Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
2.7.2018

Topologie: Übungsblatt 12

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 9.7.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Es seien X ein zusammenhängender Raum und $\phi : \partial D^2 = S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definieren Sie $Y = X \cup_\phi D^2$. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/N,$$

wobei $N := \langle [\phi] \rangle$ die normale Untergruppe von $\pi_1(X)$ ist, die durch die Homotopieklasse der Kurve ϕ erzeugt ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Es seien X ein zusamenhängender zweidimensionaler CW-Komplex, und $\phi : \partial D^n \to X$ eine stetige Abbildung. Es sei Y der CW-Komplex definiert durch $Y = X \cup_\phi D^n$. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X), \qquad \text{wenn} \qquad n \geq 3.$$

Aufgabe 1 und 2 zeigen, dass die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes berechnet werden kann, auch wenn man nur das 2-Skelett kennt. Hier haben wir dies nur für endliche Komplexen bewiesen, aber der Beweis im allgemeinen Fall ist nicht viel komplizierter.

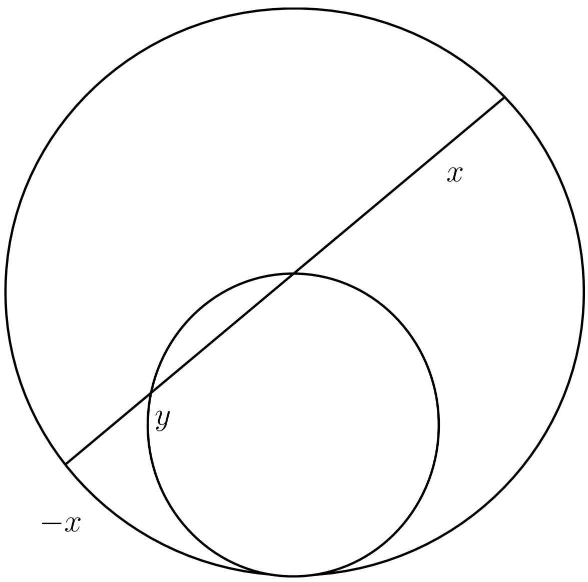
Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

a) Siehen Sie Figur 1, und zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^1$ homöomorph zu S^1 ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{CP}^1$ homöomorph zu S^2 ist.
Hinweis : Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung

$$F : \mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$$
$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2}, \frac{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2}{i(z_1\bar{z}_1 + \bar{z}_2 z_2)}, \frac{z_1\bar{z}_1 - \bar{z}_2 z_2}{z_1\bar{z}_1 + \bar{z}_2 z_2} \right)$$

ein Homomorphismus zwischen $\mathbb{CP}^1$ und S^2 induziert.



Figur 1 – *Hinweis :* Berachten Sie das innere Kreis als S^1, und das äußere Kreis als $\mathbb{RP}^1$. Das Punkt $y \in S^1$ wird eindeutig durch das Punkt $[\pm x] \in \mathbb{RP}^1$ definiert. Finden Sie einen Formel für diese Abbildung.

Aufgabe 4. (10+10 Punkte)

a) Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{RP}^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{CP}^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   Hinweis : Benutzen Sie Aufgabe 2 und Aufgabe 3.