Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro

Universität zu Köln
18.01.2021

ANALYSIS I
Übungsblatt 10

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 18.01.2021, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. Beweisen Sie, dass

1. $\cos\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend ist und deshalb injektiv;
   Hinweis: Benutzen Sie die Formel aus der Trigonometrie:
$$\cos(y) - \cos(x) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$
2. $\cos\colon (0,\pi) \to (-1,1)$ bijektiv ist;
3. Die Umkehrabbildung $\arccos\colon (-1,1) \to (0,\pi)$, die **Arkuskosinus** genannt wird, ist in jedem Punkt $y \in (-1,1)$ differenzierbar und gilt
$$\frac{d}{dy}\arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$
4. Aus diesen Formeln erhalten wir, dass
$$\frac{d}{dy}\arccos(y) + \frac{d}{dy}\arcsin(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in (-1,1).$$
   Finden Sie einen geometrischen Grund für die obige Gleichheit.

Ähnlich beweisen Sie, dass

1. Die Kotangensfunktion $\cot\colon (0,\pi) \to \mathbb{R}$ bijektiv ist (für die Injektivität, beweisen Sie, dass der Kotangens streng monoton fallend ist);
2. Die Umkehrabbildung $\operatorname{arccot}\colon \mathbb{R} \to (0,\pi)$, die **Arkuskotangens** genannt wird, ist in jedem Punkt $y \in \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt
$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccot}(y) = -\frac{1}{1+y^2}\,.$$

3. Aus diesen Formeln erhalten wir, dass
$$\frac{d}{dy}\arctan(y) + \frac{d}{dy}\operatorname{arccot}(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$
Finden Sie einen geometrischen Grund für die obige Gleichheit.

Präsenzaufgabe 2. 1. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie (mit Induktion), dass sie unendlich oft differenzierbar ist mit höheren Ableitungen gegeben durch
$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & \text{für alle } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{für alle } k > n\,. \end{cases}$$

2. Beweisen Sie, dass die Sinus- und Kosinusfunktion unendlich oft differenzierbar sind, und finden Sie eine Formel für ihre höhere Ableitungen.

Hausaufgabe 1. (5 Punkte)
Es seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind. Beweisen Sie die folgende Formel (die **Leibnizsche Regel** genannt wird):
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}\,. \tag{1}$$

Hausaufgabe 2. (6 = 2 + 4 Punkte)

1. Bestimmen Sie alle Werte $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die folgende Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$
differenzierbar in $x = 0$ ist. Für welchen dieser Werte α ist die Abteilungsfunktion f' stetig?

2. Betrachten Sie die Abbildung
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Hausaufgabe 3. (6 = 2 + 2 + 2 Punkte)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$
$$f(-x) = f(x)$$
gilt, und sie heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$
$$f(-x) = -f(x)$$
gilt. Die Funktion f heißt *periodisch mit der Periode T*, wenn $T \neq 0$ und
$$f(x) = f(x+T) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine überall differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

(a) Wenn f gerade ist, ist f' ungerade.

(b) Wenn f ungerade ist, ist f' gerade.

(c) Wenn f periodisch mit der Periode T ist , ist f' periodisch mit der Periode T.

Hausaufgabe 4. (8 = 3 + 5 Punkte)
(**Charakterisierungen der Exponenzialfunktion**)
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass gegeben $a > 0$, erfüllt die Exponenzialfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, die folgenden Eigenschaften:

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

und

$$f'(x) = \log(a)a^x = \log(a)f(x)\,. \tag{3}$$

In dieser Übung werden Sie beweisen, dass (2) und (3) die Exponenzialfunktion charakterisieren.

1. [1] Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige, nicht konstante Funktion, die die folgende Gleichung

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \tag{4}$$

erfüllt. Beweisen Sie, dass $f(x) = a^x$ für ein $a > 0$.
Der Beweis ist in folgende Schritte unterteilt:

- Beweisen Sie, dass entweder $f(0) = 0$ oder $f(0) = 1$, und dass $f(0) = 0$ impliziert, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb, da wir angenommen haben, dass f nicht konstant ist, muss es gelten $f(0) = 1$.
- Beweisen Sie, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und dass die Stetigkeit von f impliziert, dass $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Es sei $a := f(1)$. Beweisen Sie, dass
  - $f(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$;
  - $f(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$;
  - $f\left(\frac{p}{q}\right) = a^{\frac{p}{q}}$ für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$;
  - $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 1$, und sodass

$$f'(x) = kf(x)\,. \tag{5}$$

Beweisen Sie, dass $f(x) = e^{kx} = a^x$, wobei $k = \log(a)$.
(*Hinweis*: Es genügt zu zeigen, dass f die Gleichung (4) erfüllt. Beweisen Sie zuerst, dass (4) äquivalent zu

$$f(y-x)f(x) = f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

ist. Dann zeigen Sie, dass für alle festen $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $g(x) := f(y-x)f(x)$ konstant ist. Ist g differenzierbar? Wenn ja, was ist ihre Ableitung?)

Extra Hausaufgabe 1. (9 = 3 + 3 + 3 Punkte)
Aufgaben 6 und 7 von “Thorbergsson02” und Aufgabe 6 von “Lange99”.

[1] Dieser Teil der Übung wurde bereits in Tutorium 9 gelöst. Wenn Sie ihn jedoch erneut richtig lösen, ohne auf die Lösung zu achten, ist er dennoch eine sehr gute Übung für Sie.