Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
15.5.2016

Topologie: Übungsblatt 5

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 26.5.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Suspension, oder Einhängung, von X ist der topologische Raum $(SX := X \times [0,1]/\sim, \mathcal{T}_\pi)$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X \times [0,1]$ definiert ist durch

$$(x,t) \sim (y,s) :\Longleftrightarrow (x,t) = (y,t) \quad \text{oder} \quad t = s = 0 \qquad \text{oder} \quad t = s = 1.$$

Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre mit der Teilraumtopologie. Zeigen Sie, dass SS^n und S^{n+1} homöomorph sind.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Diese Aufgabe zeigt, dass die Mannigfaltigkeitsstruktur von der Wahl der Topologie abhängt.

a) Definieren Sie eine Topologie $\mathcal{T}_0$ auf $\mathbb{R}^n$, sodass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_0)$ eine null-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

b) Sei $0 < k \leq n$. Definieren Sie eine Topologie $\mathcal{T}_k$ auf $\mathbb{R}^n$, sodass $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_k)$ eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3. (30 Punkte)

Seien M, N zwei n-dimensionale Mannigfaltigkeiten und $B_1 \subset M, B_2 \subset N$ n-dimensionale Kugeln, mit $\partial(M \setminus B_1) \cong S^{n-1}$ und $\partial(N \setminus B_2) \cong S^{n-1}$ und $h : \partial(M \setminus B_1) \to \partial(N \setminus B_2)$ ein Homöomorphismus. Wir definieren die verbundene Summe

$$M\#N := (M \setminus B_1 \cup N \setminus B_2)/\sim,$$

mit Quotiententopologie, wobei

$$x \sim y :\Longleftrightarrow \begin{array}{ll} x = y & \text{oder,} \\ y = h(x) \quad x \in M \setminus B_1 \quad \text{und} \quad y \in N \setminus B_2 & \text{oder,} \\ x = h(y) \quad x \in N \setminus B_2 \quad \text{und} \quad y \in M \setminus B_1. & \end{array}$$

Es kann gezeigt werden, dass $M\#N$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, und dass $M\#N$ nicht von der Wahl des (orientierungsumkehrende) Homöomorphismus abhängt wenn M und N zusamenhängend sind. Betrachten Sie Σ_g, die orientierbare Fläche vom Geschlecht g, definiert als der Quotientenraum von einem Vieleck mit $4g$ Seiten mit Identifikation

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}.$$

In den folgenden Aufgaben ist es erlaubt eine Skizze zu geben, und zu sagen, wie diese Skizze zu einem Beweis zu machen ist. Es ist hier *nicht* notwendig eine Formel zu geben für den Homöomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass $\Sigma_g \cong \underbrace{\Sigma_1 \# \dots \# \Sigma_1}_{g}$. *Hinweis : Beschreiben Sie erst den Fall mit $g = 2$.*

b) Zeigen Sie, dass $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ homöomorph ist zum Vieleck mit 2 Seiten, mit Identifikation

$$aa^{-1}.$$

c) In der Vorlesung ist $\mathbb{R}P^2$ definiert als der Quotientenraum $S^2/\sim$ mit

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x = \pm y$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ homöomorph ist zum Vieleck mit zwei Seiten mit Identifikation

$$aa$$

d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2 \setminus D \cong M$, wobei D eine Scheibe und M das Möbiusband ist.

Betrachten Sie die Kleinsche Flasche K, den Quotientraum von einem Rechteck mit Identifikation

$$aba^{-1}b.$$

e) Zeigen Sie, dass K homöomorph ist zu $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.