Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
14.5.2018

Topologie: Übungsblatt 6

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 21.5.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Es sei $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ der topologische Raum mit Topologie induziert von $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ mit der folgenden Äquivalenzrelation :

$$(z_1, \ldots, z_{n+1}) \sim (w_1, \ldots, w_{n+1}) :\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \text{ sodass } (z_1, \ldots, z_{n+1}) = \lambda \cdot (w_1, \ldots, w_{n+1})$$

Der *komplex-projektive Raum* $\mathbb{CP}^n$ ist gegeben durch

$$\mathbb{CP}^n := \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$$

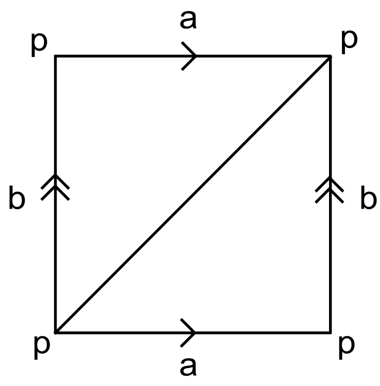
Sei $\mathcal{T}$ die Quotiententopologie auf $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}/\sim$.

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{CP}^n, \mathcal{T})$ lokal Euklidisch ist.

Aufgabe 2. (35 Punkte)

Sei S eine kompakte Fläche. Eine *Triangulierung* $\mathcal{T}$ von S besteht aus einer endlichen Familie von abgeschlossenen Teilmengen $\{T_1, \ldots, T_n\}$ mit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, die S überdecken, und aus einer Familie von Homöomorphismen $\varphi_i : T_i' \to T_i$, wobei jedes T_i' ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Zudem muss gelten, dass je zwei verschiedene Dreiecke entweder disjunkt sind oder sich in einer gemeinsamen Kante oder in einem gemeinsamen Eckpunkt schneiden.

a) Definieren Sie T einen Torus, indem Sie die gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats (in gleicher Richtung) miteinander identifizieren.
   Erklären Sie, warum die folgende Grafik keine Triangulierung von T zeigt :



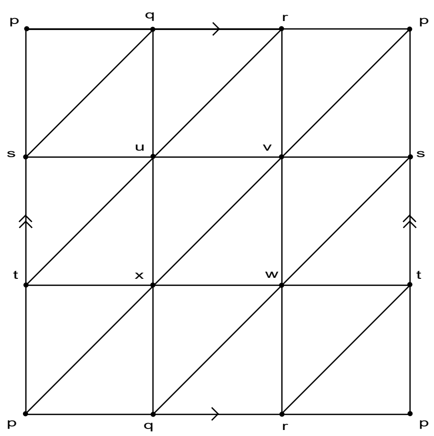
b) Finden Sie eine Triangulierung der Sphäre S^2.

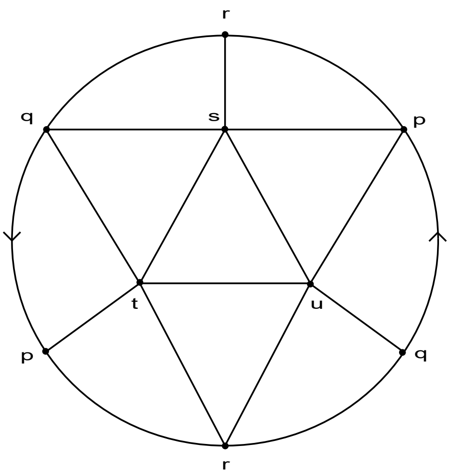
c) Seien e die Anzahl der Eckpunkte, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Dreiecke einer triangulierten Fläche S. Dann ist

$$\chi(S) = e - k + f$$

die *Euler Charakteristik* von S.

Berechnen Sie die Euler Charakteristik der Sphäre, des Torus T und der reellen projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$. Hinweis : die folgenden Grafiken zeigen Triangulierungen des Torus und der reellen projektiven Ebene jeweils.





d) Seien S_1 und S_2 zwei Kompakte Flächen mit den Triangulierungen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$. Definieren Sie eine Triangulierung von $S_1 \sharp S_2$ und zeigen Sie, dass

$$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2\,.$$

e) Berechnen Sie die Euler Charakteristik von

$$\underbrace{T \sharp \ldots \sharp T}_{m-\text{mal}} \sharp \underbrace{\mathbb{RP}^2 \sharp \ldots \sharp \mathbb{RP}^2}_{n-\text{mal}}$$