Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
26.5.2016

Topologie: Übungsblatt 6

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 02.6.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Von jetzt an geben wir nicht mehr immer die Topologie eines Raumes an. D.h. wir schreiben nicht mehr $(X, \mathcal{T})$ für einen topologischen Raum, sondern nur noch X wann es klar ist welche Topologie gemeint ist.

Aufgabe 1. (3+12 Punkte)

Sei Y eine Mannigfaltigkeit.

a) Zeigen Sie, dass jeder Punkt $x \in Y$ eine Umgebung C hat mit C kompakt.

Sei G eine Gruppe, mit einer diskreten Operation ψ auf Y. D.h. für alle $x \in Y$ gibt es eine offene Menge U, sodass

$$U \cap \psi_g(U) = \emptyset \qquad \text{für alle} \qquad g \neq e.$$

Nehmen Sie an das für alle kompakten Teilmengen $C \subset Y$, die Menge

$$A(C) := \{g \in G \,|\, \psi_g(C) \cap C \neq \emptyset\},$$

endlich ist.

a) Zeigen Sie, dass Y/G Hausdorff ist.

Die extra Bedingung ist notwendig. Auf der Website Prof. Sabatini findet man ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 2. (7+3 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{T})$ eine nicht-leere Menge mit trivialer Topologie $\mathcal{T} = (X, \emptyset)$.

a) Zeigen Sie, dass X lokal euklidisch ist, genau dann wenn X einen Punkt enthält.

Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

b) Zeigen Sie dass $\mathbb{R}/\sim$ nicht lokal euklidisch ist.

Aufgabe 3. (3+9 Punkte)

Sei $Y \subset X$ ein zusamenhängender Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass $\overline{Y}$ zusamenhängend ist.

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ der Unterraum

$$S = \{(x, \sin(1/x)) \,|0 < x \leq 1\}.$$

b) Zeigen Sie, dass $\overline{S}$ zusamenhängend aber nicht wegzusamenhängend ist.

Aufgabe 4. (5+4+4 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum. Wir schreiben $x \sim y$ falls es eine zusammenhängende Menge $Y \subset X$ gibt, sodass $x, y \in Y$.

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklassen von $\sim$ nennen wir die (Zusamenhangs-) Komponenten von X.

b) Zeigen Sie, dass jede zusamenhängende Menge $A \subset X$, nur genau mit einer Komponente einen nicht-leere Durchschnitt hat.

c) Zeigen Sie, dass die Komponenten zusamenhängende Menge sind.