

---

## Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 1

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 28.10.14, in den Briefkästen im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden.

### **Aufgabe 1. (10 Punkten)**

Sei  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige differenzierbare parametrisierte Kurve und  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ein Diffeomorphismus. Schreiben Sie  $v = u \circ \phi$ . Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \|u(t)\| dt = \int_0^1 \|v(t)\| dt,$$

gilt.

### **Aufgabe 2. (20 Punkten)**

Sei  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die parametrisierte Kurve gegeben durch

$$u(t) = (t, \cosh(t)).$$

Finden Sie eine Umparametrisierung  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dieser Kurve, sodass  $v$  nach Bogenlänge parametrisiert ist.

### **Aufgabe 3. (20 Punkten)**

Die Länge einer stetigen Kurve ist definiert durch

$$L(u) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^k \|u(t_j) - u(t_{j-1})\| \mid k \in \mathbb{N}, \quad t_0, \dots, t_k \in I \quad t_0 < t_1 < \dots < t_k \right\}.$$

Sei  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  die parametrisierte Kurve

$$u(t) = \begin{cases} (t, t \sin(1/t)) & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Spur von  $u$ .

b) Ist es erlaubt die Formel

$$L(u) = \int_0^1 \|\dot{u}(t)\| dt$$

zu nutzen um die Länge von  $u$  zu berechnen ? Erläutern Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie  $L(u)$ .

*Hinweis : Was ist  $u\left(\frac{1}{\pi k + \frac{\pi}{2}}\right)$  für  $k \in \mathbb{N}$  ?*