

Vorlesung 27



Notation : Es sei F eine Stammfunktion von f , dann schreiben wir

$$\int f(x) dx = F$$

↓
unbestimmte Integral von f

Funktion	Ableitung	Funktion	Stammfunktion
e^x	e^x	e^x	e^x
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\ln(-x), x < 0,$	$\frac{1}{x}$		

Lemma 9.3.5

Es seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \text{sowie}$$

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

9.3.1. Partielle Integration

Satz 9.3.6

(Partielle Integration)

Es seien $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare ^a Funktionen, also $u, v \in C^1(I; \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

^aZur Erinnerung, eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f differenzierbar ist, und wenn f' stetig ist.

$C^1(I, \mathbb{R})$

Beweis

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \quad \star$$

$$\underbrace{u(x) \cdot v'(x)} = \underbrace{(u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x)}$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \underbrace{\int (u(x) \cdot v(x))' dx}_{u(x) \cdot v(x)} - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad \square$$

Bwk : Wir haben den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt, um zu sagen, dass die Stammfunktionen von $u(x) \cdot v'(x)$ und $u'(x) \cdot v(x)$ existieren (weil sie, nach Voraussetzung, stetig sind)

Notation :

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' v dx$$

Beispiel

$$\int \log(x) dx = \int \underbrace{\log(x)}_u \cdot \underbrace{1}_{v'} dx =$$

$$= x \cdot \log(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx =$$

$$= \underline{x \log(x) - x}$$

9.3.2. Substitution

Lemma 9.3.7

Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f . Für alle $c, d \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int c \cdot f(cx + d) dx = F(cx + d).$$

Satz 9.3.8

Es sei $u: [a, b] \rightarrow I$ eine stetig differenzierbare Funktion und es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

Beweis

F Stammfunktion von f

- $\leadsto F$ differenz. und $F'(x) = f(x)$
 - u differenz.
- $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow F \circ u \\ \text{differenzierbar} \\ \text{(Kettenregel)} \end{array} \right\}$

$$\begin{aligned} (F \circ u)'(x) &= F'(u(x)) \cdot u'(x) = \\ &= f(u(x)) \cdot u'(x) \end{aligned}$$

$\rightarrow F(u(x))$ Stammfunktion von $f(u(x)) \cdot u'(x)$

Bmk : $\underbrace{f(u(x)) \cdot u'(x)}_{\text{stetig}}$

$\Rightarrow$ (Satz 9.3.4)

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(b)) - F(u(a)) =$$
$$= \underbrace{[F(u(x))]_{x=a}^{x=b}}_{\text{}} =$$

Notation : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =$

$$= \underbrace{[F(x)]_{x=a}^{x=b}}_{\text{}}$$

$$= [F(u)]_{u(a)}^{u(b)} \quad \xleftrightarrow[\text{Satz 9.3.4}]{\quad} \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

Unbestimmte Integrale :

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du$$

Lemma 9.3.9

Es ist

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

Beweis

Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int (1-x^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$u(x) := \arcsin(x)$$

$$u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x = \sin(\arcsin(x)) = \sin(u(x))$$

$$\int (1-x^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (1 - \sin^2(u(x))) \cdot u'(x) dx$$

$$= \int \underbrace{(1 - \sin^2(u))} du = \int \cos^2(u) du$$

9.4 Uneigentliche Integrale

Definition 9.4.1

Es sei $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass für jedes $a \leq d < b$ das Integral $\int_a^d f(x) dx$ existiert. Wir definieren dann

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{d \nearrow b} \int_a^d f(x) dx,$$

und nennen es das **uneigentliche Integral** auf $[a, b)$. Ganz analog definiert man das uneigentliche Integral auf einem halb-offenen Intervall $(a, b]$.

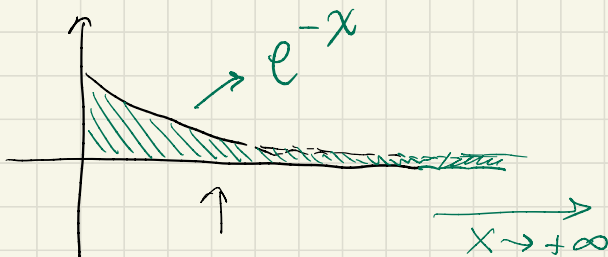
Beispiel :

$$\downarrow \\ a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[\int_0^d e^{-x} dx \right] =$$

$$= \lim_{d \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^d = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[-e^{-d} + 1 \right] =$$

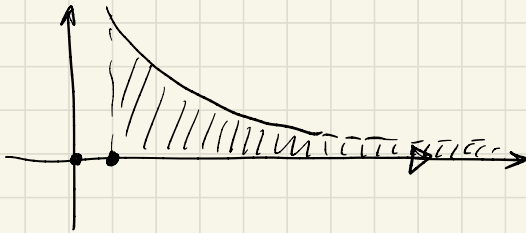
$$= \underline{\underline{1}}$$



Lemma 9.4.1

Für $s > 1$ gilt

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1}$$



$x \rightarrow 0^+$

Beweis

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx = \lim_{d \rightarrow +\infty} \left[\int_1^d \frac{1}{x^s} dx \right] \stackrel{\text{weil } s \neq 1}{=} \lim_{d \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^d =$$

$$= \lim_{d \rightarrow +\infty} \left[\frac{d^{1-s}}{-s+1} - \frac{1}{-s+1} \right] \stackrel{s > 1}{=} 0 + \frac{1}{s-1}$$



Definition 9.4.2

Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so dass für ein $c \in (a, b)$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ existieren oder bestimmt gegen $\pm\infty$ divergieren. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

wenn die rechte Seite definiert ist. Wir nennen dann $\int_a^b f(x)dx$ das **uneigentliche Integral von f auf (a, b)** .

Übung: diese Definition hängt nicht von der Wahl von $c \in (a, b)$ ab

Satz 9.4.2

Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \nearrow b} F(x) - \lim_{x \searrow a} F(x),$$

wenn die rechte Seite definiert ist.

Beweis (Übung: Folgt aus Satz 9.3.4 und aus der Definition des uneigentlichen Integrals)

Beispiel

Satz 9.4.2

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx}_{\text{Satz 9.4.2}} \quad \Downarrow \quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x)}_{\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(x)}_{-\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{\pi} = \pi$$

9.4.1. Reihen und uneigentliche Integrale

Satz 9.4.3

Es sei $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert.}$$

(ohne Beweis)

Beispiel

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konvergiert f\"ur alle } s > 1$$

$$\left(\text{Satz 9.4.3. } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} < +\infty \iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx < +\infty \right)$$

und $\underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx}_{\text{konvergiert } \forall s > 1}$

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

weil

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{d \rightarrow +\infty} [\log(x)]_1^d = \lim_{d \rightarrow +\infty} \log(d) = \underline{\underline{+\infty}}$$