Diese Lösungen sind eine Skizze einer korrekten Lösung.

Aufgabe 1 (3+7 Punkte) 6CP und 9CP

a) κ is definiert durch die Gleichung

$$\ddot{\gamma}(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t),$$

sodass

$$\begin{aligned} e(t) &= \gamma(t) + \frac{1}{\|\kappa(t)\|}\frac{\ddot{\gamma}(t)}{\|\ddot{\gamma}(t)\|} \\ &= \gamma(t) + \frac{1}{|\kappa(t)|}\frac{\kappa(t)\mathbf{n}(t)}{|\kappa(t)|\|\mathbf{n}(t)\|} \\ &= \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t) \end{aligned}$$

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{\gamma}(t) + \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\kappa(t)}\right)\mathbf{n}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}J\ddot{\gamma}(t). \\ &= \dot{\gamma}(t) + \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\kappa(t)}\right)\mathbf{n}(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\kappa(t)JJ\dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{\kappa(t)}\right)\mathbf{n}(t).$$

Wir haben

$$L_e(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\frac{d}{dt}\frac{1}{\kappa(t)}|dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\frac{1}{\kappa(t)}dt = \frac{1}{\kappa(t_0)} - \frac{1}{\kappa(t_1)}.$$

Aufgabe 2 (4+4+2 Punkte) 6CP und 9CP

a) Wir berechnen

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{e^t}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\|\dot{\alpha}(t)\|^2 = \frac{e^{2t}}{3}(\cos^2(t) - 2\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) + \cos^2(t) + 1),$$

sodass $\|\dot{\alpha}(t)\| = e^t$. Um zu umparametrisieren mussen wir einen Punkt waraus wir umparametrisieren. In diese Lösug walen wir $\beta(0) = \alpha(0)$.

Für die Bogenlänge haben wir

$$L(t) = \int_0^t \|\dot{\alpha}(s)\| ds = e^t - 1.$$

Ein andere möglichkeit is um aus $-\infty$ um zu parametrisieren. Wir kriegen denn für die Bogenlänge $L(t) = \int_{-\infty}^t e^s ds = e^t$.

Schreiben wir $s = L(t)$, dan können wir invertieren und finden $\beta\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}^3$

$$\beta(s) := \alpha(t(s)) = \frac{1+s}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(\log(1+s)) \\ \sin(\log(1+s)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Wir berechnen das Dreibein

$$\tau(s) = \dot{\beta}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \cos(\log(1+s)) - \sin(\log(1+s)) \\ \sin(\log(1+s)) + \cos(\log(1+s)) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\ddot{\beta}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}(1+s)} \begin{pmatrix} -\sin(\log(1+s)) - \cos(\log(1+s)) \\ \cos(\log(1+s)) - \sin(\log(1+s)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

sodass

$$n(s) = \frac{\ddot{\beta}(s)}{\|\ddot{\beta}(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin(\log(1+s)) - \cos(\log(1+s)) \\ \cos(\log(1+s)) - \sin(\log(1+s)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Am ende haben wir

$$b(s) := \tau(s) \times n(s) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sin(\log(1+s)) - \cos(\log(1+s)) \\ -\sin(\log(1+s)) - \cos(\log(1+s)) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\kappa(s) := \|\ddot{\beta}(s)\| = \sqrt{\frac{2}{3(1+s)^2}}$$

und

$$\kappa(0) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Falls umparametrisiert is aus $t = -\infty$ kriegen wir $\kappa(s) = \sqrt{\frac{2}{3s^2}}$. Die Krümmung geht denn nach $+\infty$ falls $s \to 0$.

Aufgabe 3 (3+3+3+3+3 Punkte) 6CP

a) Wir berechnen die Gradient von g.

$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z+3z^2 \end{pmatrix}.$$

Falls $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, denn grad $\neq 0$. Falls $(0,0,z) \in V \setminus \{(0,0,0)\}$, denn $z = 1$ und grad$g(0,0,1) = (0,0,1)$ verschwindet nicht.

b) Falls $(x,y,z) \in V$, denn

$$z^2(1-z) = x^2 + y^2 \geq 0$$

und $1 - z \geq 0$.

c) Sei $(x,y,z) \in V$. Da $z \leq 1$, können wir $z = 1 - s^2$ für $s \in \mathbb{R}$ schreiben. Sodass

$$x^2 + y^2 = s^2(1-s^2)^2$$

und falls $z \neq 0, 1$ (dort ist die Parametrisierung einfach)

$$\left(\frac{x}{s(1-s^2)}\right)^2 + \left(\frac{y}{s(1-s^2)}\right)^2 = 1$$

Sodass wir können schreiben

$$\frac{x}{s(1-s^2)} = \cos(t) \qquad \frac{x}{s(1-s^2)} = \sin(t)$$

Sodass $V \subset \operatorname{im}\phi$. Es ist einfach zu sehen das $\operatorname{im}\phi \subset V$.

d) Wir berechnen

$$D_{s,t}\varphi = \begin{pmatrix} (1-3s^2)\cos(t) & -s(1-s^2)\sin(t) \\ (1-3s^2)\sin(t) & s(1-s^2)\cos(t) \\ -2s & 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben für die determinant der hohe $2x2$ Submatrix

$$\det \begin{pmatrix} (1-3s^2)\cos(t) & -s(1-s^2)\sin(t) \\ (1-3s^2)\sin(t) & s(1-s^2)\cos(t) \end{pmatrix} = s(1-s^2)(1-3s^2)$$

Falls $s \neq 0, 1, -1, \frac{1}{\pm\sqrt{3}}$ ist, dann rank $D\varphi = 2$. Wann $s = 0, 1, -1$ verschwindet die zweite Kolumn sodass rank $D\varphi \neq 2$. Falls $s = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ dann ist rank $D\phi = 2$ da beide kolumn vektoren nicht verchwinden un linear unabhängig sind (siehe z.b. die letzte Komponent). Alle Aussprachen gilten für jedes $t \in \mathbb{R}$.

e) Sei $p = (0,0,1)$, so $T_p(V \setminus \{(0,0,0\}) = \operatorname{grad} g_p^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$

Aufgabe 4 (3+4+5+3) 6CP

a) Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sodass für $g_{ij} = \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle$ wir haben

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}.$$

b) Ein Normalenfeld ist definiert durch

$$\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix}$$

und ein Einheitsnormalenfeld ist

$$N := \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}}{\|\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix}.$$

und $N(0,0,0) = (0,-1,0)$ sodass

$$\left\langle N(F(0,0)), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle < 0.$$

c)

$$\begin{aligned} W_p \frac{\partial F}{\partial u} &= -dN\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} N(F) \\ &= -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix} \right) \\ &= -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned}$$

Gleichweis

$$\begin{aligned} W_p F &= -dN\frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial v} N(F(u,v)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{\partial F}{\partial u} \end{aligned}$$

Errinneren Sie sich dass,

$$W_p(D_u(F(e_i)) =: \sum_{j=1}^{2} w_i^j(u) D_u F(e_j).$$

Damit konkludieren wir, dass

$$w_1^1 = 0 \qquad w_1^2 = -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$w_2^1 = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \qquad w_2^2 = 0.$$

d) $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ ist ein Beispiel einer Kurve mit diesen Eigenschaften.

Aufgabe 3 (5) 9CP

Die Gausskrummung ist definiert durch $K = \kappa_1\kappa_2$ und $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$, wobei κ_i die Hauptkrummungen sind. Aber dann haben wir $\kappa_2 = 2H - \kappa_1$ und

$$K = \kappa_1(2H - \kappa_1)$$

sodass

$$\kappa_1^2 - 2H\kappa_1 + K = 0.$$

Wir kriegen auch (durch Wechsel $\kappa_1 \Leftrightarrow \kappa_2$, alles ist symmetrisch)

$$\kappa_2^2 - 2H\kappa_2 + K = 0.$$

Aufgabe 4 (2+2+3+3 Punkte) 9CP

a)

$$F(t,s) = c(t) + sv(t).$$

Sodass

$$D_{(t,s)}F = \left(\dot{c}(t) + s\dot{v}(t), v(t)\right).$$

Wir sehen

$$D_{(t,0)}F = \left(\dot{c}(t), v(t)\right).$$

Diese matrix hat Rank 2 genau denn wann $\dot{c}(t)$ und $v(t)$ linear unabhängig sind.

b) Wir haben, mit N ein Einheitsnormalenfeld,

$$h_{22} = \langle \frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2}, N(F(s,t)\rangle = 0,$$

da $\frac{\partial^2 F(s,t)}{\partial s^2} = 0$.

c) Die Gausskrümmung kann berechnet wurden durch

$$K(p) = \frac{\det h_{ij}}{\det g_{ij}} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{\det g_{ij}} = -\frac{h_{12}^2}{\det g_{ij}} \leq 0,$$

da $\det g_{ij} > 0$ weil g_{ij} positiv definit ist. Wir haben hier $h_{12} = h_{21}$ benutzt.

d) Ein einheits Normalenfeld ist gegeben durch

$$N = \frac{\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}}{\|\frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial F}{\partial s}\|} = \frac{(\dot{c}(t) + s\dot{v}(t)) \times v(t)}{\|(\dot{c}(t) + s\dot{v}(t)) \times v(t)\|}.$$

Dann

$$\begin{aligned} h_{12} = \langle \frac{\partial^2 F(t,s)}{\partial t \partial s}, N \rangle &= \frac{1}{\|(\dot{c}(t) + s\dot{v}(t)) \times v(t)\|} \langle \dot{v}(t), (\dot{c}(t) + s\dot{v}(t)) \times v(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\|(\dot{c}(t) + s\dot{v}(t)) \times v(t)\|} \langle \dot{v}(t), (\dot{c}(t)) \times v(t) \rangle. \end{aligned}$$

da $\dot{c}(t), v(t)$ und $\dot{v}(t)$ linear unabhängig sind, ist $h_{12} \neq 0$ und $K(F(s,t)) < 0$.

Aufgabe 5 (3+3+3+3+3 Punkte) 9CP

a) Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sodass für $g_{ij} = \langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j} \rangle$ wir haben

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + u^2 \end{pmatrix}.$$

b) Ein Normalenfeld ist definiert durch

$$\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix}$$

und ein Einheitsnormalenfeld ist

$$N := \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}}{\|\frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial F}{\partial v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix}.$$

und $N(0,0,0) = (0,-1,0)$ sodass

$$\left\langle N(F(0,0)), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle < 0.$$

c)

$$\begin{aligned} W_p \frac{\partial F}{\partial u} &= -dN \frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u} N(F) \\ &= -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\begin{pmatrix} \sin(v) \\ -\cos(v) \\ u \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial F}{\partial v} \end{aligned}$$

Gleichweis

$$\begin{aligned} W_p \partial F \partial v &= -dN \frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial v} N(F(u,v)) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{\partial F}{\partial u}. \end{aligned}$$

Errinneren Sie sich dass,

$$W_p(D_u(F(e_i)) =: \sum_{j=1}^{2} w_i^j(u) D_u F(e_j).$$

Damit konkludieren wir, dass

$$\begin{aligned} w_1^1 &= 0 & w_1^2 &= -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \\ w_2^1 &= -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & w_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

d) Wir rechnen

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -u\cos(v) \\ -u\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die zweite Fundamentalform ist $h_{ij} = \langle \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, N \rangle$, sodass

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

e) $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr} W = 0$ und $K = \det w_j^i = \frac{-1}{(1+u^2)^2}$.