

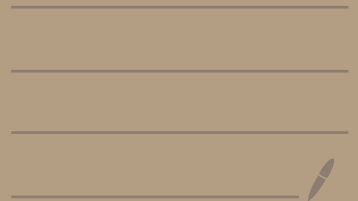
Vorlesung 13

Satz 5.2.2., 5.2.3, 5.2.4

5.3: Grenzwerte von Funktionen

5.4: Überblick über euklidische

Topologie; Def. innerer/
rand / äußerer Punkt

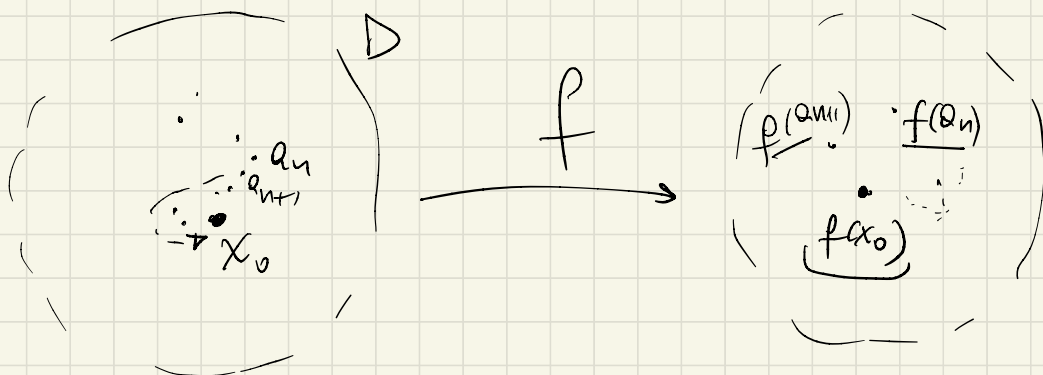


Vom letzten Mal...

Satz 5.2.1

Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$) eine Funktion und $x_0 \in D$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) f ist stetig in x_0 ;
- (ii) Für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \rightarrow x_0$, gilt $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$.



Satz 5.2.2

Es seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{C}$) stetige Funktionen. Dann sind die folgenden Funktionen stetig:

1. $f + g: D \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f + g: D \rightarrow \mathbb{C}$);
2. $\lambda \cdot f: D \rightarrow \mathbb{R}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \cdot f: D \rightarrow \mathbb{C}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$);
3. $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{C}$);
4. $\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{C}$), wobei $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

Beweis

Satz 5.2.1 $\left[\begin{array}{l} f, \text{ stetig} \\ g \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall (a_n) : a_n \rightarrow x_0 \\ \textcircled{\Leftarrow} \Rightarrow \underline{f(a_n)} \rightarrow f(x_0) \end{array} \right]$

Es sei (a_n) eine beliebige Folge, die
nach x_0 konvergiert

" $\Rightarrow$ " Satz 5.2.1 $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(a_n) \rightarrow f(x_0) \\ g(a_n) \rightarrow g(x_0) \end{array} \right]$

$\textcircled{*}$ Prop. 4.1.3 $\Rightarrow$

$$f(a_n) + g(a_n)$$

$\leadsto \downarrow$

$$f(x_0) + g(x_0)$$

$$\lambda \cdot f(a_n)$$

$\downarrow$

$$\lambda \cdot f(x_0)$$

$$f(a_n) \cdot g(a_n)$$

$\downarrow$

$$f(x_0) \cdot g(x_0)$$

$$\frac{f(a_n)}{g(a_n)}$$

$\downarrow$

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

" $\Leftarrow$ " von Satz 5.2.1 $\Rightarrow f+g, \lambda \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}$ stetig in x_0 sind $\blacksquare$

Beispiel: Rationale Funktionen

1) "Polynomiale Funktion"

$$P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad a_i \in \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n x^n + \dots + a_0)$$

$$z \mapsto \underline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \\ a_i \in \mathbb{C}$$

P ist stetig $\forall z \in \mathbb{C}$ (bzw. P stetig in $\mathbb{R}$)

* Die Konstante Funktion stetig

** Die Identität stetig ist $\left(\begin{array}{l} x \mapsto x, x \in \mathbb{R} \\ z \mapsto z, z \in \mathbb{C} \end{array} \right)$

$$a_0 \quad z \mapsto a_0 \\ z \mapsto \underbrace{a_1 z + a_0} \quad z^2, \dots, z^m \quad m \in \mathbb{N}$$

(*) Rationale Funktion:

$$R: z \mapsto \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + \dots + b_0} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$a_i, b_i \in \mathbb{C} \quad D := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$$

$R(z)$ wohldefiniert, $\forall z \in D$

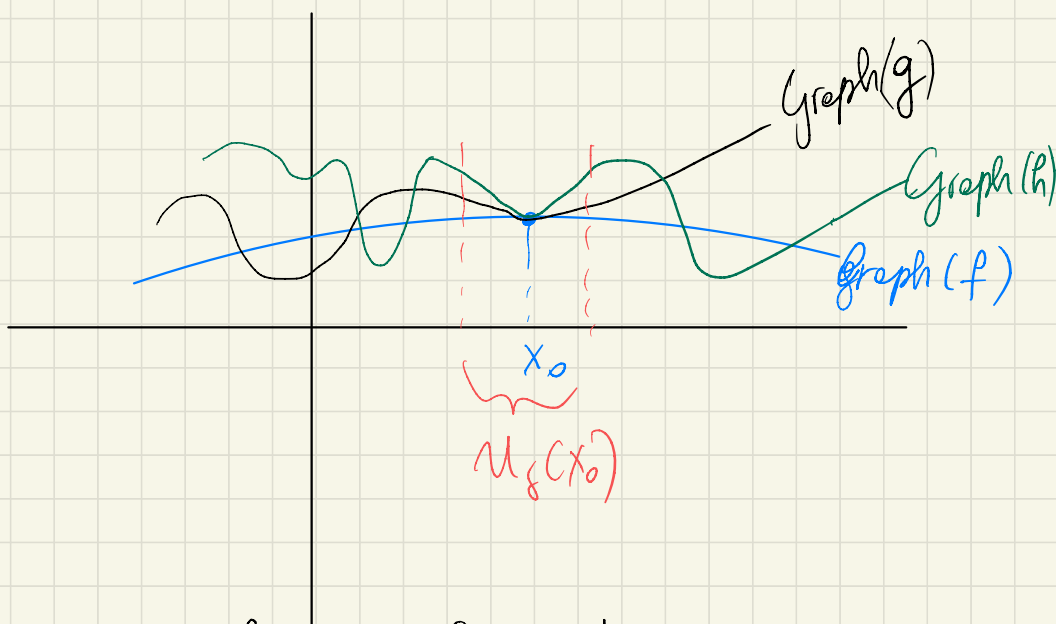
Satz 5.2.2 (und Polyn. Funktionen) $\Rightarrow R$ stetig in D

Satz 5.2.3

Es seien f, g, h drei reellwertige Funktionen mit Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ (bzw. $D \subseteq \mathbb{C}$). Nehmen wir an, dass f und h stetig in $x_0 \in D$ sind. Falls es eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ gibt, sodass für alle $x \in U_\delta(x_0)$ die folgende Ungleichheit gilt:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \text{und} \quad \underline{\underline{f(x_0) = h(x_0)}}$$

dann ist auch g in x_0 stetig.



Übung: Beweisen Sie Satz 5.2.3.

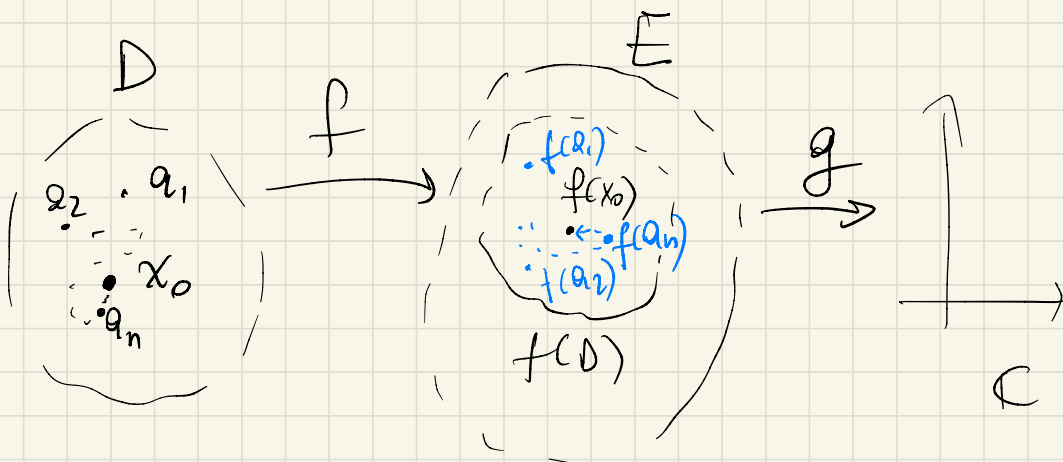
Hinweise:

(*) Direkter Beweis...

** Benutzen Satz 5.2.1 um zu beweisen, dass g stetig ist (in x_0) + Einschnürungsatz für Folgen

Satz 5.2.4

Es seien D und E Teilmengen von $\mathbb{C}$, und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g: E \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen, die verknüpft werden können (also, $f(D) \subseteq E$). Dann, falls f in x_0 stetig ist, und g in $f(x_0)$ stetig ist, ist auch $g \circ f$ in x_0 stetig.



Beweis : Satz 5.2.1 :

- (*) Es sei (a_n) eine beliebige Folge in D , die nach x_0 konvergiert.
Zu beweisen : $(g \circ f)(a_n)$ ^{Konvergiert} gegen $(g \circ f)(x_0)$
- Satz 5.2.1 $\Rightarrow$ $g \circ f$ stetig in x_0 ist
 f stetig in x_0 . Satz 5.2.1 (" $\Rightarrow$ ") impliziert,
dass $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ konvergiert
- (*) back : $(f(a_n))$ Folge in E , die nach $f(x_0)$ konvergiert

Satz 5.2.1. (" $\Rightarrow$ ") impliziert, dass,
 da g stetig in $f(x_0)$ ist, dann
 konvergiert $g(f(a_n))$ gegen $g(f(x_0))$

Dann: Gegeben eine beliebige (a_n) ,
 die nach x_0 konvergiert
 $\Rightarrow g(f(a_n))$ konv. gegen $g(f(x_0))$
 $\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \quad \parallel$
 $\quad \quad \quad (g \circ f)(a_n) \quad \quad \quad (g \circ f)(x_0)$

" $\Leftarrow$ " Satz 5.2.1 ($(ii) \Rightarrow (i)$)
 $\Rightarrow (g \circ f)$ stetig in x_0



5.3 Grenzwerte von Funktionen

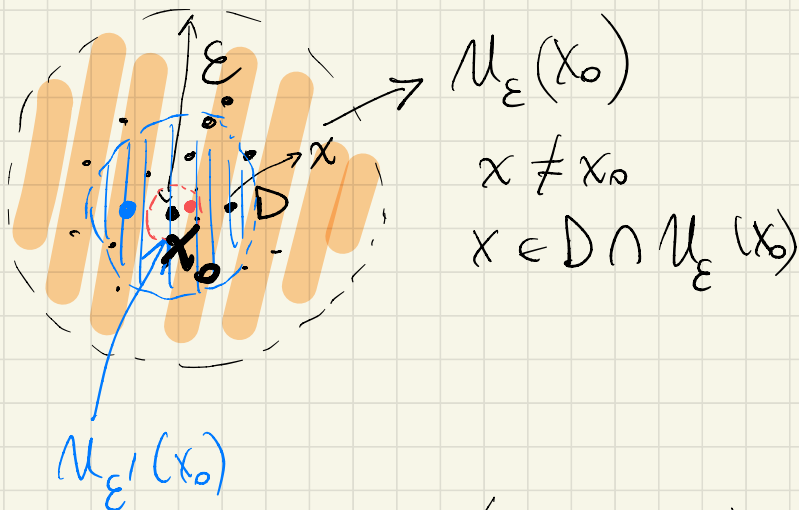
Definition 5.3.1

Es sei D eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** von D , falls für jedes $\epsilon > 0$ enthält die Menge $U_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ einen Punkt von D oder, mit anderen Worten, falls die Menge $(U_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ nicht leer ist.

Ein Punkt $x_0 \in D$, der kein Häufungspunkt ist, heißt **isoliert**, also: x_0 ist isoliert in D genau dann, wenn existiert eine Umgebung $U(x_0)$, sodass $U_{x_0} \cap D = \{x_0\}$.

$\rightarrow U(x_0)$
HP(D):



$$\epsilon = \frac{1}{n}$$

$$U_{\frac{1}{n}}(x_0) \leadsto \underline{x_n} \in \left(U_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap D \right) \setminus \{x_0\}$$

Man kann $x_n \neq x_{n'}$ wählen, $\forall n \neq n'$

Buch : Häufungspunkt einer Menge /
Häufungspunkt einer Folge

↓
 $\forall$ Umgebungen $U_\varepsilon(x_0)$
müssen wir ∞ -viele Indizes n
finden : $a_n \in U_\varepsilon(x_0) \dots$

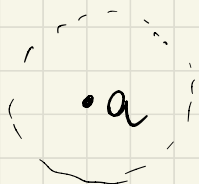
- Für $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$
Für (a_n) ist "a" ein Häufungspunkt
der Folge

$U_\varepsilon(a)$



• $D := \{a_n, n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$

"a" ist kein Häufungspunkt für D
a ist isoliert



$U(a) \cap \{a\} = \{a\}$

Beispiel: $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (q_n)$

(*) 0 ist ein Häufungspunkt der Folge (q_n) und

D := $\{q_n, n \in \mathbb{N}\} = \left\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} 0 \text{ ein Häufungspunkt der} \\ \text{Menge } D \end{array} \right] \checkmark$

Bem: Falls x_0 ein Häufungspunkt
D ist $\Rightarrow x_0$ gehört D
nicht unbedingt

Buch / Übung

* Häufungspunkte der Menge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

A Menge $A \subseteq \mathbb{R} ? \mathbb{R}^2 \dots \mathbb{R}^n$
 $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{U_\varepsilon(x)}$$

- $q \in \mathbb{Q} \quad \forall \underbrace{U_\varepsilon(q)}, \quad \forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$
es gibt immer (∞ -viele) rationale
Zahlen in $U_\varepsilon(q) \setminus \{q\}$
- $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \forall U_\varepsilon(q)$
es gibt immer (∞ -viele) rationale
Zahlen in $U_\varepsilon(q) \setminus \{q\}$

$\Rightarrow$ Die Menge der Häufungspunkte von
 $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}$

Definition 5.3.2

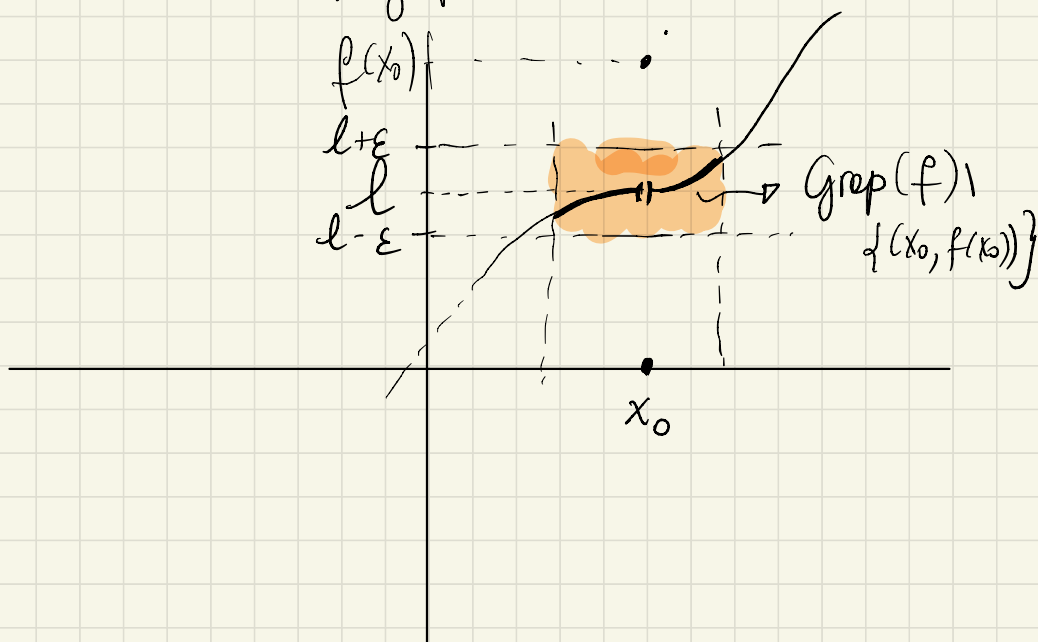
Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$) eine Funktion, und x_0 ein Häufungspunkt von D . Dann, wenn $l \in \mathbb{R}$ (bzw. $l \in \mathbb{C}$) existiert, sodass

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $x \in (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ ist $f(x) \in U_\epsilon(l)$ (5.3.1)

wir sagen, dass l der **Grenzwert** von f für x gegen x_0 ist, und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Warum x_0 Häufungspunkt?



$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$, sodass für alle $x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$, ist $|f(x) - l| < \epsilon$.
 $\downarrow$
 $x \in M_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$
 $\uparrow$
 $M_\epsilon(l)$
 (5.3.2)

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = f(x)$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$\leadsto$ Im Allgemeinen, $x_0 \notin D$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$$

$$f = g \quad \forall x \neq 1, \text{ wobei } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$x \mapsto x+1$

g stetig ist

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1+1 = 2$$

und, da $f=g \quad \forall x \neq 1$,

und da $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \underline{2}$$

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Satz 5.3.1

Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$) eine Funktion, und $x_0 \in D$. Dann ist f stetig in x_0 genau dann, wenn entweder

- x_0 ein Häufungspunkt von D ist, und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, oder
- x_0 kein Häufungspunkt von D ist.

Satz 5.3.2 (Analog zum Satz 5.2.1)

Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$) eine Funktion, und x_0 ein Häufungspunkt von D . Dann sind die folgenden äquivalent:

- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$;
- (ii) Für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \rightarrow x_0$ und $a_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$.

Satz 5.3.3 (Analog zum Satz 5.2.2)

Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen (bzw. $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{C}$) und x_0 ein Häufungspunkt von D .

Dann, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$, wir haben

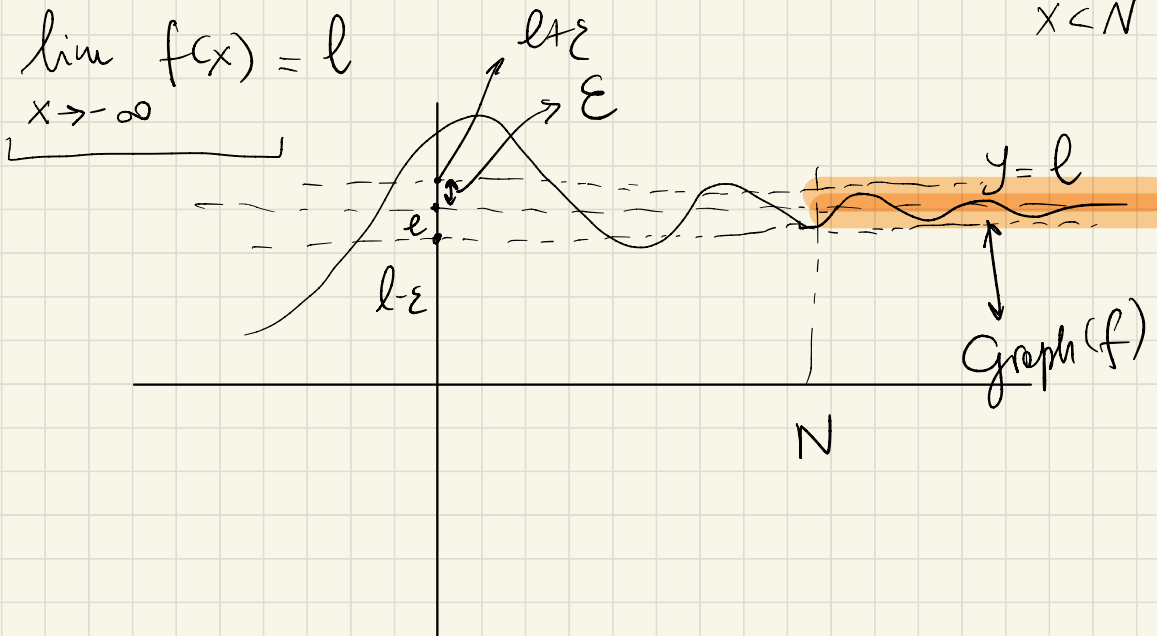
- (i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l'$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot l$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$);
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l'$;
- (iv) Falls $l' \neq 0$, es gibt eine Umgebung U von x_0 mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, und gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}$.

5.3.1 Grenzwerte für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

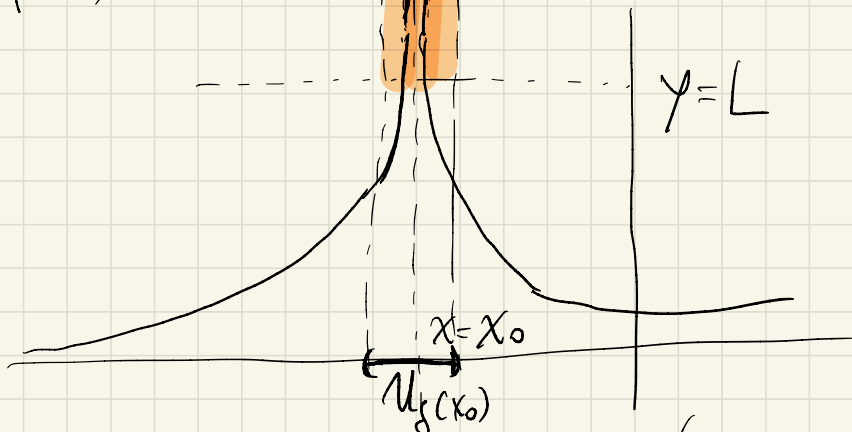
Definition 5.3.3

Es sei $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ~~ist~~, wobei D nach oben unbeschränkt ist. Dann

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} : \iff \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ sodass für alle } x \in D, x > N, \text{ gilt } |f(x) - l| < \epsilon.$$



• $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$



$\forall L$

, $\exists \delta = \delta(L) : \forall x \in (U_\delta(x_0) \cap D) \setminus \{x_0\}$

$f(x) > L$

• Ähnlich $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \rightarrow \underline{f(x) < L}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

; $\forall L \in \mathbb{R}$, $\exists M = M(L)$

$\forall x > M, x \in D$

ist $f(x) > L$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$

5.4 Überblick über die euklidische Topologie

Es sei A eine nicht-leere Menge in $\mathbb{R}^n$, und x ein Punkt in $\mathbb{R}^n$. Der Punkt ist ein

- **innerer Punkt von A** , falls eine offene Umgebung $U_\epsilon(x)$ von x existiert, die ganz in A liegt, d. h.

$$\exists \epsilon > 0, \text{ sodass } U_\epsilon(x) \subseteq A;$$

(Euklidischer Abstand :

$$d(x, y) = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

$$x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

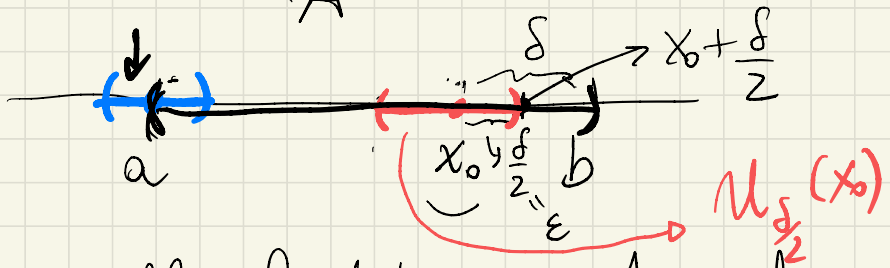
$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

d mg Umgebungen

$$U_\epsilon(\underline{x_0}) = \{y \in \mathbb{R}^n : \underline{d(x, y)} < \epsilon\}$$



Beispiel: $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{= A}$



Behauptung: alle Punkte von A sind
innere Punkte

$$a < x_0 < b, \quad x_0 \in A$$

$$a < x_0 - \delta < x_0 - \frac{\delta}{2} < x_0 < x_0 + \frac{\delta}{2} < b \quad (= x_0 + \delta)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}$

$$\Rightarrow \forall x : \underbrace{x_0 - \frac{\delta}{2} < x < x_0 + \frac{\delta}{2}}_{\text{ind in } A}$$

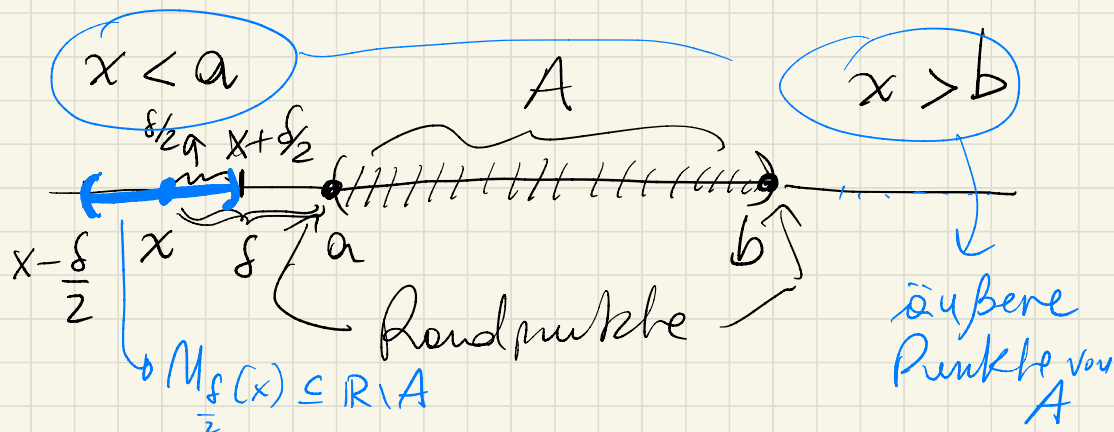
ind in A

$$\Rightarrow U_{\delta/2}(x_0) \subseteq A$$

von A

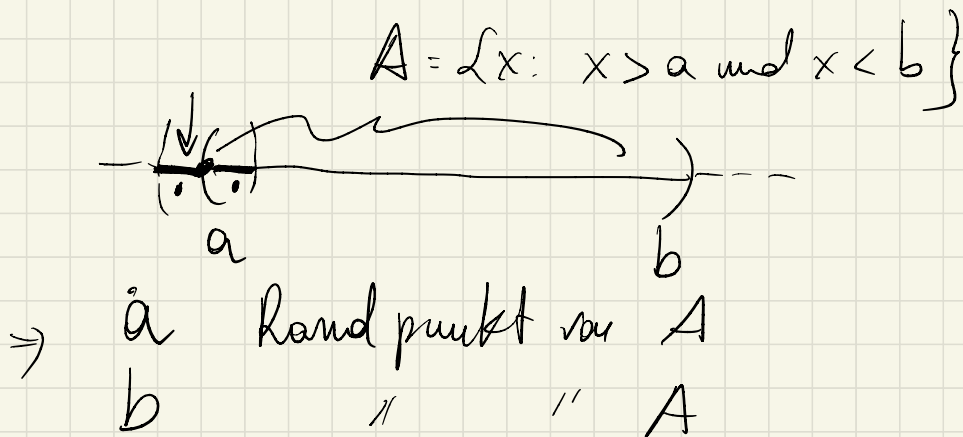
- **äußerer Punkt von A**, falls x ein innerer Punkt des Komplementes ist, d. h.

$$\exists \epsilon > 0, \text{ sodass } U_\epsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A;$$



- **Randpunkt von A**, wenn jede Umgebung $U_\epsilon(x)$ wenigstens einen Punkt mit A und einen Punkt mit $\mathbb{R}^n \setminus A$ gemeinsam hat, d. h.

$$\forall \epsilon > 0, U_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } U_\epsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset.$$



Beispiele:

(i) $\underbrace{(a, b)}_A$: Innere Punkte ist (a, b)
Randpunkte $\{a, b\}$
Äußere Punkte:
 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

(ii) $\underbrace{[a, b)}$ 

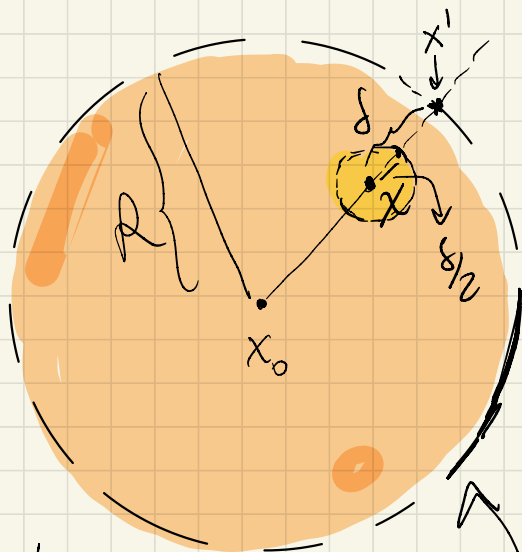
Innere Punkte $\rightarrow (a, b)$

Randpunkte $\rightarrow \{a, b\}$

Äußere Punkte $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

(iii) $\underbrace{[a, b]}$: Innere (a, b)
Randpunkte $\{a, b\}$
Äußere: $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

(iv)



$$A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$A = \bigcup_R (x_0)$$

- Alle Punkte in A sind innere Punkte
- Rand (A) : Kreislösie

$$K := \{y \in \mathbb{R}^2 : |y - x_0| = R\}$$

Äußere Punkte (A) : $y \in \mathbb{R}^2 : |y - x_0| > R$

(v) $\underbrace{A = \mathbb{Q}}_{r \in \mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}$

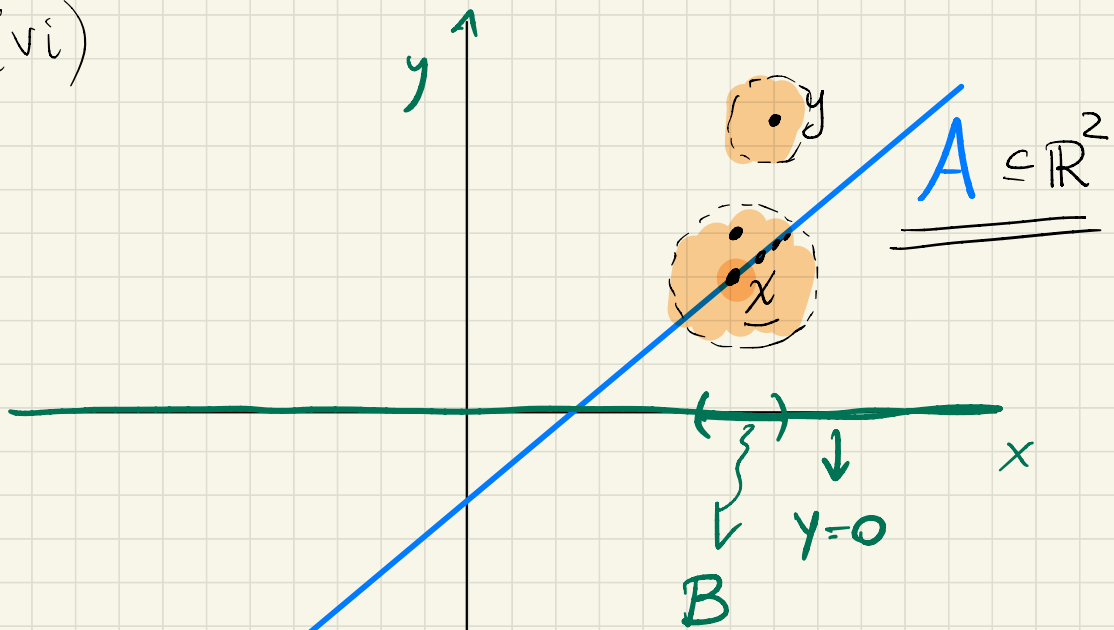
$$r \in \mathbb{R} : \left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \text{ enthält } (r - \varepsilon, r + \varepsilon) \\ \text{immer rationale und irrationale} \\ \text{Zahlen} \end{array} \right]$$

r ist nie
 r ist "

ein innerer Punkt
" äußerer Punkt

Alle Punkte
 $r \in \mathbb{R}$ sind
Randpunkte
von $\mathbb{Q}$

(vi)



Randpunkte von $A = \underline{A}$

Bmk: Offene Mengen in $\mathbb{R}^n$ und "Dimension"

↳ A hat keine inneren Punkte

Äußere Punkte: $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{A}$