

Vorlesung 7

2.3.2.: Potenzen und (Quadrat)wurzeln

2.4.: Mächtigkeit und Abzählbarkeit

3.1.: Der Körper der komplexen

Zahlen $\mathbb{C}$

(bis zum Satz 3.1.1.)



Vom letzten Mal...

Def: Die Quadratwurzel von $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

ist
 $s := \sup \{ x \in \mathbb{R} : x^2 < a \}$ ~~(*)~~

Bemk: $\sup \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \}$
existiert nicht

$$(*) \quad s = \sup \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \}$$

(*) $s^2 = 2$ nicht möglich, weil ~~$\exists s : s^2 = 2$~~

$\left[\begin{array}{l} (*) \quad s^2 < 2 \\ (**) \quad s^2 > 2 \end{array} \right\} \text{ sie widersprechen } \left. \begin{array}{l} \\ s \text{ Sup ist} \end{array} \right]$

$$\underline{s} := \sup \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \}$$

$$\underline{s^2 = 2}$$

$$\boxed{\sqrt{2} := s}$$

Bemk: Es kann bewiesen werden, dass ~~(*)~~
 $\boxed{s^2 = a}$

Analog:

n -te Wurzel von a , $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\{x \in \mathbb{R} : x^n < a\} \subseteq \mathbb{R}$$

Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$\underline{S} := \sup \{x \in \mathbb{R} : x^n < a\}$$

Bwk: S erfüllt $S^n = a$

Def.: S ist die n -te Wurzel von a , und
wird durch

$$\sqrt[n]{a} = (a)^{\frac{1}{n}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$n=0$: $a^0 := 1$

$$\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

(*) Wir haben a^n definiert, $n \in \mathbb{N}$

$$n > 0 \quad a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Mal}}$$

$$a^0 := 1$$

(*) Wir haben $a^{\frac{1}{n}}$ definiert, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
 $\forall a \geq 0$

$$\leadsto \underbrace{a^r} : r \in \mathbb{Q} \quad \forall a \geq 0$$

$$r = \frac{p}{q} \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$1) \quad p > 0, \quad q > 0$$

$$a^{\frac{p}{q}} := \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

$$2) \quad r < 0 \quad r = -\frac{p}{q} \quad \text{wobei } \underline{p, q > 0}$$

2) Falls $r < 0$

$$r = -\frac{p}{q}$$

$$p, q > 0$$

$$\forall a > 0 \leadsto \exists a^{-1}$$

$$a^r := (a^{-1})^{\frac{p}{q}}$$

Bwk : Mit den vorherigen Definitionen:

$$* \underline{a^{r+s} = a^r \cdot a^s}$$

$$a > 0, a \in \mathbb{R} \\ r, s \in \mathbb{Q}$$

$$* \underline{a^{r \cdot s} = (a^r)^s}$$

$$* \underline{(a \cdot b)^r = (a^r) \cdot (b^r)}$$

$$a, b > 0 \\ a, b \in \mathbb{R}$$

2.4 Mächtigkeit und Abzählbarkeit

Mächtigkeit...

Falls X endliche Menge:

$$|X| = \# \text{ Elemente}$$

$$(X = \{a, b, c\}, |X| = 3)$$

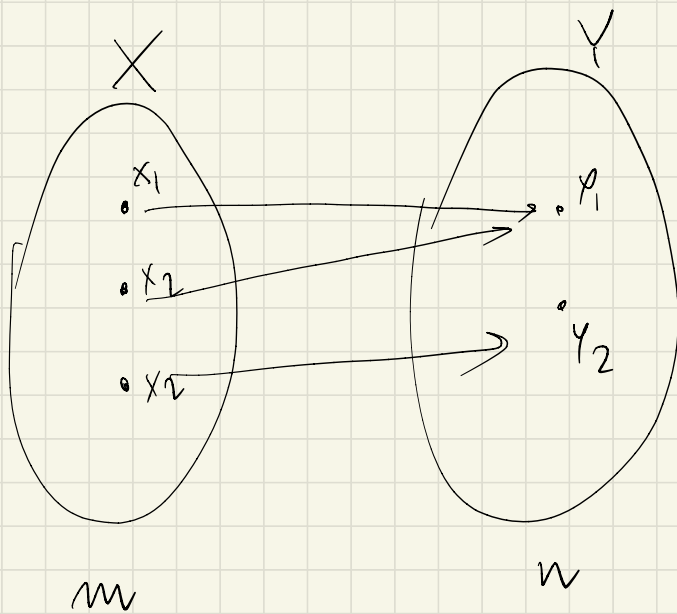
$$|X| = \infty$$

Es seien X, Y Mengen mit endlich vielen Elementen

$$|X| = n \quad |Y| = m$$

(*) Falls $f: X \rightarrow Y$ injektiv $\Rightarrow$

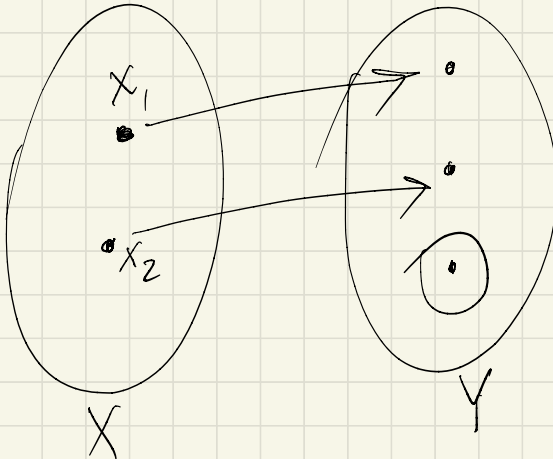
$$n \leq m$$



nicht
injektiv

* Existenz $f: X \rightarrow Y$ injektiv $\Rightarrow$
 $m \leq n$

* Existenz $f: X \rightarrow Y$ surjektiv $\Rightarrow m \geq n$



* Die Existenz einer bijektiven

Abbildung $f: X \rightarrow Y \Rightarrow$

$$|X| = |Y|$$

"
m

"
n

, $m, n \in \mathbb{N}$

* Falls $|X| = |Y| \Rightarrow \exists$ bijektive
Abbildung
 $f: X \rightarrow Y$

X, Y unendlich viele Elemente

$|X|$: (*) Familie der Mengen Y , sodass
 $\exists f: X \rightarrow Y$ bijektiv

(*) oder $X = \emptyset$

$$|X| = |\emptyset| = 0$$

Def: X und Y sind gleichmächtig,
falls

* entweder $X = Y = \emptyset$, oder

* $\exists f: X \rightarrow Y$ bijektive
Abbildung

Bwk Diskussion $\Rightarrow$

Falls X, Y endlich sind
dann haben X, Y dieselbe Anzahl
der Elemente $\iff$ sie
gleichmächtig sind

$|X|$

Abzählbarkeit...

Def.: X ist abzählbar falls:

i) entweder X endlich viele Elemente hat
oder

(ii) $|X| = |\mathbb{N}|$ ($\Leftrightarrow$
 $\exists f: \mathbb{N} \rightarrow X$ bijektiv)

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \text{ (Aleph Null)}$$

Beispiele: (*) $\mathbb{N}$

(*) " $2\mathbb{N}$ " = die Menge der geraden Zahlen

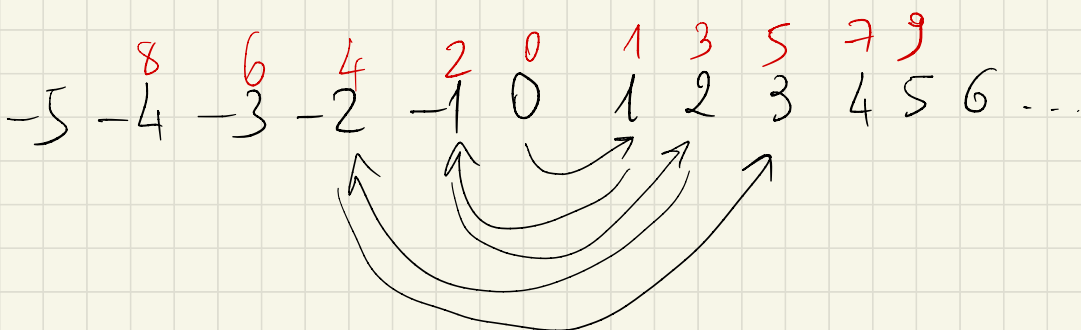
$$|2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n$$

$$2\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}$$

$$\left[\begin{array}{l} X : |X| = n \\ \forall Y \subsetneq X \quad |Y| = m < n \end{array} \right]$$

(*) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar :



(*) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar ✓

Satz : Es sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine
 2.4.1 abzählbare Familie von
 abzählbaren Mengen.

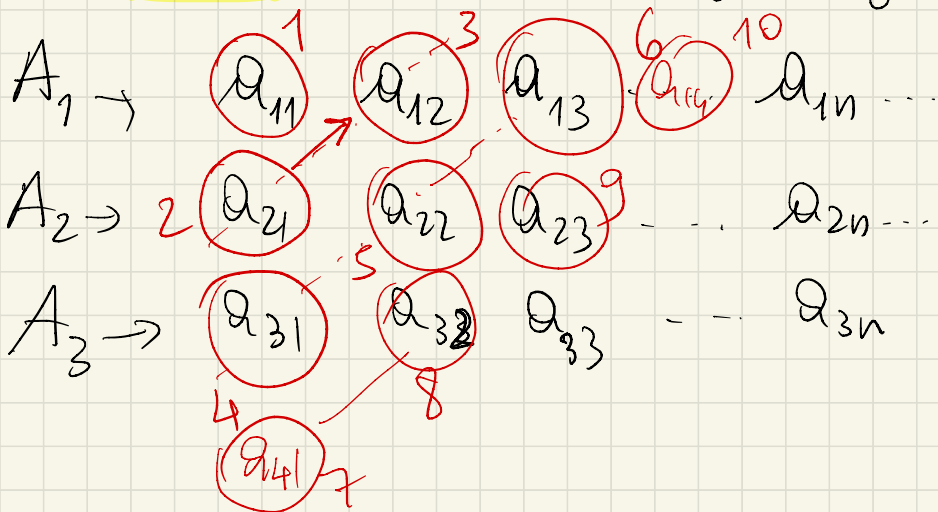
Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar

Beweis

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots\}$$

das erste Cantorsche Diagonalarargument:



□

Satz: Das Kartesische Produkt von
2.4.2 endlich vielen abzählbaren
Mengen ist abzählbar

Gegeben $A_1, \dots, A_n$ abzählbar $\Rightarrow$
 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ "
 $\forall n \in \mathbb{N}$

$P(n)$: " $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ist abzählbar"

$P(1)$: " A_i ist abzählbar" ($i = 1, \dots, n$)

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

Gegeben $A_1, \dots, A_n$, angenommen
($A_1 \times \dots \times A_n$)
abzählbar ist

warum ist $A_1 \times \dots \times A_n \times A_{n+1}$ abzählbar?

$$P(1) \stackrel{?}{\Rightarrow} P(2)$$

A, B Abzählbar

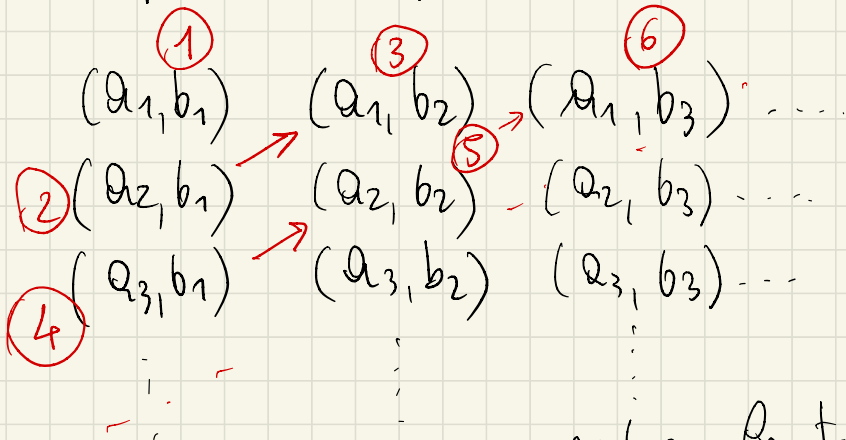
Warum ist $A \times B$ abzählbar?

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$$

$$A \times B = \{(a_i, b_j) \mid i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

(Übung : $\mathbb{N} \setminus A, A \subseteq \mathbb{N}, |A| < +\infty$
 $|\mathbb{N} \setminus A| = |\mathbb{N}|$)



$A \times B$

erstes Cantorsches
 Diagonalargument

Induktion:

$(A_1 \times \dots \times A_n)$ abzählbar ist
($P(n)$ wahr)

Zu beweisen

$\rightarrow A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n+1}$ abzählbar ist

$$\left[\underbrace{(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)}_{\substack{!! \\ A}} \times \underbrace{A_{n+1}}_{\substack{!! \\ B}} \right]$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

Erstes Cantorsches Diagonalargument

$\Rightarrow A \times B$ abzählbar ist



Korollar : Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen
2.4.3 Zahlen ist abzählbar

Beweis

I: Zu beweisen: $\mathbb{Q}_{>0}$ ist abzählbar

$$\frac{p}{q} \rightsquigarrow \underbrace{p > 0} \text{ und } \underbrace{q > 0} \quad \left[s^2 = 2 \right]$$

Dann nehmen wir an, dass
 p und q Teilerfremd sind
 $\hookrightarrow (\text{ggT}(p, q) = 1)$

$$\left. \begin{array}{l} \exists! (p, q) : p > 0, q > 0 \\ \text{ggT}(p, q) = 1 \end{array} \right\}$$
$$r = \frac{p}{q}$$

$\rightsquigarrow$ dann ist $\mathbb{Q}_{>0}$ eine Teilmenge
von $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$

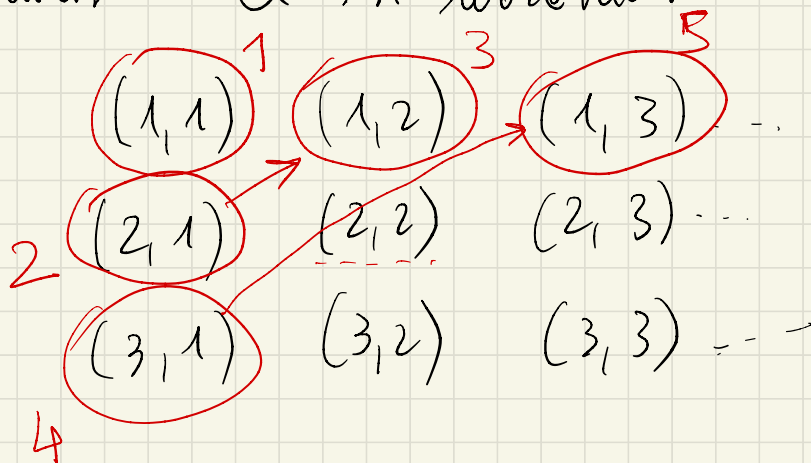
$\rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ als Teilmenge von $(\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ betrachtet werden kann

$\mathbb{N}$ abzählbar $\xrightarrow{\text{Übung}}$ $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ abzählbar

$\Rightarrow (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ abzählbar
Satz 2

$\mathbb{Q}_{>0}$ ist dann eine Teilmenge einer abzählbaren Menge

Zu beweisen: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar



$\rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ ist abzählbar

Sch hatte in der Vorlesung $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ vergessen! Aber... $\rightarrow \square$

→ Nehmen Sie jetzt

$$\mathbb{Q}_{\leq 0} \cup \mathbb{Q}_{> 0} = \mathbb{Q}$$

"

$$\mathbb{Q}_{< 0} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_{> 0}$$

Mit derselben Methode kann man
beweisen, dass $\mathbb{Q}_{< 0}$ abzählbar ist
(Schreiben Sie $r = -\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)
...

→ Dann ist $\mathbb{Q}$ die Vereinigung von
3 abzählbaren Mengen $\rightarrow \mathbb{Q}$ ist abzählbar



... Sind alle Mengen abzählbar? ...

Nein!

Satz : Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen
2.4.4. ist nicht abzählbar

$$\cancel{|\mathbb{R}| = \infty}$$

$$\cancel{|\mathbb{N}| = \infty}$$
$$\cancel{|\mathbb{R}| = \infty}$$

Beweis (Widerspruchsbeweis)

Wir nehmen ^{an} dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist.

$$\mathbb{R} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$a_1 = p_1 \cdot d_{11} d_{12} d_{13} d_{14} \dots$$

$$a_2 = p_2 \cdot d_{21} d_{22} d_{23} d_{24} \dots$$

$$a_3 = p_3 \cdot d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_1 = p_1 \cdot \overbrace{d_{11} d_{12} d_{13} d_{14} \dots}$$

$$a_2 = p_2 \cdot d_{21} d_{22} d_{23} d_{24} \dots$$

$$a_3 = p_3 \cdot d_{31} d_{32} d_{33} d_{34} \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$b = 1 \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots$$

Wir definieren β_i , sodass $\beta_i \neq d_{ii} \forall i \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow b \neq a_i \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\beta_i = \begin{cases} 3 & d_{ii} \in \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ 7 & d_{ii} \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

das zweite Cantorsche Diagonalargument

□

Zum Beispiel:

$$a_1 = 1. \underline{3}49871 \dots$$

$$a_2 = 1. 2\underline{1}3566 \dots$$

$$a_3 = 1. 99\underline{9}887 \dots$$

$$b = 1.773 \dots$$

$$b \neq a_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$$



Satz : Es sei X eine Menge. Dann ist

$$\underbrace{|X| < |\mathcal{P}(X)|}_{|X|=n}$$

Beweis: Übung

A, B

$$|A| < |B|$$

m

n

?

$$n < 2^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$m < n \iff \exists f$ injektive Abb.

$$f: A \rightarrow B$$

Es seien A, B nichtleere Mengen.

Dann ist

$$|A| \leq |B| : \iff \exists f: A \rightarrow B \text{ injektiv}$$

$$\underbrace{|A| < |B|}_{\text{"}} : \iff \exists f: A \rightarrow B \text{ injektiv,}$$

die nicht
bijektiv ist

$$|A| \leq |B| \text{ und } |A| \neq |B|$$

Kapitel 3: Komplexe Zahlen

Bwk: Falls $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper ist, besitzt die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0 \quad \dots$$

$$x^2 = -1$$

(Lemma 2.1.3. 8.-Übung)

$$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Addition:

$$(a, b) + (c, d) := (\underbrace{a+c}, \underbrace{b+d})$$

Addition in $\mathbb{R}$

Wir bemerken, dass

$$* (a, b) + (0, 0) = (a+0, b+0) = (a, b)$$

$$(0, 0) + (a, b) = (a, b)$$

$$* (a, b) + (-a, -b) = (a+(-a), b+(-b)) = (-a, -b) + (a, b) = (0, 0)$$

* $+$ ist assoziativ und kommutativ

Dann:

$(\mathbb{R}^2, +)$ ist eine kommutative Gruppe

Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$$

Warum nicht

$$(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c, b \cdot d) ?$$

$$* (a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$$

$$(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$* (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \cdot (a, b) = (1, 0)$$

$$(a, b) \neq (0, 0)$$

$$= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{a(-b)}{a^2 + b^2} + \frac{b \cdot a}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

Satz 3.1.1. Die Menge $\mathbb{R}^2$, mit der Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ die wir definiert haben, ist ein Körper

$(\mathbb{R}^2, +)$ Komm. Gruppe, $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$ Komm. Gruppe

• distributiv über der Addition ist

$$0_{\mathbb{C}} := (0, 0)$$

$$1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$$

$$-(a, b) := (-a, -b)$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

$$\forall (a, b) \neq (0, 0)$$