KAPITEL 5

LINEARE ABBILDUNGEN

5.1 Lineare Abbildungen: Definition und Eigenschaften

In diesem Abschnitt führen wir Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen ein, die verträglich mit der Struktur des Vektorraums sind.

Definition 5.1.1
Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine Abbildung $F\colon V \to W$ heißt *linear* (oder ist ein *Homomorphismus*), falls

$$F(v+v') = F(v) + F(v') \quad \text{für alle } \; v, v' \in V, \quad \text{und} \tag{5.1.1}$$

$$F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \text{für alle } \; v \in V \; \text{ und } \; \lambda \in \mathbb{K}\,. \tag{5.1.2}$$

Äquivalent gesagt, eine Abbildung $F\colon V \to W$ ist linear, falls für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ gilt

$$F(\lambda v + \lambda' v') = \lambda F(v) + \lambda' F(v')\,. \tag{5.1.3}$$

Die Äquivalenz ist leicht zu beweisen: Bedingungen (5.1.1) und (5.1.2) implizieren (5.1.3), weil

$$F(\lambda v + \lambda' v') \overset{(5.1.1)}{=} F(\lambda v) + F(\lambda' v') \overset{(5.1.2)}{=} \lambda F(v) + \lambda' F(v')\,.$$

Umgekehrt, (5.1.3) impliziert (5.1.1) (man kann $\lambda = \lambda' = 1$ nehmen), und (5.1.2) (man kann $\lambda' = 0$ nehmen).

Gleichung (5.1.3) kann generalisiert werden: Es seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, dann

$$F\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F(v_i)\,. \tag{5.1.4}$$

Bemerkung 5.1.1

1. Bemerken Sie, dass (5.1.2) impliziert, dass

$$F(\mathbf{0}_V) = F(0 \cdot v) = 0 \cdot F(v) = \mathbf{0}_W \quad \text{und}$$

$$F(-v) = F((-1) \cdot v) = (-1)F(v) = -F(v)\,.$$

2. Es seien $F\colon V \to W$ und $G\colon W \to U$ lineare Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Dann $G \circ F\colon V \to U$ ist auch linear, weil für alle $v, v' \in V$ und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ gilt

$$G(F(\lambda v + \lambda' v')) = G(\lambda F(v) + \lambda' F(v')) = \lambda G(F(v)) + \lambda' G(F(v'))\,.$$

Definition 5.1.2
Mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge aller Homomorphismen zwischen V und W. Wir nennen $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ einen

(a) *Monomorphismus*, wenn F injektiv ist;

(b) *Epimorphismus*, wenn F surjektiv ist;

(c) *Isomorphismus*, wenn F bijektiv ist;

(d) *Endomorphismus*, wenn $V = W$;

(e) *Automorphismus*, wenn $V = W$ und φ bijektiv ist.

Die Menge aller Endomorphismen von V (bzw. Automorphismen von V) wird durch $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ (bzw. durch $GL_{\mathbb{K}}(V)$) bezeichnet.

Proposition 5.1.1
Es sei $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ ein Isomorphismus. Dann ist auch die Umkehrabbildung $F^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus.

Beweis. Die Umkehrabbildung F^{-1} ist natürlich bijektiv. Also sollen wir nur beweisen, dass F^{-1} linear ist. Es seien w, w' beliebige Elemente in W, und v, v' Elemente in V, sodass $v = F^{-1}(w)$ und $v' = F^{-1}(w')$. Also erhalten wir, dass $F(v) = F(F^{-1}(w)) = w$ und ähnlich $F(v') = w'$. Deshalb haben wir

$$F^{-1}(w + w') = F^{-1}(F(v) + F(v')) = F^{-1}(F(v + v')) = v + v' = F^{-1}(w) + F^{-1}(w')\,.$$

Analog, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$

$$F^{-1}(\lambda w) = F^{-1}(\lambda F(v)) = F^{-1}(F(\lambda v)) = \lambda v = \lambda F^{-1}(w)\,.$$

□

Beispiel 5.1.1

1. Es sei $N\colon V \to W$ die “Null-Abbildung", d.h. $N(v) = \mathbf{0}_W$ (der Null-Vektor von W), für alle $v \in V$. Dann ist N eine Lineare Abbildung.

2. Die Identität $\mathbf{1}_V\colon V \to V$ ist ein Automorphismus von V. Nach Bemerkung 5.1.1 und Proposition 5.1.1 haben wir, dass $(GL_{\mathbb{K}}(V), \circ)$ eine Gruppe ist (hier bezeichnet $\circ$ die Verknüpfung).

3. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Abbildung $\lambda\mathbf{1}_V\colon V \to V$, definiert als $(\lambda\mathbf{1})(v) = \lambda v$, ist linear. Wir bemerken, dass falls $\lambda = 0$, dann $0\mathbf{1}_V = N$. Falls $\lambda \neq 0$, dann $\lambda\mathbf{1}_V \in GL_{\mathbb{K}}(V)$ (die Inverse ist genau $\lambda^{-1}\mathbf{1}_V$).

4. Es seien U, W Untervektorräume von V, sodass $V = U \oplus W$. Wir haben schon bewiesen (Lemma 3.2.12), dass es eindeutig bestimmte Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$ gibt. Wir definieren die *Projektionen* $p_U : V \to U$ und $p_W : V \to W$ als $p_U(v) = p_U(u + w) = u$ und $p_W(v) = p_W(u + w) = w$. Es ist leicht zu beweisen, dass p_U und p_W linear sind. Zum Beispiel, es sei $v' = u' + w'$, wobei $u' \in U$ und $w' \in W$, und $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, dann

$$\begin{aligned} p_U(\lambda v + \lambda' v') &= p_U(\lambda u + \lambda w + \lambda' u' + \lambda' w') = p_U(\lambda u + \lambda' u' + \lambda w + \lambda' w') \\ &= \lambda u + \lambda' u' = \lambda p_U(v) + \lambda' p_U(v'). \end{aligned}$$

   Ganz analog kann man beweisen, dass p_W linear ist. Außerdem sind p_U und p_W surjektiv, also sind sie Epimorphismen.

5. Es sei U ein Untervektorraum von V und $i : U \to V$ die Inklusion. Es ist leicht nachzuprüfen, dass i ein Monomorphismus ist.

Proposition 5.1.2
Es sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, $v_1, \dots, v_n \in V$ und $w_i := F(v_i)$, für jedes $i = 1, \dots, n$. Falls $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind, dann sind auch $w_1, \dots, w_n$ linear abhängig. Äquivalent gesagt, falls $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind, dann sind auch $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Es seien $v_1, \dots, v_n$ linear abhängige Vektoren. Also existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich Null, sodass

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}.$$

Nach Bemerkung 5.1.1 und durch Linearität von F haben wir, dass

$$\mathbf{0}_W = F(\mathbf{0}_V) = F(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \cdots + \lambda_n F(v_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n \,,$$

also sind $w_1, \dots, w_n$ linear abhängig. □

Fragen und Vertiefungen 5.1.1
In obiger Proposition, es seien $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige Vektoren und $w_i := F(v_i)$ für jedes $i = 1, \dots, n$. Kann man schließen, dass $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind?

Vorlesung 19 - 09.01.2017

Satz 5.1.3
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$, sodass $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Der obige Satz ist sehr wichtig und sagt uns: um eine lineare Abbildung zu definieren, genügt es, das Bild der Elemente einer Basis von V zu definieren.

Beweis. Es sei $v \in V$, und $k_1, \dots, k_n$ seine Koordinaten bezüglich der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$, also $v = k_1v_1 + \cdots + k_nv_n$. Wir erinnern uns daran, dass mit Lemma 3.2.4 die Skalare $k_1, \dots, k_n$ eindeutig bestimmt sind.

Falls es eine lineare Abbildung F gibt, sodass $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, dann muss

$$F(v) = k_1w_1 + \cdots + k_nw_n$$

sein. In der Tat, durch Linearität von F (Gleichung 5.1.4) folgt, dass

$$F(v) = F(k_1v_1 + \cdots + k_nv_n) = k_1F(v_1) + \cdots + k_nF(v_n) = k_1w_1 + \cdots + k_nw_n\,.$$

Also ist F eindeutig bestimmt.

Jetzt beweisen wir, dass die Abbildung F, wie oben definiert, linear ist. Es seien $v = k_1v_1 + \cdots + k_nv_n$ und $v' = k_1'v_1 + \cdots + k_n'v_n$, wobei $k_i' \in \mathbb{K}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann

$$\begin{aligned} F(v+v') &= F((k_1+k_1')v_1 + \cdots + (k_n+k_n')v_n) = (k_1+k_1')w_1 + \cdots + (k_n+k_n')w_n = \\ &= k_1w_1 + \cdots + k_nw_n + k_1'w_1 + \cdots + k_n'w_n = F(v) + F(v')\,. \end{aligned}$$

Also erfüllt F Eigenschaft (5.1.1). Jetzt prüfen wir (5.1.2). Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$, dann

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= F(\lambda k_1v_1 + \cdots + \lambda k_nv_n) = \lambda k_1w_1 + \cdots + \lambda k_nw_n = \\ &= \lambda(k_1w_1 + \cdots + k_nw_n) = \lambda F(v)\,. \end{aligned}$$

Wir können schließen, dass F linear ist. □

Definition 5.1.3
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Wir definieren den *Kern* von F, bezeichnet mit $\mathrm{Ker}(F)$, durch

$$\mathrm{Ker}(F) := \{v \in V \mid F(v) = \mathbf{0}_W\} \subseteq V\,,$$

und das *Bild* von F, bezeichnet mit $\mathrm{Im}(F)$, durch

$$\mathrm{Im}(F) := F(V) = \{w \in W \mid w = F(v) \text{ für einen } v \in V\} \subseteq W\,.$$

Proposition 5.1.4
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

(a) $\mathrm{Ker}(F)$ ist ein Untervektorraum von V und $\mathrm{Im}(F)$ ist ein Untervektorraum von W;

(b) F ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$;

(c) F ist surjektiv genau dann, wenn Im$(F) = W$.

Beweis. (a) Zuerst bemerken wir, dass $\mathrm{Ker}(F) \neq \emptyset$, weil $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ (sehen Sie Bemerkung 5.1.1). Es seien $v, v' \in \mathrm{Ker}(F)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir müssen beweisen, dass $v + v' \in \mathrm{Ker}(F)$ und $\lambda v \in \mathrm{Ker}(F)$. Das ist eine Folgerung aus der Linearität von F; in der Tat

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W \quad \text{und} \quad F(\lambda v) = \lambda F(v) = \lambda \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W \,.$$

Um zu beweisen, dass $\mathrm{Im}(F)$ ein Untervektorraum von W ist, bemerken wir zuerst, dass $\mathrm{Im}(F) \neq \emptyset$ (weil $\mathbf{0}_W = F(\mathbf{0}_V) \in \mathrm{Im}(F)$). Es seien $w, w' \in \mathrm{Im}(F)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Nach Definition von $\mathrm{Im}(F)$, existieren $v, v' \in V$, sodass $F(v) = w$ und $F(v') = w'$. Wir haben

$$w + w' = F(v) + F(v') = F(v + v') \quad \text{und} \quad \lambda w = \lambda F(v) = F(\lambda v)\,,$$

also ist $\mathrm{Im}(F)$ ein Untervektorraum von W.

(b) Wir haben schon bemerkt, dass $F(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. Also, wenn F injektiv ist, dann $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$. Umgekehrt, es sei $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$ und $v, v' \in V$ mit $F(v) = F(v')$. Wir müssen beweisen, dass $v = v'$. Bemerken wir, dass $F(v - v') = F(v) - F(v') = \mathbf{0}_W$, also $v - v' \in \mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$ und $v = v'$.

(c) ist klar. □

Bemerkung 5.1.2
Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis. Nach Linearität von F folgt, dass

$$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\}\,.$$

Definition 5.1.4
Es sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann nennen wir die Dimension von $\mathrm{Im}(F)$ den *Rang* der Abbildung F und bezeichnen den Rang von F mit $r(F)$.

Der folgende Satz ist sehr wichtig:

Satz 5.1.5
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$. Nehmen wir an, dass $\dim_{\mathbb{K}}(V) < \infty$. *Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{K}}(Ker(F)) + r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(V)\,.$$

Beweis. Da $\mathrm{Ker}(F)$ ein Untervektorraum von V ist, und da $\dim_{\mathbb{K}}(V) =: n < \infty$, Korollar 3.2.11 impliziert, dass $\dim(\mathrm{Ker}(F)) =: s \leq n$. Es sei $\{e_1, \ldots, e_s\}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(F)$. Nach Proposition 3.2.10 existieren Vektoren $v_{s+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass $\{e_1, \ldots, e_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist (Basisergänzung). Es genügt zu beweisen, dass $\{F(v_{s+1}), \ldots, F(v_n)\}$ eine Basis von $\mathrm{Im}(F)$ ist, weil diese Behauptung impliziert, dass $r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(F)) = n - s = \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F))$.

Es sei $w \in \mathrm{Im}(F)$, also existiert $v \in V$ sodass $F(v) = w$. Es seien $k_1, \ldots, k_s, k_{s+1}, \ldots, k_n$ die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\{e_1, \ldots, e_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$. Wir haben

$$w = F(k_1e_1 + \cdots + k_se_s + k_{s+1}v_{s+1} + \cdots + k_nv_n) = k_{s+1}F(v_{s+1}) + \cdots + k_nF(v_n).$$

Also ist $\{F(v_{s+1}), \ldots, F(v_n)\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}(F)$. Wir sollen noch beweisen, dass $F(v_{s+1}), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig sind.

Nehmen wir die Linearkombination

$$\alpha_{s+1}F(v_{s+1}) + \cdots + \alpha_nF(v_n) = \mathbf{0}_W\,,$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{K}$ für alle $i = s+1, \ldots, n$. Wir haben

$$F(\alpha_{s+1}v_{s+1} + \cdots + \alpha_nv_n) = \mathbf{0}_W\,,$$

also $\alpha_{s+1}v_{s+1} + \cdots + \alpha_nv_n \in \mathrm{Ker}(F)$. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ mit

$$\alpha_{s+1}v_{s+1} + \cdots + \alpha_nv_n = \alpha_1e_1 + \cdots + \alpha_se_s\,,$$

oder, äquivalent gesagt,

$$\alpha_{s+1}v_{s+1} + \cdots + \alpha_nv_n - \alpha_1e_1 - \cdots - \alpha_se_s = \mathbf{0}_V\,.$$

Weil die Vektoren $e_1, \ldots, e_s, v_{s+1}, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, erhalten wir $\alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und, insbesondere, $\alpha_{s+1} = \cdots = \alpha_n = 0$. Wir können schließen, dass $F(v_{s+1}), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig sind.

$\square$

Bemerkung 5.1.3
Bemerken Sie, dass W unendliche Dimensionen haben könnte und auch in diesem Fall erhalten wir $r(F) < \infty$.

Folgendes Korollar gibt uns eine einfache Methode um zu wissen, wann eine lineare Abbildung ein Isomorphismus ist.

Korollar 5.1.6
Es seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) =: n < \infty$, und $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. *$Ker(F) = \{\mathbf{0}_V\}$;*
2. *$Im(F) = W$;*
3. *F ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 5.1.5 haben wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F)) = 0 \iff r(F) = n$. Jetzt bemerken wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F)) = 0 \iff \mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}_V\}$, und $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(F)) = r(F) = n \iff \mathrm{Im}(F) = W$, und die Äquivalenz zwischen 1. und 2. bewiesen wird. Die Äquivalenz zwischen 1. (oder 2.) und 3. ist leicht zu beweisen. □

Vorlesung 20 - 12.01.2017

Definition 5.1.5
Gibt es einen Isomorphismus zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W, so heißen die Vektorräume (zueinander) *isomorph*. Wir schreiben $V \simeq W$.

Bemerkung 5.1.4
Die Isomorphie "$\simeq$" zwischen Vektorräumen ist eine Äquivalenzrelation:

(1) $\simeq$ ist *reflexiv*: $V \simeq V$;

(2) $\simeq$ ist *symmetrisch*: Wenn $V \simeq W$, dann $W \simeq V$;

(3) $\simeq$ ist *transitiv*: Wenn $V \simeq W$ und $W \simeq U$, dann $V \simeq U$.

Der Beweis ist eine Übung.

Folgender Satz sagt uns, dass bis auf Isomorphie es nur einen n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum gibt.

Satz 5.1.7
Es seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann gilt $V \simeq W$ genau dann, wenn $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

Beweis. Zuerst nehmen wir an, dass $V \simeq W$. Sei $F\colon V \to W$ der Isomorphismus zwischen V und W. Weil $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 0$, impliziert Satz 5.1.5, dass $r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Weil F surjektiv ist, dann $r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$.

Umgekehrt, sei $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W) = n$. Es seien $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von W, und F die Abbildung mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (sehen Sie Satz 5.1.3). Weil $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{Im}(F)$, dann $W = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{Im}(F) \subseteq W$, also ist $\mathrm{Im}(F) = W$ und F surjektiv. Nach Satz 5.1.5 erhalten wir, dass $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(F)) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - r(F) = \dim_{\mathbb{K}}(V) - \dim_{\mathbb{K}}(W) = 0$, und F ist auch injektiv. Wir können schließen, dass F ein Isomorphismus ist. □

5.2 Lineare Abbildungen und dazugehörige Matrizen

Seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W. Für jeden Homomorphismus $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ definieren wir eine $m \times n$-Matrix, bezeichnet mit $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$, die von $F, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ abhängt. Für jedes $i = 1, \dots, n$ definieren wir die Skalare $a_{1i}, \dots, a_{mi} \in \mathbb{K}$ als die Koordinaten von $F(v_i)$ bezüglich der Basis $\mathbf{w}$, also

$$F(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{mi}w_m\,.$$

Die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$ ist definiert als

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})\,.$$

Wir haben schon bemerkt, dass gegeben eine Basis $\mathbf{v}$ von V, eine Lineare Abbildung $F\colon V \to W$ von den Bilden $F(v_i)$ der Basis $\mathbf{v}$ eindeutig bestimmt ist (sehen Sie Satz 5.1.3). Also genügt die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$, um das Bild $F(v)$ eines beliebigen Vektors in $v \in V$ zu bestimmen. Explizit haben wir

Proposition 5.2.1
Es seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W. Es sei $F \in Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$ die dazugehörige Matrix. Gegeben ein beliebiger Vektor $v \in V$ mit Koordinaten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ bezüglich der Basis $\mathbf{v}$, also $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, die Koordinaten $y_1, \dots, y_m$ von $F(v)$ bezüglich der Basis $\mathbf{w}$, also $F(v) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m$, sind gegeben durch folgende Formel:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Beweis. Weil F linear ist, haben wir

$$\begin{aligned} F(v) &= F(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) = x_1F(v_1) + x_2F(v_2) + \cdots + x_nF(v_n) = \\ &= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + \\ &\quad + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m) + \cdots \\ &\quad \cdots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m) = \\ &= \Big(\textstyle\sum_{i=1}^n a_{1i}x_i\Big)w_1 + \Big(\sum_{i=1}^n a_{2i}x_i\Big)w_2 + \cdots + \Big(\sum_{i=1}^n a_{mi}x_i\Big)w_m\,. \end{aligned}$$

Also erhalten wir genau, dass

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

□

Gegeben zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W, dann hat die Menge aller Homomorphismen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ eine natürliche Struktur eines Vektorraumes. In der Tat sind die Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert: Für jede $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, ist $F + G$ definiert als

$$(F + G)(v) := F(v) + G(v), \quad \text{für alle } \ v \in V$$

und für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda F)(v) := \lambda F(v), \quad \text{für alle } \ v \in V.$$

Es ist leicht zu beweisen, dass $F + G$ und λF zu $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ gehören, für jede $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ und dass $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, mit obigen Operationen, eine Struktur eines Vektorraumes hat.

Satz 5.2.2
Es seien V, W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Die Abbildung

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \colon \mathit{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) &\to M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ F &\mapsto A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Insbesondere,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathit{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = mn. \tag{5.2.1}$$

Beweis. Wir beweisen, dass

(i) $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ ist linear;

(ii) Wir finden eine Abbildung $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \colon M_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, sodass $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)}$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{M_{mn}(\mathbb{K})}$; also ist $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ bijektiv und deshalb ein Isomorphismus. (Bemerken Sie, dass nach Proposition 5.1.1 die Inverse $(A_{\mathbf{w},\mathbf{v}})^{-1} = L_{\mathbf{w},\mathbf{v}}$ auch linear ist.)

Die letzte Behauptung (Gleichung (5.2.1)) ist dann eine Folgerung des Satzes 5.1.7.

(i) Es seien $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $A := A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)$ und $B := A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(G)$. Wir sollen beweisen, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F+G) = A + B$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\lambda F) = \lambda A$, für beliebige $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Es seien a_{ji} und b_{ji} die Koeffizienten von A und B, wobei $j = 1, \dots, m$ und $i = 1, \dots, n$. Also $F(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{mi}w_m$ und $G(v_i) = b_{1i}w_1 + b_{2i}w_2 + \cdots + b_{mi}w_m$, für $i = 1, \dots, n$. Dann $(F+G)(v_i) = F(v_i) + G(v_i) = (a_{1i} + b_{1i})w_1 + \cdots + (a_{mi} + b_{mi})w_m$, und wir erhalten

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F+G) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = A + B\,.$$

Ähnlich kann man beweisen, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\lambda F) = \lambda A$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

(ii) Es sei $A \in M_{mn}(\mathbb{K})$ mit Zeilen $Z_1, \dots, Z_m$, betrachtet als Zeilenvektoren in $\mathbb{K}^n = M_{1n}(\mathbb{K})$. Definieren wir $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(A) =: F_A$ als die Abbildung

$$F_A(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = (Z_1\mathbf{x})w_1 + \cdots + (Z_m\mathbf{x})w_m\,,$$

wobei $\mathbf{x}$ der Spaltenvektor $(x_1 \dots x_n)^T$ ist. Nach Proposition 5.2.1 haben wir, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F_A) = A$ oder, äquivalent gesagt, dass $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{M_{mn}(\mathbb{K})}$. Ähnlich haben wir, dass $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) = F$ oder, äquivalent gesagt, dass $L_{\mathbf{w},\mathbf{v}} \circ A_{\mathbf{w},\mathbf{v}} = \mathbf{1}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,W)}$.
$\square$

Vorlesung 21 - 16.01.2017

Bemerkung 5.2.1
Im Beweis des Satzes 5.2.2 haben wir bewiesen, dass gegeben endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume V, W bzw. mit Basen $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_m\}$, und gegeben eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, es genau eine lineare Abbildung $F_A \colon V \to W$ gibt, sodass die dazugehörige Matrix (bezüglich der Basen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$) genau A ist. Wir nennen F_A die *lineare Abbildung assoziiert zur Matrix A*. Per definitionem haben wir, dass

$$F_A(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = y_1w_1 + \cdots + y_mw_m\,,$$

wobei $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ und $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_m)^T$ und $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)^T$.

Beispiel 5.2.1
Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^2$ bzw. mit kanonischen Basen $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ (also

$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$) und $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ (also $f_1 = (1,0)$ und $f_2 = (0,1)$). Definieren wir die lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, sodass

$$F(e_1) = (2,5) = 2f_1 + 5f_2, \quad F(e_2) = (1,-1) = f_1 - f_2, \quad \text{und} \quad F(e_3) = (0,4) = 4f_2.$$

(Bemerken Sie, dass $F(e_1)$, $F(e_2)$ und $F(e_3)$ das Bild $F(v)$, für alle $v \in \mathbb{R}^3$, definieren! Sehen Sie Satz 5.1.3.) Also erhalten wir

$$A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten bemerken, dass die Matrix $A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F)$ von den Basen von V und W abhängt! Zum Beispiel, es sei $\mathbf{f}' = \{f_1', f_2'\}$, wobei $f_1' = (2,5)$ und $f_2' = (1,-1)$. Wir sollen zuerst beweisen, dass $\mathbf{f}'$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist. Da $\mathbb{R}^2$ Dimension 2 hat, genügt es zu beweisen, dass f_1' und f_2' linear unabhängig sind. Es sei

$$\alpha(2,5) + \beta(1,-1) = (0,0)$$

eine Null-Linearkombination. Das System

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ 5\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

hat nur die triviale Lösung $(\alpha, \beta) = (0,0)$, weil die Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist (Sehen Sie Bemerkung 2.2.2 und Satz 4.2.5, und bemerken Sie, dass $\det(B) = -7 \neq 0$). Also sind f_1' und f_2' linear unabhängig.

Weil $(0,4) = \frac{4}{7}(2,5) - \frac{8}{7}(1,-1) = \frac{4}{7}f_1' - \frac{8}{7}f_2'$, erhalten wir

$$A_{\mathbf{f}',\mathbf{e}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} \end{pmatrix} \neq A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F).$$

Proposition 5.2.3
Es seien U, V, W drei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume bzw. mit Basen $\mathbf{u} = \{u_1, \ldots, u_s\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Es seien $G\colon U \to V$ und $F\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, und $F \circ G\colon U \to W$ ihre Verknüpfung. Dann erfüllen die dazugehörigen Matrizen $A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G) \in M_{n,s}(\mathbb{K})$, $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $A_{\mathbf{w},\mathbf{u}}(F \circ G) \in M_{m,s}(\mathbb{K})$ die Gleichung

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{u}}(F \circ G) = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F) A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G).$$

Beweis. Es sei $u = z_1 u_1 + \cdots + z_s u_s$ ein beliebiger Vektor in U. Dann $G(u) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, wobei $\mathbf{x} := (x_1 \ldots x_n)^T = A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G)(z_1 \ldots z_s)^T = A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G)\mathbf{z}$. Wir haben auch $(F \circ G)(u) = F(G(u)) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$, wobei

$$\mathbf{y} := (y_1 \ldots y_m)^T = A_{\mathbf{w},\mathbf{u}}(F \circ G)\mathbf{z}.$$

Also

$$\mathbf{y} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)\mathbf{x} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{u}}(G)\mathbf{z}\,,$$

und die Behauptung folgt, weil u ein beliebiger Vektor in U ist. □

Es sei $V = W$, also $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,V) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Wir haben folgendes

Korollar 5.2.4
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $F \in End_{\mathbb{K}}(V)$. Dann

1. *$F = \mathbf{1}_V$ genau dann, wenn $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = I_n$;*

2. *F ist invertierbar (also $F \in GL_{\mathbb{K}}(V)$) genau dann, wenn $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)$ invertierbar ist (also $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) \in GL_n(\mathbb{K})$). Falls $F \in GL_{\mathbb{K}}(V)$, dann*

$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F^{-1}) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F))^{-1}\,.$$

Beweis. 1. Falls $F = \mathbf{1}_V$, dann natürlich $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = I_n$. In der anderen Richtung genügt es zu bemerken, dass falls $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) = I_n$, also falls $F(v_i) = v_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann $F(v) = v$ für alle $v \in V$.

2. Nehmen wir an, dass $F \in GL_{\mathbb{K}}(V)$. Mit der Hilfe von 1. und Proposition 5.2.3 haben wir, dass

$$I_n = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F \circ F^{-1}) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F^{-1})\,.$$

Also $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) \in GL_n(\mathbb{K})$ und $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F^{-1}) = (A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F))^{-1}$ (Sehen Sie Bemerkung 4.2.5!).

Umgekehrt nehmen wir an, dass $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F) \in GL_{\mathbb{K}}(V)$. Es sei $B \in GL_n(\mathbb{K})$ mit $A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)B = I_n$. Es sei $F_B \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ die dazugehörige lineare Abbildung, also $F_B = L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B)$ und $B = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B))$ (Sehen Sie den Beweis des Satzes 5.2.2). Nach Proposition 5.2.3 erhalten wir, dass

$$A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F \circ L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B)) = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(F)A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B)) = I_n\,,$$

und nach 1. haben wir, dass $F \circ L_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(B) = \mathbf{1}_V$, also ist F surjektiv. Nach Korollar 5.1.6 können wir schließen, dass F bijektiv ist. □

Fragen und Vertiefungen 5.2.1
Im Abschnitt 2.2.2 haben wir eine Verbindung zwischen (linearen) Abbildungen und Matrizen schon gesehen. Es sei $V = M_n(\mathbb{R})$ mit der kanonischen Basis Δ eingeführt in Beispiel 3.2.6. Gegeben $A \in M_n(\mathbb{R})$, es sei $\mathcal{L}_A \colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$. Ist $\mathcal{L}_A$ linear? Was ist $A_{\Delta,\Delta}(\mathcal{L}_A)$? Können Sie Korollar 5.2.4 benutzen, um zu beweisen, dass $\mathcal{L}_A$ invertierbar ist, genau dann, wenn A invertierbar ist? (Sehen Sie auch Proposition 2.2.2.)

Definition 5.2.1
Es seien $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ zwei Basen des endlichdimensionalen Vektorraums V. Die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ heißt die *Basiswechselmatrix* von $\mathbf{v}$ nach $\mathbf{w}$.

Also, per definitionem, sind die Einträge der j-ten Spalte die Koordinaten von v_j bezüglich der Basis $\mathbf{w} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, für jedes $j = 1, \ldots, n$, wobei $\mathbf{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Bemerken wir, dass gegeben $v \in V$, haben wir

$$v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n = \mathbf{1}_V(v) = y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n \,,$$

und nach Proposition 5.2.1 erhalten wir

$$\mathbf{y} = A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)\mathbf{x} \,,$$

wobei $\mathbf{y} = (y_1 \ldots y_n)^T$ und $\mathbf{x} = (x_1 \ldots x_n)^T$. Also erlaubt uns die Matrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathbf{w}$ von den Koordinaten von v bezüglich der Basis $\mathbf{v}$ zu erhalten.

Außerdem impliziert Proposition 5.2.3 und Korollar 5.2.4, dass

$$I_n = A_{\mathbf{v},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V) = A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V) A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V) \,.$$

Die obige Gleichung beweist folgendes:

Lemma 5.2.5
Gegeben zwei Basen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ eines endlichdimensionalen Vektorraums V, dann ist die Basiswechselmatrix $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ von $\mathbf{v}$ nach $\mathbf{w}$ invertierbar und

$$(A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V))^{-1} = A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V) \,.$$

Vorlesung 22 - 19.01.2017

Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ Skalare definiert durch

$$\begin{aligned} v_1 = &\quad a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \cdots + a_{n1} w_n \\ \vdots \quad & \qquad\qquad \vdots \\ v_n = &\quad a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \cdots + a_{nn} w_n, \end{aligned}$$

und $A \in M_n(\mathbb{K})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Formell können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \tag{5.2.2}$$

Falls $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist, ist die Matrix A genau $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$. Außerdem ist A in diesem Fall invertierbar (Lemma 5.2.5). Umgekehrt haben wir, dass

Lemma 5.2.6
Es sei A eine invertierbare Matrix und $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren definiert durch (5.2.2). *Dann ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V.*

Beweis. Weil A invertierbar ist, ist A^T auch invertierbar, und formell können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (A^T)^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{5.2.3}$$

Also $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ und deshalb $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\}$ (Sehen Sie Fragen und Vertiefungen 3.2.2). Weil $\{w_1, \ldots, w_n\}$ eine Basis von V ist, folgt es, dass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$. Jetzt genügt es zu bemerken, dass ein Erzeugendensystem mit $n = \dim(V)$ Elementen eine Basis ist. (Wenn nicht, dann könnten wir eine Untermenge $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ finden, mit $k < n$, und Vektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, sodass $\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} = V$ und $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ linear unabhängig sind. In diesem Fall hätten wir einen Widerspruch, weil $\dim(V) = k < n$ wäre. Vergleichen Sie mit dem Beweis des Satzes 3.2.5.) □

Eine wichtige Auswirkung des Lemmas 5.2.5 und 5.2.6 ist folgendes:

Korollar 5.2.7
Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathbf{v}$ eine Basis von V und $\mathcal{B}$ die Menge aller Basen von V. Es sei $\underline{v} = (v_1 \ldots v_n)^T$ der "Spaltenvektor" der Elemente der Basis $\mathbf{v}$. Dann

$$\mathcal{B} = \{M\underline{v} \mid M \in GL_n(\mathbb{K})\}.$$

Beweis. Mit Lemma 5.2.5 können wir die Inklusion "$\subseteq$" beweisen: Gegeben eine Basis $\mathbf{w}$, dann ist die Matrix M genau $A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)^T$. Lemma 5.2.6 beweist die andere Inklusion "$\supseteq$". □

Fragen und Vertiefungen 5.2.2
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, wobei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n > 0$. Was ist die Kardinalität von $\mathcal{B}$?

Lineare Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$

Es seien $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$ mit kanonischen Basen $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_m\}$. Jede Matrix $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiert die lineare Abbildung

$$F_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} \tag{5.2.4}$$

wobei wir die Vektoren in $\mathbb{K}^n$ (bzw. in $\mathbb{K}^m$) mit der Menge der Spaltenvektoren $M_{n,1}(\mathbb{K})$ (bzw. $M_{m,1}(\mathbb{K})$) identifiziert haben.

Es ist leicht zu beweisen, dass $A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B) = B$. Dies ist eine Folgerung aus der folgenden Tatsache:

$$F_B(e_i) = B\,e_i = S_i, \tag{5.2.5}$$

wobei S_i die i-te Spalte von B ist. Bemerken Sie, dass falls $\mathbf{e}$ und $\mathbf{f}$ keine kanonischen Basen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ sind, dann $A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B) \neq B$!

Nach (5.2.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} r(F_B) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(F_B)) \ &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{F_B(e_1), \dots, F_B(e_n)\}) = \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, \dots, S_n\}) = r(B) = r(A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B)). \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Koordinaten des Vektors $B\mathbf{x}$ homogene Polynome ersten Grades in $x_1, \dots, x_n$ sind.

Umgekehrt, gegeben m homogene Polynome ersten Grades $F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)$, ist die Abbildung

$$\begin{aligned} &F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \\ &F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

Beispiel 5.2.2
Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}),$$

dann ist die lineare Abbildung $F_B\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definiert wie oben, gegeben durch

$$F_B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2 - x_3)\,.$$

Wir bemerken noch einmal, dass $B = A_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F_B)$, wobei $\mathbf{e} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ und $\mathbf{f} = \{(1,0), (0,1)\}$ die kanonischen Basen bzw. von $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ sind.

Umgekehrt, sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung definiert als

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 6x_2 - x_3, x_2, x_2 - x_3)\,.$$

Dann ist F linear und $F = F_B$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}).$$

Der Satz von Kronecker-Rouché-Capelli

In Aufgabe 4.4 haben Sie schon den Satz von Kronecker-Rouché-Capelli bewiesen. Wir erinnern uns daran, dass der Satz uns sagt, dass gegeben eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ein Spaltenvektor $\mathbf{b} = (b_1 \dots b_m)^T$ und Unbekannte $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, das lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{5.2.6}$$

eine Lösung hat genau dann, wenn $r(A) = r(A|\mathbf{b})$, wobei $(A|\mathbf{b})$ die augmentierte Matrix ist, also

$$(A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall sagt uns der Satz, dass das System (5.2.6) $\infty^{n-r(A)}$ Lösungen hat.

Jetzt können wir einen zweiten Beweis dieses Satzes geben.

Es sei $F_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die lineare Abbildung definiert in (5.2.4). Wir bemerken, dass das System (5.2.6) eine Lösung hat genau dann, wenn $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(F_A)$. Wir haben schon bemerkt, dass $\mathrm{Im}(F_A) = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{F_B(e_1), \dots, F_B(e_n)\} = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{S_1, \dots, S_n\}$. Also können wir schließen, dass

$$\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(F_A) \iff r(A) = r(A|\mathbf{b}).$$

(Warum ist die obige Äquivalenz wahr?) Wir möchten jetzt beweisen, dass falls $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}(F_A)$, das System (5.2.6) $\infty^{n-r(A)}$ Lösungen hat.

Wir erinnern uns daran, dass ein lineares Gleichungssystem ∞^s Lösungen hat genau dann, wenn die Menge der Lösungen von s unabhängigen Parametern abhängt (Sehen Sie Abschnitt 1.3.1, insbesondere (1.3.5)).

(i) Zuerst bemerken wir, dass nach Proposition 1.3.2, ein lineares Gleichungssystem (das Lösungen besitzt) ∞^s Lösungen hat genau dann, wenn das dazugehörige homogene lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5.2.7}$$

∞^s Lösungen hat. In diesem Fall ist die Menge der Lösungen von (5.2.7) der Gestalt

$$\Sigma_0 := \{(P_1(t_1, \dots, t_s), \dots, P_n(t_1, \dots, t_s)),\ \ t_1, \dots, t_s \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^n,$$

wobei $P_1, \dots, P_n$ homogene Polynome ersten Grades sind.

Vorlesung 23 - 23.01.2017

(ii) Wir bemerken, dass diese Menge ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ ist: Σ_0 ist genau der Kern von F_A! Außerdem ist $\dim(\Sigma_0) = s$. In der Tat seien

$$\begin{array}{ll} P_1(t_1, \dots, t_s) & = \alpha_{11}t_1 + \alpha_{12}t_2 + \cdots + \alpha_{1s}t_s \\ \vdots & \qquad \vdots \\ P_n(t_1, \dots, t_s) & = \alpha_{n1}t_1 + \alpha_{n2}t_2 + \cdots + \alpha_{ns}t_s\,, \end{array}$$

für $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$. Dann

$$\Sigma_0 = \{t_1(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n1}) + t_2(\alpha_{12}, \dots, \alpha_{n2}) + \cdots + t_s(\alpha_{1s}, \dots, \alpha_{ns}),\ \ t_1, \dots, t_s \in \mathbb{K}\},$$

also

$$\Sigma_0 = \mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{\alpha_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n1}), \dots, \alpha_s = (\alpha_{1s}, \dots, \alpha_{ns})\}\,.$$

Die Unabhängigkeit dieser Vektoren ist eine Folgerung aus der Tatsache, dass $t_1, \dots, t_s$ unabhängige Parameter sind (Prüfen Sie nach!). Also $\dim(\Sigma_0) = s$.

(iii) Nach Satz 5.1.5 können wir schließen, dass

$$s = \dim(\Sigma_0) = \dim(\mathrm{Ker}(F_A)) = n - r(F_A) = n - r(A)\,.$$

Übung. Es sei V ein Vektorraum und $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ eine Basis von V. Es seien $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ zwei Teilmengen von V, wobei die Koordinaten von v_1 bezüglich der Basis $\mathbf{e}$ sind $(1, 1, 0)$. Wir schreiben $v_1 = \mathbf{e}(1, 1, 0)$. Dann $v_2 = \mathbf{e}(2, 1, 1)$, $v_3 = \mathbf{e}(0, -2, 1)$, $w_1 = \mathbf{e}(-1, 0, 1)$, $w_2 = \mathbf{e}(1, -2, -3)$ und $w_3 = \mathbf{e}(1, 1, 1)$. Beweisen Sie, dass $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ Basen von V sind, und berechnen Sie $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_V)$ und $A_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_V)$.