
Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 1

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 28.10.14, in den Briefkästen im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden.

Aufgabe 1. (10 Punkten)

Sei $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige differenzierbare parametrisierte Kurve und $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ein Diffeomorphismus. Schreiben Sie $v = u \circ \phi$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \|\dot{u}(t)\| dt = \int_0^1 \|\dot{v}(t)\| dt,$$

gilt.

Aufgabe 2. (20 Punkten)

Sei $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve gegeben durch

$$u(t) = (t, \cosh(t)).$$

Finden Sie eine Umparametrisierung $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dieser Kurve, sodass v nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Aufgabe 3. (20 Punkten)

Die Länge einer stetigen Kurve ist definiert durch

$$L(u) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^k \|u(t_j) - u(t_{j-1})\| \mid k \in \mathbb{N}, \quad t_0, \dots, t_k \in I \quad t_0 < t_1 < \dots < t_k \right\}.$$

Sei $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve

$$u(t) = \begin{cases} (t, t \sin(1/t)) & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Spur von u .

b) Ist es erlaubt die Formel

$$L(u) = \int_0^1 \|\dot{u}(t)\| dt$$

zu nutzen um die Länge von u zu berechnen? Erläutern Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie $L(u)$.

Hinweis : Was ist $u(\frac{1}{\pi k + \frac{\pi}{2}})$ für $k \in \mathbb{N}$?