Prof. Dr. Silvia Sabatini Wintersemester 2015/2016

Klausur Elementare Differentialgeometrie 9CP

19.2.16, 9:00 – 12:00

Kontrolieren Sie ob Sie die richtige Klausur haben! Es sind keine Hilfsmittel (Skript, Taschenrechner...) erlaubt. Täuschungsversuche, auch zugunsten anderer, führen zum Ausschluß von der Klausur. Taschen, Jacken und Mobiltelephone etc. sind im Hörsaal vorne zu deponieren. Wird das Mobiltelephon o.ä. nicht abgegeben, so gilt dies als Täuschungsversuch.
Begründen Sie stets Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung liefern keine Punkte.
Die Aufgaben sind auf den entsprechenden Blättern (einschließlich Rückseite) zu bearbeiten. Falls Sie die am Ende angehefteten Leerseiten benutzen, machen Sie bitte einen Verweis bei der jeweiligen Aufgabe. Die Notizzettel können **nicht** mit abgegeben werden. Verwenden Sie ausschließlich schwarze oder blaue Tinte/Kugelschreiber.
Die Klausur umfaßt 6 Aufgaben.

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Klausurnummer: 1

Unterschrift

Den unteren Teil dieses Blattes **nicht** beschriften!

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte
1			4	
2			5	
3				
Gesamt:				

Aufgabe 1. (3+7 Punkte)

Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, mit nicht-verschwindener Krümmung κ.

a) Erinnern Sie sich, dass die Evolute der Kurve γ, d.h. die Kurve e die durch die Mittelpunkte der Kreise lauft, die die Kurve γ am besten approximieren, gegeben ist durch

$$e(t) = \gamma(t) + \frac{1}{|\kappa(t)|} \frac{\ddot{\gamma}(t)}{\|\ddot{\gamma}(t)\|}.$$

Zeigen Sie, dass

$$e(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \mathbf{n}(t),$$

wobei $\mathbf{n}(t) = J\,\dot{\gamma}(t)$ and $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Nehmen Sie an, dass die Krümmung $\kappa(t)$ die Ungleichung $\frac{d\kappa}{dt} \geq 0$ erfüllt. Zeigen Sie dass die Bogenlänge der Evolute e von $e(t_0)$ bis $e(t_1)$, mit $t_0 \leq t_1$, gebeben ist durch

$$\frac{1}{\kappa(t_0)} - \frac{1}{\kappa(t_1)}.$$

(*Hinweis*: Frenet-Gleichungen)

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Raumkurve definiert durch

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^t \cos(t) \\ e^t \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix}.$$

a) Parametrisieren Sie α nach Bogenlänge um. Nennen Sie diese nach Bogenlänge Umparametrisierung β mit Parameter s.

b) Berechnen Sie das begleitende Dreibein von β.

c) Berechnen Sie die Krümmung von β in $s = 0$.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Seien K die Gausskrümmung und H die mittlere Krümmung von einer regulären Fläche im Punkt p. Zeigen Sie, dass die Hauptkrümmungen die Lösungen der Gleichung

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

sind.

Aufgabe 4. (2+2+3+3 Punkte)

Seien I und J offene Intervalle, $c : I \to \mathbb{R}^3$ und $v : I \to \mathbb{R}^3$ parametrisierte Raumkurven mit $v(t) \neq (0,0,0)$ für alle $t \in I$. Wir definieren $F : I \times J \to \mathbb{R}^3$ durch

$$F(t,s) = c(t) + sv(t).$$

a) Zeigen Sie, dass $D_{(t,0)}F$ rang 2 hat, falls $\dot{c}(t)$ und $v(t)$ linear unabhängig sind.

Damit existiert eine offene Umgebung U von $(t,0)$, so dass $F\colon U \to V$ eine lokale Parametrisierung einer regulären orientierbaren Fläche $F(U)$ ist, wobei V eine offene Menge in $\mathbb{R}^3$ ist. Falls eine Fläche S eine Parametrisierung dieser Form hat, heißt sie eine Regelfläche.

b) Zeigen Sie, dass die Komponente h_{22} der zweiten Fundamentalform verschwindet:

$$h_{22} = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass die Gausskrümmung einer Regelfläche nicht-positiv ist:

$$K \leq 0.$$

d) Zeigen Sie, dass

$$K(F(t,s)) < 0,$$

falls $\dot{c}(t), v(t)$ und $\dot{v}(t)$ linear unabhängig sind

Aufgabe 5. (3+3+3+3+3 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ v \end{pmatrix}.$$

Die Funktion F parametrisiert eine reguläre Fläche S.

a) Berechnen Sie die erste Fundamentalform bezüglich der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\}$.

b) Geben Sie ein stetiges Einheitsnormalenfeld N auf S mit

$$\left\langle N(F(0,0)), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle < 0,$$

an.

c) Orientieren Sie die Fläche S durch das Einheitsnormalenfeld N. Berechnen Sie die Weingartenabbildung dieser orientierten Fläche bezüglich der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\}$.

d) Berechnen Sie die zweite Fundamentalform bezüglich der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}\}$.

e) Berechnen Sie die Gausskrümmung und die mittlere Krümmung von S.