KG 3-26-2

Prof. Dr. D. Huybrechts
Dipl. Math. M. Lang

WS 1999/2000

NACHKLAUSUR zur ANALYSIS I

1.i) Beweisen Sie für 2 komplexe Zahlen z, w die Gleichung

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)\ .$$

ii) Man beweise, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} T & : & \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto \lambda z + \mu \bar{z} \end{array}\quad \text{, wobei } \lambda, \mu \in \mathbb{C}\ ,$$

genau dann bijektiv ist, falls $|\lambda| \neq |\mu|$.

iii) Zeichnen Sie die Menge

$$\{z|\ |\mathrm{Re}\ (1/z)| \leq 1/2\ ,\ |1/z| \geq 1\ ,\ \mathrm{Im}\ (1/z) > 0\}\ .$$

2.i) Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen:

$$\left(\frac{(n-1)(n^2+1)}{(n+3)^4 - n^4}\right)\ ,\quad \left(\frac{17n+8}{\sqrt{n^3}}\right)\ ,\quad \left(\frac{\log(n)^6}{n}\right)\ ,\quad \left(\log\left(\frac{17n+8}{\sqrt{n^3}}\right)\right)\ .$$

ii) Konvergiert die Folge: (Begründung!)

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\ ?$$

3.i) Welche der folgenden Reihen sind konvergent und welche divergent? Warum?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}+\pi}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}\ ,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\cos(n\frac{\pi}{2})+1}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+e)}}\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n\sqrt{n}}}\ .$$

ii) Finden Sie ein Beispiel für eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, deren Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ (d.h. $c_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}$) nicht konvergiert!