Prof. Silvia Sabatini
Dr. Alexander Caviedes Castro
Universität zu Köln
01.02.2021

ANALYSIS I
Übungsblatt 12

Diese Übungen müssen bis spätestens Montag 08.02.2021, 15 Uhr bei ILIAS als PDF-Datei abgegeben werden. Schreiben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer, Ihre Übungsgruppe und Ihren Übungsgruppenleiter auf Ihre Abgabe.

Die **Präsenzaufgaben** werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert. Sie sollten sich also bis dahin Gedanken zu diesen Aufgaben gemacht haben, es sind aber keine Lösungen abzugeben. Diese Aufgaben zählen nicht für die Klausurzulassung und werden nicht korrigiert.

Die **Hausaufgaben** sind schriftlich zu bearbeiten, die Lösungen sollen jeweils in der folgenden Woche abgegeben werden. In der Woche darauf werden die Aufgaben in den Übungen besprochen. Diese Aufgaben reichen aus, um 100% der Übungspunkte zu erhalten.

Die **Extra Hausaufgaben** sind schwierige Aufgaben und Sie sind eingeladen, sie zu lösen. Sie können die Lösungen dieser Aufgaben schreiben und abgeben, um zusätzliche Übungspunkte zu erreichen. Sie werden in der nächsten Übungsklasse diskutiert.

Präsenzaufgabe 1. Es sei I ein offenes Interval und $f : I \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar. Es sei $x_0 \in I$ und nehmen wir an, dass $f'(x_0) = 0$ gilt. Zeigen Sie:

- Wenn $f''(x_0) > 0$, ist x_0 ein lokales Minimum von f.
- Wenn $f''(x_0) < 0$, ist x_0 ein lokales Maximum von f.

Präsenzaufgabe 2.

- Es sei Z' eine Verfeinerung einer Zerlegung Z des Intervalles $[a, b]$ und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Beweisen Sie, dass wenn $Z' = Z \cup \{w\}$, d.h. wenn wir Z' durch Hinzufügen von einem Punkt erhalten, dann
$$U(Z, f) \leq U(Z', f) \quad \text{und} \quad O(Z', f) \leq O(Z, f).$$
- Beweisen Sie, dass jede monotone, beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist.

Hausaufgabe 1. Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen:

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\Big((1 + e^{1/n})^{-1} - \dfrac{2n-1}{4n}\Big)$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n^2} - 1}{\log(\sqrt[n]{n})}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{1/n} - 1}{\log(\sqrt[n]{n})}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(2n(n-1) - n^3 \log\big(1 + \sin\big(\dfrac{2}{n}\big)\big)\Big)$

Hausaufgabe 2. Die Fibonacci-Folge $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ist durch das rekursive Bildungsgesetz
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$
mit den Anfangswerten
$$f_1 = f_2 = 1$$
definiert.

- Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von $F(x) = \dfrac{1}{1-x-x^2}$ um $x_0 = 0$ gleich
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$$
ist.

  Hinweis: Berechnen Sie die n-te Ableitung von $(1-x-x^2)F(x)$ in $x = 0$ mit der Hilfe der Leibnizregel.

- Es seien a und b zwei verschiedene reelle Zahlen, die ungleich Null sind. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von $G(x) = \dfrac{1}{(a-x)(b-x)}$ um $x_0 = 0$ gegeben ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b-a}\Big(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\Big)x^n\,.$$

- Zeigen Sie, dass
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Hausaufgabe 3.

- Es sei I ein offenes Interval und f eine n-mal differenzierbare Funktion. Es sei $x_0 \in I$ und nehmen wir an, dass
$$f^k(x_0) = 0 \text{ für alle } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$
Zeigen Sie, dass die Funktion
$$F : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{(x-x_0)^n} & \text{falls } x \neq x_0, \\ \dfrac{f^n(x_0)}{n!} & \text{falls } \; x = x_0 \end{cases}$$
stetig ist.

- Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ an, so dass $f(0) = 0$ gilt aber die Funktion
$$F : (-1,1) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{falls } \; x = 0 \end{cases}$$
nicht differenzierbar in $x = 0$ ist.

Hausaufgabe 4.

- Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$$

existiert und

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$$

gilt.

- Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$$

existiert. Ist die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Extra Hausaufgabe 1. Thorbergsson 94-2 Aufgabe 10, Sweers Nachklausur 2007 Aufgaben 7 und 9, Sweers Probeklausur 2007, Aufgaben 11 und 13.