Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
2.6.2016

Topologie: Übungsblatt 7

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 9.6.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (13 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

i) X ist ein zusammenziehbarer Raum.

ii) Die Identität $\mathrm{id} : X \to X$ ist nullhomotop, d.h. id ist homotop zu eine konstante Abbildung.

iii) Jede Abbildung $f : X \to Y$ in einen beiliebigen topologischen Raum Y ist nullhomotop.

iv) Jede Abbildung $g : Y \to X$ aus einen beiliebigen topologischen Raum Y, ist nullhomotop.

Aufgabe 2. (6+6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass ein zusammenziehbarer Raum wegzusammenhängend ist.

b) Sei X ein topologischer Raum. Seien $x, y \in X$, mit $x \neq y$. Seien die konstanten Abbildungen $c_x, c_y : X \to X$ definiert durch

$$c_x(p) = x, \qquad c_y(p) = y \qquad \text{für alle} \qquad p \in X.$$

Zeigen Sie, dass c_x und c_y homotop sind, genau dann wenn x und y in derselbe Wegzusammenhangskomponente liegen.

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum mit diskreter Topologie. Sei $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(X; x_0) = [\gamma_{x_0}],$$

wobei $\gamma_{x_0} : [0,1] \to X$ definiert ist durch $\gamma_{x_0}(t) = x_0$.

Aufgabe 4. (5+5+5 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum, und seien $f, g : X \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetige Abbildungen mit $f(x) \neq -g(y)$ für alle $x \in X$.

a) Zeigen Sie, dass f homotop ist zu g.
Hinweis : Das Segment $t \mapsto tf(x) + (1-t)g(x)$ *geht nicht durch* $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ *für alle* $x \in S^n$.

b) Benutzen Sie Teil a) um zu zeigen, dass wenn f nicht surjektiv ist, dann f nullhomotop ist.

Wir können auch auf eine andere Weise Teil b) beweisen :
Errinneren Sie sich daran, dass $S^n \setminus \{p\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, für jedes $p \in S^n$.

c) Benutzen Sie dies, um b) zu zeigen.