

Vorlesung 5

Das Archimedische Axiom

Der Absolutbetrag

2.1.1. Ordnungsvollständigkeit



Zum letzten Mal...

Satz 2.1.4

(Bernoullische Ungleichung) Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper und n eine natürliche Zahl. Dann gilt für jedes $x \in K$ mit $1+x \geq 0$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x.$$

Heute...

Archimedisches Axiom  eines angeordneten Körpers:

$$\begin{array}{l} \forall a, b \in K \\ a > 0 \\ b > 0 \end{array} \quad \exists n \in \mathbb{N} : \underline{n \cdot a > b}$$

Buik: Dieses Axiom kommt nicht aus den Axiomen, die $(K, +, \cdot, \leq)$ definieren
 $\Leftrightarrow$ Man kann AA aus diesen Axiomen nicht erhalten

Lemma 2.1.3

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten, für beliebige $a, b, c \in K$:

1. $a > 0 \iff -a < 0$

2. $a > b \iff a - b > 0 \iff -b > -a$

3. Falls $a > 0$ und $b > 0$, dann sind $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$

4. Falls $a > b$ und $c > d$, dann ist $a + c > b + d$

5. Falls $a > b > 0$ und $c > d > 0$, dann ist $a \cdot c > b \cdot d$

6. Falls $a < b$ und $c < 0$, dann ist $a \cdot c > b \cdot c$

7. Falls $a \neq 0$, dann ist $a^2 > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$

8. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung in K

9. $a > 0 \implies a^{-1} > 0$

10. Falls $a > b > 0$, dann ist $b^{-1} > a^{-1}$

Abgesehen von den Ungleichungen in 7., 8., 9. und 10, halten die anderen auch mit $\geq$.

Lemma : Falls K das Archimedische Axiom erfüllt, dann

$$\left(\begin{array}{l} \forall a, b > 0 \\ a, b \in K \end{array} \quad \exists n \in \mathbb{N} : na > b \right)$$

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{\frac{1}{n}} < \varepsilon$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \varepsilon^{-1} > 0 \quad (\text{Lemma 2.1.3. 9.})$$

$$AA : \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \underbrace{1}_a > \underbrace{\varepsilon^{-1}}_b$$

$$n > \varepsilon^{-1} \Rightarrow \frac{1}{n} < (\varepsilon^{-1})^{-1} = \varepsilon$$

Lemma 2.1.3.10 $\left(\begin{array}{l} a > b > 0 \\ b^{-1} > a^{-1} \end{array} \right)$

2. $a, b \in K, a > 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : a^n > b$

$x := a - 1 \quad a > 1 \Rightarrow x > 0$ (Lemma 2.1.3. 2.)

$\xrightarrow{AA} \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{n(a-1)}_x > b$

$a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > 1 + b > b$
Bernoulli'sche Ungleichung

$nx > b \leadsto 1 + nx > 1 + b$

3. $\varepsilon, a \in K, 0 < a < 1$ und $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\exists n \in \mathbb{N} : a^n < \varepsilon$

$a < 1 \Rightarrow a^{-1} < 1^{-1} = 1$

Lemma 2.1.3

10.

2. $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : (a^{-1})^n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\xrightarrow{\quad} ((a^{-1})^n)^{-1} < \varepsilon$
|| (Übung)
 a^n



Der Absolutbetrag oder Betragsfunktion

$$a \in K$$

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

(Bmk : $a < 0 \Rightarrow -a > 0$ (Lemma 2.1.3. 1.)
Also

$$|\cdot| : K \longrightarrow K_{\geq 0}$$

$$K_{\geq} = \{x \in K \mid x \geq 0\}$$

$$K_{>}, \quad K_{<}, \quad K_{\leq}$$

Lemma : $\forall a, b \in K$ gilt :

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left[\begin{array}{l} a > 0 \quad b < 0 \Rightarrow \\ a \cdot b < 0 \end{array} \right] \quad b < 0 \Leftrightarrow -b > 0 \quad \begin{array}{l} \text{2.1.3} \\ \text{(Lemma)} \\ \text{L} \end{array}$$

$$\text{L} \Rightarrow (a > 0, (-b) > 0 \Rightarrow a \cdot (-b) > 0)$$

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -a \cdot b \quad (\text{Lemma 2.1.2. 2.})$$

$$\begin{aligned} -a \cdot b > 0 &\Leftrightarrow -(-a \cdot b) < 0 \\ &\Leftrightarrow a \cdot b < 0 \end{aligned}$$

$$|a \cdot b| = -a \cdot b$$

$$|a| = a$$

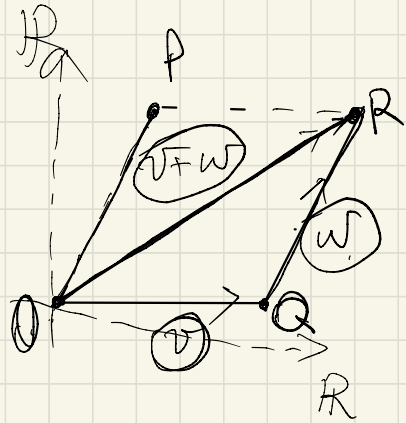
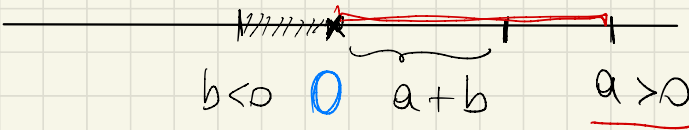
$$|b| = -b$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ -a \cdot b &= a \cdot (-b) \end{aligned}$$

2. Dreiecksungleichung :

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

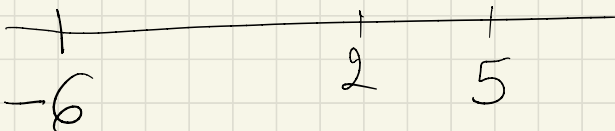


Beweis (Übung) :

$$(1) |a| = |-a| \quad \forall a \in K$$

$$(2) \forall c, d \in K$$

$$(c \leq d \text{ und } -c \leq d) \Leftrightarrow |c| \leq d$$



$$\begin{aligned} -6 &\leq 5 \\ |6| &> |5| = 5 \end{aligned}$$

Zu beweisen: $|a+b| \leq |a|+|b|$

$$\begin{cases} a \leq |a| \\ b \leq |b| \end{cases}$$

$$-a \leq |-a| \stackrel{\text{Bwk 1}}{=} |a|$$

$$-b \leq |-b| = |b|$$

$\downarrow$ Lemma 2.1.3. 4. $\longrightarrow$ $\downarrow$

$$a+b \leq |a|+|b|$$

$$\begin{aligned} -a-b &\leq |a|+|b| \\ \uparrow \\ -(a+b) \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}$
Bwk 2

$$\underbrace{|a+b|}_c \leq \underbrace{(|a|+|b|)}_d$$



$$3. \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$(i) |a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

↓
Dreiecksungleichung
2.

$$b = b - a + a$$

$$(ii) |b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$$

$$(i) \Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

↳ (Lemma 2.1.3. 1)

$$(ii) \Leftrightarrow |b| - |a| \leq |a - b|$$

$$= -(|a| - |b|)$$

Buk 2. $\Rightarrow ||a| - |b|| \leq |a - b|$



Ordnungsvollständigkeit

Lemma 2.1.7: $\nexists x \in \mathbb{Q} : \underline{x^2 = 2}$

($x+a=b$)

Beweis

Widerspruchsbeweis: Angenommen, dass

$x \in \mathbb{Q}$ existiert, sodass $x^2 = 2$.

$$x \in \mathbb{Q} \iff x = \left[\left(\frac{p}{q} \right) \right] \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\left(\left[\left(\frac{p}{q} \right) \right] = \left[\left(\frac{p'}{q'} \right) \right] \iff \underbrace{pq' = q'p'}_{\left(\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \right)} \right) \star$$
$$x^2 = 2 \iff \left[\left(\frac{p}{q} \right) \right]^2 = 2 = \left[(2, 1) \right]$$

$$\parallel$$
$$\left[\left(p^2, q^2 \right) \right] \quad \left(\begin{array}{l} n \mapsto \left[(n, 1) \right] \\ n > 0 \end{array} \quad n = \frac{n}{1} \right)$$

$$[(p^2, q^2)] = [(2, 1)] \quad , \text{ d.h. } (*)$$

$$p^2 = 2q^2$$

Wir können annehmen, dass p & q teilerfremd sind; weil wenn sie nicht teilerfremd wären, d.h. $p = n \cdot p'$
 $q = n \cdot q'$ $n \in \mathbb{Z}$
 $n \neq \pm 1$

Könnten wir p', q' nehmen, d.h.

$$[(p, q)] = [(p', q')]$$

Teilerfremd

$$x^2 = 3$$

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ ist gerade}$$

Behauptung, p^2 gerade $\Rightarrow$ p gerade
Beweis $\underbrace{\quad}_P \quad \underbrace{\quad}_Q$

$$p \text{ nicht gerade} \rightarrow p = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$$

$$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \text{ ungerade}$$

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ gerade} \Rightarrow p \text{ gerade}$$

$\downarrow$
Behauptung

$$\leadsto \exists k \in \mathbb{Z} : p = 2k$$

$$4k^2 = p^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

$$q^2 \text{ gerade} \Rightarrow q \text{ gerade}$$

Behauptung

Widerspruch! Weil wir angenommen haben, dass p & q teilerfremd sind



X Menge, $\leq$ Ordnung $\leq$

$\rightarrow S \subseteq X$ (mit induzierter Ordnung)

(Abschnitt 1.2.2)

$x \in X$ obere Schranke von S

$$y \leq x, \forall y \in S$$

$x \in X$ untere Schranke von S

$$x \leq y, \forall y \in S$$

⊗ x Maximum für S , falls

x obere Schranke und $x \in S$

x Minimum für S , falls

x untere Schranke und $x \in S$

Beispiele

$$X = \mathbb{Q}$$

$$\begin{array}{r} \frac{y+2}{2} \\ \hline y \quad 2 \end{array}$$

$$S_1 := \{x \in \mathbb{Q} : x < 2\} \quad y < \frac{y+2}{2} < 2$$

Falls $y < 2$, dann wäre y keine obere Schranke

$$\mathcal{O}_{S_1} = [2, +\infty)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 2\}$$

$$\mathcal{O}_{S_1} = [2, +\infty)_{\mathbb{Q}}$$

Menge der oberen Schranken = $\mathcal{O}_{S_1}$

$$S_2 := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 2\}$$

Menge der oberen Schranken

$$\mathcal{O}_{S_2} = [2, +\infty)_{\mathbb{Q}}$$

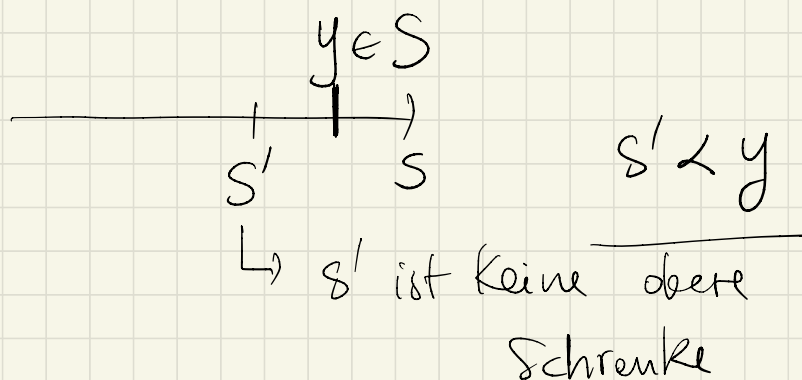
Definition 2.1.4

Es sei $S \subseteq X$ eine nicht leere Menge, und $\preceq$ eine Ordnung auf X . Ein Element $s \in X$ (wenn existiert) heißt **Supremum** von S , geschrieben $s = \sup S$, falls es das kleinste der oberen Schranken ist, d.h., falls

- (i) $y \preceq s$ für alle $y \in S$ (s ist eine obere Schranke);
- (ii) Falls $s' \prec s$, dann ist s' keine obere Schranke (s ist das kleinste der oberen Schranken).

Mit anderen Worten: Für alle $s' \prec s$, es existiert $y \in S$, mit $s' \prec y$ (s' ist keine obere Schranke).

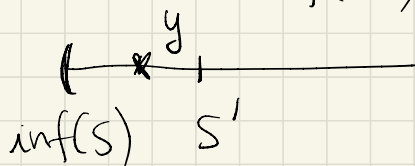
Ganz analog, ein **Infimum** von S , geschrieben $s = \inf S$, ist (wenn existiert) die größte untere Schranke von S .



Infimum: $\inf(S)$

$$(*) \quad \inf(S) \preceq y, \forall y \in S$$

$$(*) \quad \forall s' > \inf(S) \Rightarrow s' \text{ keine untere Schranke}$$



$$\Leftrightarrow \exists y \in S : y < s'$$

Beispiele

$$(a, b)_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\} \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

$$[a, b]_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \leq b\} \quad a < b$$

$$\sup((a, b)_{\mathbb{Q}}) = b \quad (\text{Übung})$$

$$\text{weil } \mathcal{O}_{(a, b)_{\mathbb{Q}}} = \underline{\underline{[b, +\infty)}}$$

$$\inf((a, b)_{\mathbb{Q}}) = a \quad (\text{Übung})$$

(Menge der unteren Schranken ist)
 $\underline{\underline{(-\infty, a]}}$)

$(a, b)_{\mathbb{Q}}$ besitzt kein Maximum und kein Minimum

$[a, b]_{\mathbb{Q}}$ besitzt ein Supremum (b) und ein Maximum (b)

Es gab
einen Fehler: ich
hatte "Infimum" geschrieben!

Übungen :

- Falls $s \in S$ ein Maximum (bzw. Minimum)
 $\Rightarrow s = \sup(S)$ (bzw. Infimum)

- Das Supremum (bzw. Infimum) ist eindeutig bestimmt

- $A, B \neq \emptyset$ $A \subseteq B$ $\Rightarrow$

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

Falls $\sup(A), \inf(A), \sup(B), \inf(B)$
existieren...

Folgerung Lemma 2.1.7 ($\nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$)

Lemma 2.1.8 : Die Teilmenge

$S := \{x \in \mathbb{Q} : \underline{x^2 < 2}\} \subsetneq \mathbb{Q}$
besitzt kein Supremum

Bwk : Aus Def $\text{Sup}(S)$, $S \subseteq X$,
sollte $\text{Sup}(S) \in X$

Beweis : Widerspruchsbeweis :

Nehmen wir an, dass $\exists \text{Sup}(S) =: s$
Per Definitionen muss $s \in \mathbb{Q}$

3 Fälle :

1) $s^2 = 2$ 2) $s^2 > 2$ 3) $s^2 < 2$

1) ist nicht möglich, weil Lemma 2.1.7
 $\Rightarrow \nexists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$

$$2) \boxed{s^2 > 2}$$

wir möchten beweisen, dass in diesem Fall,

$\exists \varepsilon > 0$ geben würde: $\varepsilon \in \mathbb{Q}$

$$(i) \quad s - \varepsilon < s \quad \checkmark$$

$$(ii) \quad \underbrace{2 < (s - \varepsilon)^2}_{\Downarrow \text{ * Lemma 2.1.3.}}$$

$\Downarrow$ * Lemma 2.1.3.

$$s^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon s > 2$$



$$\varepsilon \underbrace{(2s - \varepsilon)}_{> 0} < s^2 - 2$$

* ε wählen: $\varepsilon < 2s$

$$\varepsilon(2s - \varepsilon) < s^2 - 2 \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{s^2 - 2}{2s - \varepsilon}$$

$$\underline{\varepsilon < 1} \Leftrightarrow -\varepsilon > -1 \Leftrightarrow 2s - \varepsilon > 2s - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{s^2 - 2}{2s - \varepsilon} < \frac{s^2 - 2}{2s - 1}$$

Fall $s \quad \varepsilon < 1$ und $\varepsilon < 2s \Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon < \min\{1, 2s\}}}$

Übung: Beweisen Sie, dass $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$
sodass

$$\varepsilon < \min\{1, 2s\} \quad \text{und}$$

$$\varepsilon < \frac{s^2 - 2}{2s - 1}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \quad & s - \varepsilon < s \\ & 2 < (s - \varepsilon)^2 < s^2 \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow (s - \varepsilon < s \Rightarrow (\quad)^2 < (\quad))$$

$\hookrightarrow$ geben einen Widerspruch

$s = \sup(S) \Rightarrow s - \varepsilon$ keine obere Schranke

$$\Rightarrow \exists \underbrace{x \in S}_{\downarrow} : x > s - \varepsilon$$

$$\Rightarrow x^2 > \underbrace{(s - \varepsilon)^2}_{> 2}$$

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

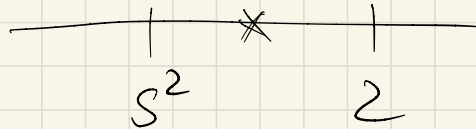
Widerspruch

$$3) \quad \underbrace{s^2 < 2}$$

Behauptung (Übung):

$\exists \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$, sodass

$$s^2 < \underbrace{(s+\varepsilon)^2} < 2$$



$$(s+\varepsilon)^2 < 2 \Rightarrow s+\varepsilon \in S$$

aber $s+\varepsilon > s = \sup(S)$

$\leadsto$ Widerspruch!



Definition 2.1.5 • Es sei X eine nichtleere Menge mit Ordnung $\preceq$. Dann ist die Ordnung **ordnungsvollständig**, falls *jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum hat*. Diese Eigenschaft wird als **Supremumseigenschaft** bekannt.

- Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, \preceq)$ heißt **ordnungsvollständig**, falls die Ordnung $\preceq$ ordnungsvollständig ist.

Lemma 2.1.8 $\Rightarrow$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ ist kein
ordnungsvollständiger Körper
 $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$
besitzt kein Supremum!

Satz 2.1.9

Es gibt einen ordnungsvollständigen angeordneten Körper, der bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt ist.

"Bis auf Isomorphismen ..."

$$(K_1, +_1, \cdot_1, \leq_1) \quad (K_2, +_2, \cdot_2, \leq_2)$$

• Eine Bijektion $f: K_1 \rightarrow K_2$

$$g, h \in K_1 \longrightarrow f(g) +_2 f(h)$$

$$\begin{array}{ccc} g, h \in K_1 & \xrightarrow{+_1} & f(g) +_2 f(h) \\ \downarrow f & & \\ g +_1 h & \rightsquigarrow & f(g +_1 h) \end{array}$$

$$f(g +_1 h) = f(g) +_2 f(h) \quad *$$

$$f(g \cdot_1 h) = f(g) \cdot_2 f(h) \quad *$$

Ordnung $\forall a \leq_1 b, a, b \in K_1$

$$\Rightarrow f(a) \leq_2 f(b) \quad *$$