q \Rightarrow P \end{array} \right]$$



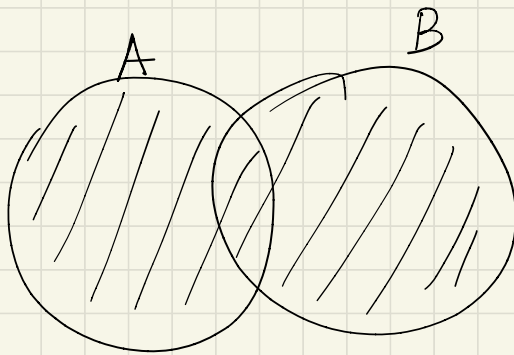
• $\subsetneq$, $A \subsetneq B : \iff A \subseteq B \text{ und } A \neq B$

• $A = B$, A, B Menge

$$A = B : \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} 1. A \subseteq B \\ 2. B \subseteq A \end{array}} \text{ und}$$

• Vereinigung $\cup$

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$$



• Schnitt (Schnittmenge) $\cap$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$$

Indexmenge Λ

↳ für jedes $\lambda \in \Lambda \leadsto A_\lambda$

$$\Lambda = \{1, 2\} \leadsto A_1, A_2$$

$$\Lambda = \mathbb{N} \leadsto A_1, A_2, A_3, \dots$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \left\{ x \mid \exists \lambda \in \Lambda, \text{ sodass } x \in A_\lambda \right\}$$

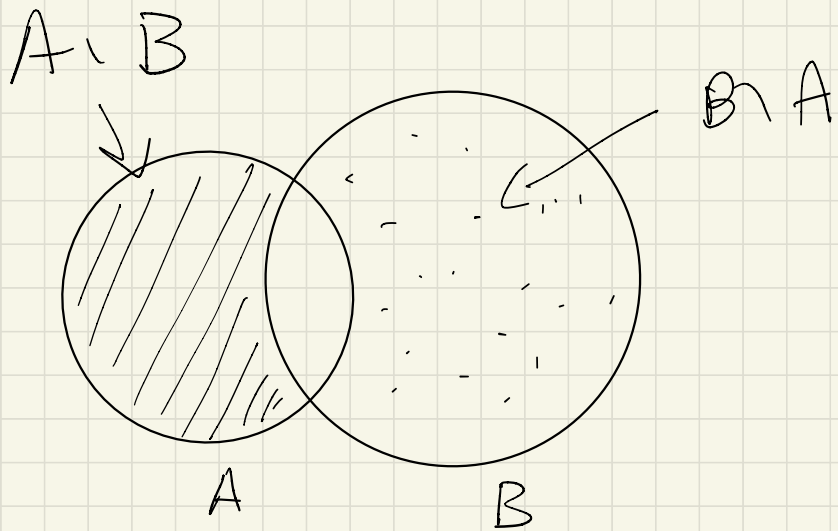
↓
Es (mindestens)
ein (Element, ...) existiert

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \left\{ x \mid \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda \right\}$$

für alle(s)

• Die Differenz $A \setminus B$

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \}$$



- Symmetrische Differenz $A \Delta B$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- $A \subseteq \mathcal{U}$

Komplement von A in $\mathcal{U}$: A^C

$$\underline{A^C := \mathcal{U} \setminus A}$$

- Die Potenzmenge einer Menge X

$P(X)$, die Menge aller
Teilmengen von X

- $X = \{a, b\}$

$$P(X) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \underbrace{\{a, b\}}_X \}$$

$$\left[\text{Bem: Für alle } X \right. \\ \left. \emptyset \subseteq X, X \subseteq X \right]$$

- $X = \emptyset \quad P(\emptyset) = \{ \emptyset \}$

- Das Kartesische Produkt A und B

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

↑
wobei

Definition 1.1.1

Gegeben eine nicht leere Menge G , eine **zweistellige** (oder **binäre**) **Verknüpfung** (oder **Operation**) ist eine Abbildung $\ast: G \times G \rightarrow G$, nämlich, für jedes Paar $(g_1, g_2) \in G \times G$, ordnet $\ast$ ein Element von G zu, das mit $g_1 \ast g_2$ bezeichnet wird.

Eine solche zweistellige Verknüpfung heißt:

- *assoziativ*, falls

$$(g_1 \ast g_2) \ast g_3 = g_1 \ast (g_2 \ast g_3) \quad \text{für alle } g_1, g_2, g_3 \in G;$$

- *kommutativ*, falls

$$g_1 \ast g_2 = g_2 \ast g_1 \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G;$$

- Gegeben eine zweite Verknüpfung $\circ: G \times G \rightarrow G$, dann heißt die Verknüpfung $\ast$ *distributiv* über $\circ$, falls

$$g_1 \ast (g_2 \circ g_3) = (g_1 \ast g_2) \circ (g_1 \ast g_3).$$

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 \ast g_2$$

$$G = \mathbb{N}, \quad \ast = +$$

$$\begin{aligned} g_1 \ast g_2 \ast g_3 &:= (g_1 \ast g_2) \ast g_3 \\ &= g_1 \ast (g_2 \ast g_3) \end{aligned}$$

Distributivität

$$G = \mathbb{N}$$

$\ast = \cdot$ Multiplikation

$\circ = +$ Addition

1.2 Relationen und Abbildungen (Funktionen)

X, Y nicht leere Mengen

R zwischen X und Y

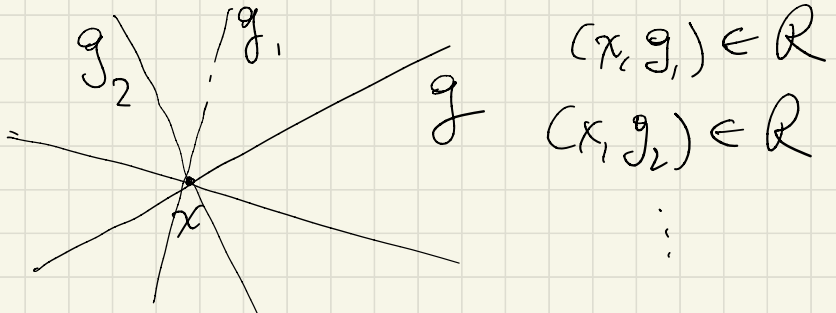
$$R \subseteq X \times Y$$

$(x, y) \in R$ x zusammenhängt mit y

Z.B. : X : Punkte der Ebene
 Y : Menge aller Geraden

$$R = " \in "$$

$$(x, g) \in R \iff "x \in g"$$

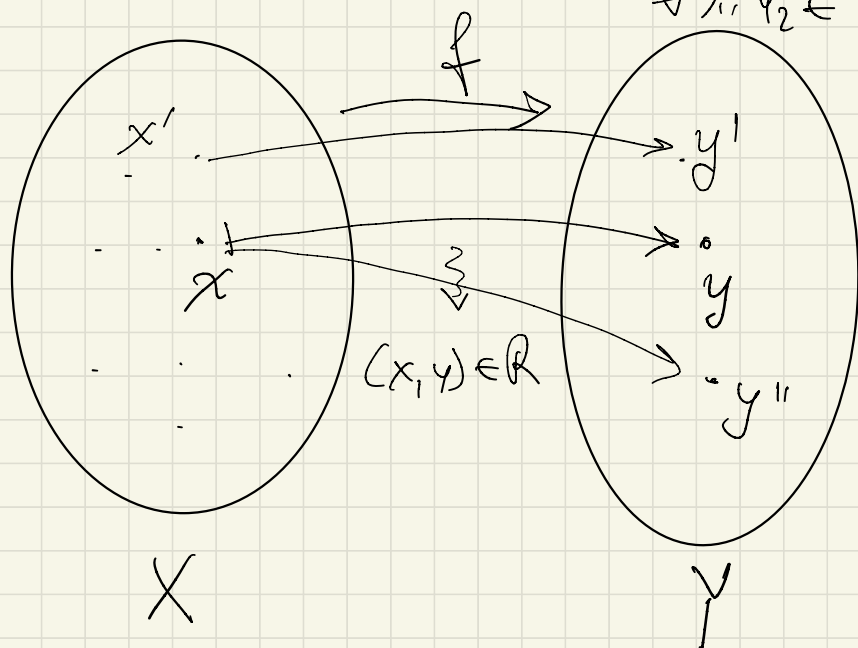


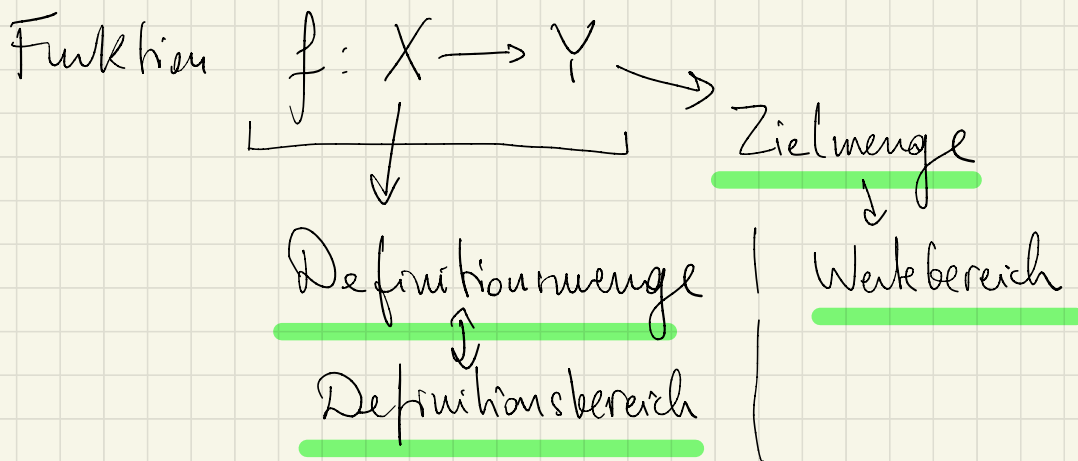
Def : Eine Funktion (oder Abbildung)
 ist eine Relation R zwischen X
 und Y mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\forall x \in X, \exists y \in Y$, sodass $(x, y) \in R$

2) Falls $(x, y_1) \in R$ und $(x, y_2) \in R$

$$\Rightarrow y_1 = y_2, \quad \forall x \in X, \quad \forall y_1, y_2 \in Y$$





Falls $y = f(x) \quad (\Leftrightarrow (x, y) \in R)$

$\rightarrow \forall x \in X, \exists! y \in Y$, sodass $(x, y) \in R$

$\uparrow$ f
 $\downarrow$

- Es ein eindeutiges (Element, ...) gibt
- Es genau ein (Element, ...) gibt

Wir bezeichnen y mit $f(x)$

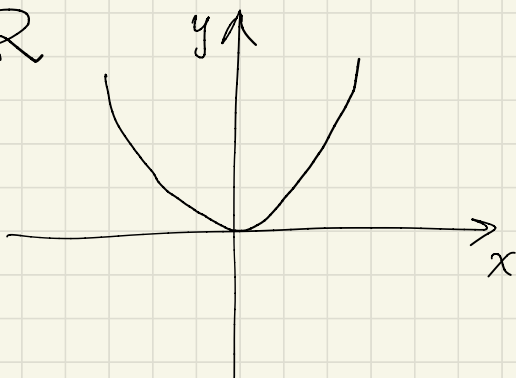
y wird das Bild von x genannt

$$\text{Graph}(f) \subseteq X \times Y$$

$$\text{Graph}(f) = \{ (x, y) \in X \times Y \mid y = f(x) \}$$

$$X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$



• $f(X)$: Bildmenge von f

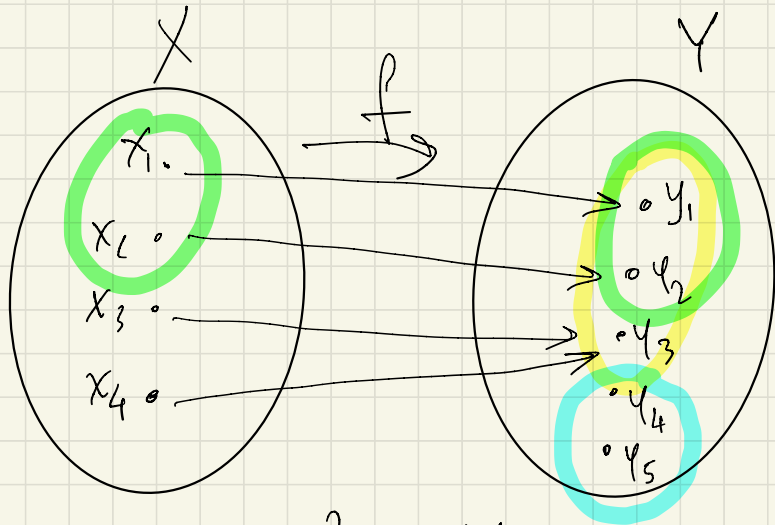
$$f(X) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X, \text{ mit } y = f(x) \}$$

↳ die Menge der Bilder der Elementen
in X

• $\forall A \subseteq X$

$$f(A) = \{ y \in Y \mid \exists x \in A, \text{ mit } y = f(x) \}$$

$\subseteq Y$



$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$$

$$f(X) = \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$A = \{x_1, x_2\}$$

$$f(A) = \{y_1, y_2\}$$

$$B \subseteq Y \quad f^{-1}(B) ?$$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

$$B_1 = \{y_4, y_5\}, \quad f^{-1}(B_1) = \emptyset$$

$$B_2 = \{y_3, y_4, y_5\}, \quad f^{-1}(B_2) = \{x_3, x_4\}$$

$$f^{-1}(B) \subseteq X, \quad \forall B \subseteq Y$$

$$f(A) \subseteq Y, \quad \forall A \subseteq X$$

• $f^{-1}(f(A)) ? \quad A \subseteq X$

$\downarrow$ $\subseteq Y$ $\rightarrow$ Ist das genau A?
 Urbild

• $B \subseteq Y \quad f(f^{-1}(B)) \text{ ist } B ?$

$$X = \mathbb{R}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{ \quad \quad \quad a \leq x < b \}$$

$$(a, b]$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

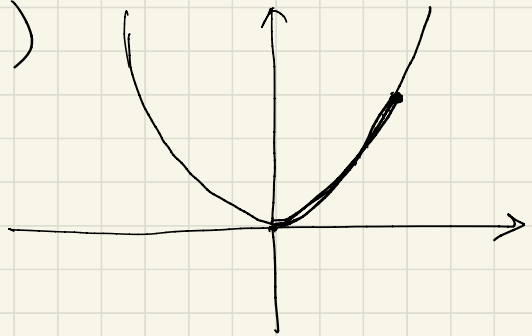
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

Beispiel 1.2.1

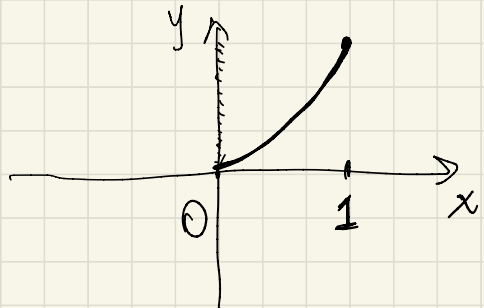
(1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(2) $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$

(1) $f(\mathbb{R})$ (da $x^2 \geq 0$)
 $= [0, +\infty)$



(2) $g([0, 1])$
 $= [0, 1]$



Zwei Funktionen sind gleich, falls:

- die Definitionsmengen und Zielmengen dieselbe sind

und

- die Regel, mit der $x \mapsto f(x)$ zuordnen, dieselbe ist

Im Beispiel, $f \neq g$

1.2.1 Spezielle Funktionen (und Verknüpfung)

- Falls $X' \subseteq X$, $f: X \rightarrow Y$
Einschränkung von f auf X'

$$f|_{X'} : X' \rightarrow Y$$

$$(f|_{X'})(x) = f(x), \forall x \in X'$$

- Identität auf X

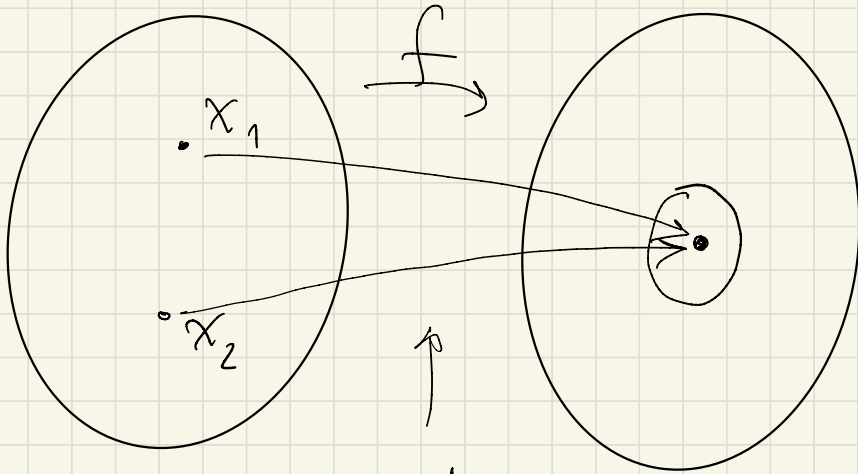
$$\text{id}_X : X \rightarrow X, \text{id}_X(x) = x, \forall x \in X$$

Def : $f: X \rightarrow Y$ Funktion.
 f injektiv, falls

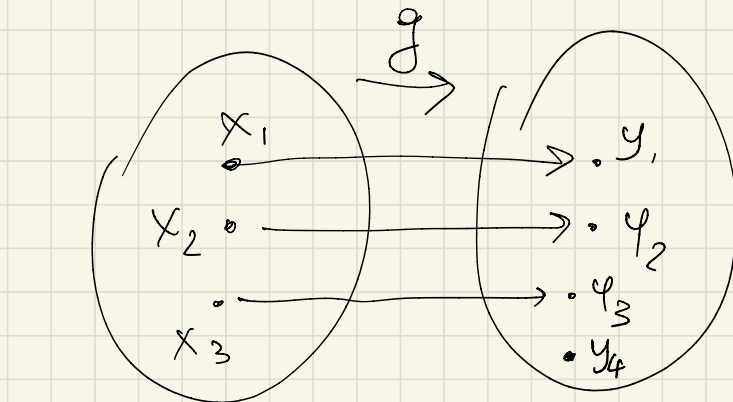
$$\underbrace{\forall x_1, x_2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Äquivalent gesagt:

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



nicht injektiv



Injektiv
✓

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$$

$$g = f|_{[0,1]}$$

• f ist nicht injektiv

$$f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{?} x_1 = x_2$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ x_1^2 = x_2^2 \\ \Updownarrow \end{array}$$

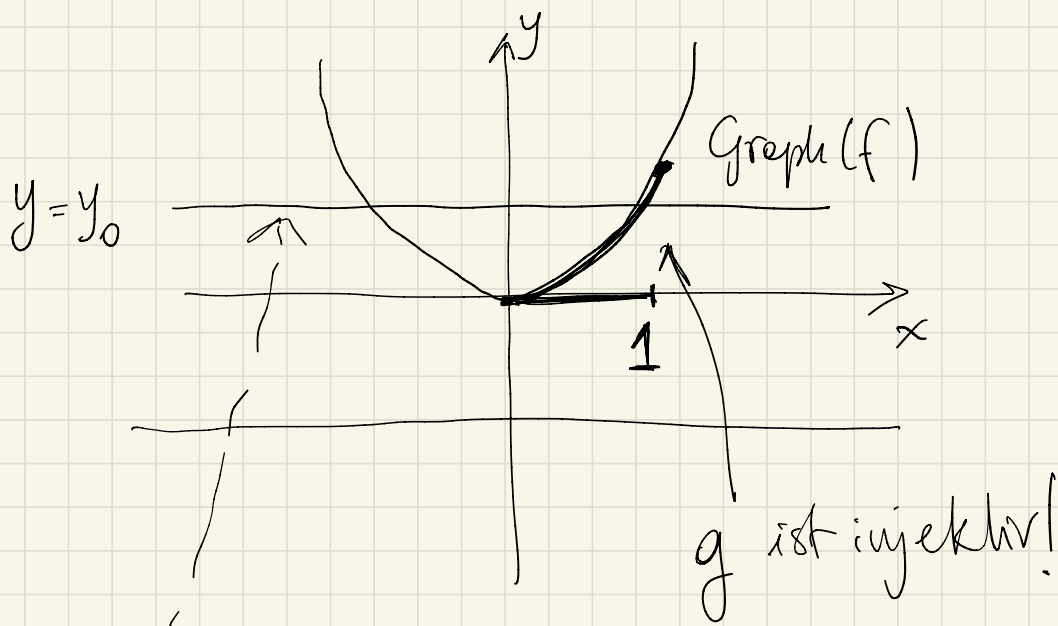
$$(x_1^2 - x_2^2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \cdot (x_1 - x_2) = 0$$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \text{ oder} \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$f(x_1) = f(-x_1) \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \neq 0, \quad x \neq -x$$

$\leadsto f$ ist nicht injektiv



$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = y_0\} \cap \text{Graph}(f)$$

$$\overset{||}{\{(x, y_0), y_0 = f(x)\}}$$

$$(x_1, y_0) = (x_2, y_0) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Falls f injektiv

Injektivität von $f \Rightarrow$ die Punkte in

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = y_0\} \cap \text{Graph}(f)$$

sind maximal 1

$$(\text{und } 0 \iff y_0 \neq f(x))$$

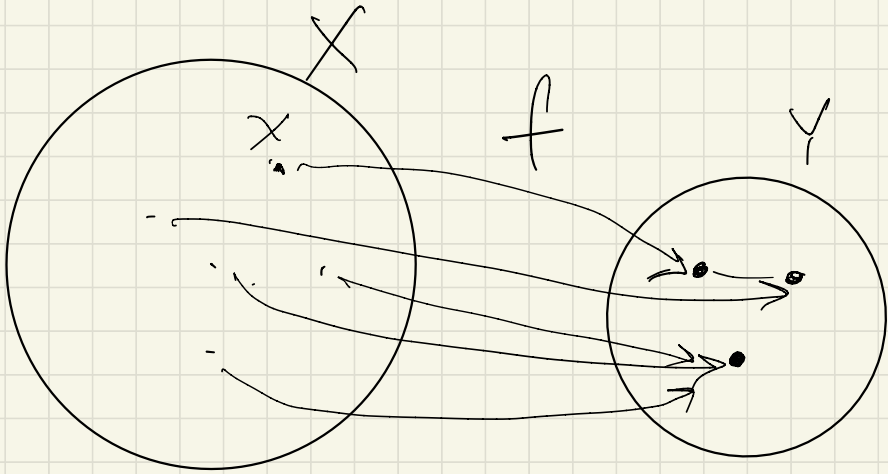
Surjektivität

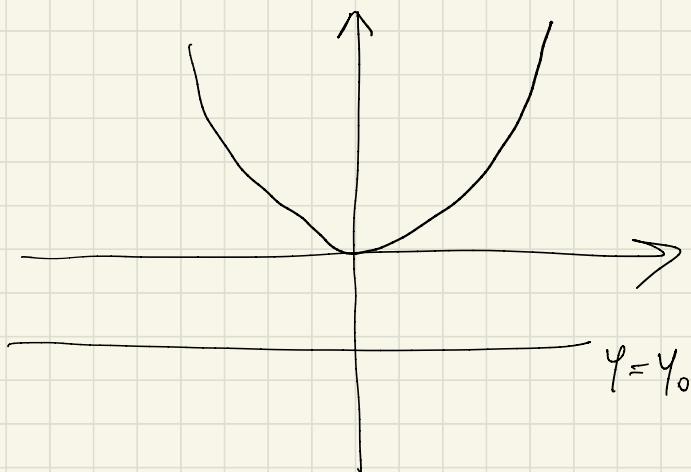
$f: X \rightarrow Y$ surjektiv, falls

$$f(X) = Y$$

$\Leftrightarrow$

$\forall y \in Y, \exists x \in X$, sodass $f(x) = y$





$$f(x) = x^2$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = y_0\} \cap \text{Graph}(f)$$

ist leer, falls $y_0 < 0$

$\Rightarrow$ f ist nicht surjektiv

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

$$x \mapsto x^2$$

surjektiv

$f: X \rightarrow Y$ heißt bijektiv, falls
 f injektiv und surjektiv ist