~~Ab~~ Redziegel Ana I WS 00/01

KG 3-13-1

1. Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion

$$f := \frac{2-x^2}{x^2+x-2}$$

an, und bestimmen Sie die Intervalle, wo f negativ ist. **(4 Punkte)**

2. **(a)** Für welche reellen Zahlen t gilt $|t-1|\cdot|t-2| \leq \frac{3}{4}$? **(4 Punkte)**

(b) Skizzieren Sie die Teilmenge $\{\,(t,s)\in\mathbb{R}^2 \mid t^2+s^2\geq 1, |t|\leq s\,\}$ von $\mathbb{R}^2$. **(2 Punkte)**

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n\in\mathbb{N}$

(a) $\sum\limits_{k=n}^{2n} k \;=\; 3\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} k$ **(4 Punkte)**

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 \;=\; \big(\sum\limits_{k=1}^{n} k\big)^2$ **(5 Punkte)**

gilt.

4. Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Mengen:

(a) $M_1 := \{\,(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\,|\,n\in\mathbb{N}\,\}$ **(3 Punkte)**

(b) $M_2 := \{\,t\in\mathbb{R}\,|\,3t^2-2t-5<0\,\}$. **(4 Punkte)**

In welchen Fällen liegt ein Maximum bzw. Minimum vor.

5. Es seien M eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}_+$ und $aM := \{\,at\,|\,t\in M\,\}$. Beweisen Sie

$$\sup(aM) \;=\; a\cdot\sup(M)$$

und modifizieren Sie (ohne Beweis) die Behauptung für beliebiges $a\in\mathbb{R}$. **(4 Punkte)**

6. Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie den jeweiligen Grenzwert bzw. im Falle, dass keine Konvergenz vorliegt, Limes superior und Limes inferior:

(a) $a_n := \sqrt{n}(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})$ **(2 Punkte)**

(b) $a_n := 2^n(1+(-1)^n)+1$ **(4 Punkte)**

7. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$. Wir setzen $a_0 := a$ und $b_0 := b$ und definieren rekursiv

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \; : \; a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \quad \text{und} \quad b_{n+1} := \frac{2a_{n+1}b_n}{a_{n+1}+b_n} \, .$$

Zeigen Sie, dass die so definierten Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. **(8 Punkte)**

[Tipp: (1) Man zeige $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

(2) ohne Beweis darf benutzt werden: $\forall c, d \in \mathbb{R}_+ : (c+d)/2 \geq \sqrt{cd}$.]

8. Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen Sie: Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv. **(3 Punkte)**

9. Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{, falls } t \text{ rational} \\ 1-t & \text{, falls } t \text{ irrational .} \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) f ist bijektiv. **(1 Punkt)**

(b) f ist auf keinem Teilintervall $[a,b] \subset [0,1]$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ monoton. **(3 Punkte)**

(c) f ist nur im Punkt $1/2$ stetig. **(4 Punkte)**

10. Untersuchen Sie die Funktionen

$$f \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; t \mapsto \begin{cases} \cos(1/t) & \text{, falls } t \neq 0 \\ 1 & \text{, falls } t = 0 \end{cases}$$

sowie $x \cdot f$ auf Stetigkeit. (Der qualitative Verlauf der Cosinus-Funktion wird als bekannt vorausgesetzt.) **(8 Punkte)**

11. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und auf absolute Konvergenz in $\mathbb{R}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ **(2 Punkte)**

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k\, k}{(k+1)(k-1)}$ **(3 Punkte)**

Beweisen Sie:

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{11}{18}$ **(3 Punkte)**

12. Es seien E ein metrischer Raum und $f, g : E \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass die Menge $\{\, p \in E \,|\, f(p) < g(p) \,\}$ offen in E und dass die Menge $\{\, p \in E \,|\, f(p) \leq g(p) \,\}$ abgeschlossen in E ist. **(6 Punkte)**

13. Es sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, dass dann ein $t_0 \in [0,2]$ existiert mit $f(t_0) = f(t_0 + 1)$. **(4 Punkte)**

14. Geben Sie einerseits das maximale Intervall I an, so dass die Funktionenfolge $\big(x^n|I\big)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, und andererseits alle abgeschlossenen Intervalle J, so dass $\big(x^n|J\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert. **(9 Punkte)**

15. **(a)** Seien $\mathbb{E}, \mathbb{E}'$ normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $A : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ eine lineare Abbildung mit

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}_+ : A\big(U_\delta(0)\big) \subset U_1(0) \quad .$$

Zeigen Sie:

(i) A ist stetig in 0,

(ii) $\|A\| \leq 1/\delta$ und

(iii) $\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$. **(5 Punkte)**

Bemerkung. Ein Verweis auf Aufgabe 2 in 5.3 zählt nicht als Lösung!

(b) Zeigen Sie: Sind $\mathbb{E}$ ein Banachraum und $A : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine stetige lineare Abbildung mit $\|A - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}\| < 1$, so ist die lineare Gleichung $Av = b$ für jedes $b \in \mathbb{E}$ eindeutig lösbar.
[Tipp: $f := -A + \mathrm{id}_{\mathbb{E}} + b$ ist (?) eine kontrahierende Abbildung.] **(5 Punkte)**