K63-29-1

Prof. Dr. Matthias Lesch
Mathematisches Institut
Universität zu Köln

Wintersemester 2001/02
Analysis I

Nachklausur Analysis I

09.04.2002

Aufgabe 1. Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Jeder, der es möchte, kann Chinesisch lernen.

(ii) Immer wenn du abends spät ins Bett gehst, bist du am nächsten Morgen müde.

Aufgabe 2. Es seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.

(ii) Aus der Surjektivität von $g \circ f$ folgt nicht notwendigerweise die Surjektivität von f.

Aufgabe 3. Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n.$$

Aufgabe 4. Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichungen:

(i) $e^{2z} = i$,

(ii) $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$.

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(i) $\left(\frac{1}{n}\sqrt{\frac{27n^3+2}{3n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

(ii) $[(2^n\sqrt{n} + 24\pi)/(3^{\sqrt{n}})]_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 6. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{3n^2+7}$.

Aufgabe 7. Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Zeigen Sie:

Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a_n$ konvergiert absolut und es gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} a_n \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$1 - x = \sin x$$

eine Lösung $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ besitzt.

Aufgabe 9. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie: Wenn (x_n) keine Cauchyfolge ist, so hat (x_n) mindestens zwei Häufungspunkte.
Hinweis: Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 10. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, oder kompakt in $\mathbb{R}^2$ sind (mehrere Antworten sind möglich):

(i) $\bigcup\limits_{x \in [0,1]} (-1, x) \times (x, 2)$,

(ii) $\{(x^2, y^2) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| \leq 1\}$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) > 0$ für $x \in [0, 1)$. Zeigen Sie:
Entweder gilt

$$f(1) = 0$$

oder

es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in [0, 1]$ gilt: $f(x) > \varepsilon$.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - e^{-x}}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 13. Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, dass f außerhalb von $(0, 0)$ stetig ist.

(ii) Ist f in $(0, 0)$ stetig? (Mit Begründung).