Ana I Klausur

UNIVERSITÄT ZU KÖLN
MATHEMATISCHES INSTITUT

WS 2010/2011
ANALYSIS I

KLAUSUR AM 5. FEBRUAR 2011

Prof. Dr. Stefan Friedl, Dr. Raphael Zentner

Hinweis: Sie können alle Sätze und Beispiele aus der Vorlesung verwenden.

TEIL 1: KURZAUFGABEN

Beantworten Sie folgende Fragen. Wenn nicht anders angegeben, müssen Sie Ihre Antworten nicht begründen.

(1) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\alpha^n}?$$

(2) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(3) Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen, welche bestimmt gegen $+\infty$ divergieren. Divergiert dann auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ bestimmt gegen $+\infty$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(4) Bestimmen Sie $\lim_{x\searrow 0} x^x$.

(5) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Was ist die Definition von

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty?$$

(6) Formulieren Sie den Satz von Rolle.

(7) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x+5e^x$ besitzt eine Umkehrabbildung welche wir mit g bezeichnen. Was ist $g'(5)$?

(8) Nennen Sie ein Beispiel einer Funktion $g : (2,4) \to \mathbb{R}$, welche differenzierbar ist, aber welche nicht stetig differenzierbar ist.

(9) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\sin(x)^2 + \ln(x)^2 + \cos(x)^2 + \pi^2.$$

(10) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{1+2\cdot x^2} + \frac{1}{1-2\cdot x^2}.$$

TEIL 2: BEWEISAUFGABEN

Bearbeiten Sie folgende Aufgaben. Beachten Sie, dass Sie jeden Beweisschritt begründen müssen.

Aufgabe 1. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, nur mithilfe der Definitionen, dass $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen, so dass $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ existiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \cos(1/x), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

im Punkt $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

Aufgabe 4. Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Nehmen wir an, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass $|f'(x)| < C$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz stetig ist.

Aufgabe 5. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f(x) \in [a,b]$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie, dass es ein $c \in [a,b]$ gibt, so dass $f(c) = c$.