KAPITEL 2

MATRIZEN

2.1 Matrizen: Definitionen und Operationen

Definition 2.1.1

• Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Dann heißt das "rechteckige Schema"

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

eine $m \times n$-Matrix. Hier ist $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ (d.h. dass A eine Matrix mit reellen Koeffizienten ist). Diese $m \times n$ Zahlen heißen die *Einträge* der Matrix. Bezeichnet a_{ij} das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

• Die Menge aller $m \times n$-Matrizen wird durch $M_{m,n}(\mathbb{R})$ bezeichnet sein. Man schreibt dafür

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m, \\ 1 \le j \le n}}$$

oder kurz

$$A = (a_{ij}),$$

wenn die Laufbereiche der Indizes klar sind. Das Paar (m, n) wird der *Typ* der Matrix genannt.

• Die Indizes i und j geben die i-te Zeile und j-te Spalte an. Genauer gesagt, ist die erste Zeile von A gegeben durch $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, die zweite durch $(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, ..., die m-te durch $(a_{m1}, a_{12}, \dots, a_{mn})$. Ganz analog ist die j-te Spalte von A gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

für alle $j = 1, \dots, n$.

• Eine $1 \times n$-Matrix

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

wird *n-dimensionaler Zeilenvektor* genannt. Analog wird eine $m \times 1$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

m-dimensionaler Spaltvektor genannt.

• Eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten wird *quadratische Matrix* genannt. Oft werden wir die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit $M_n(\mathbb{R})$ bezeichnen.

Beispiel 2.1.1
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \\ \sqrt{3} & \frac{\pi}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

ist eine 2×3-Matrix mit reellen Einträgen, also $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

Ihre zwei Zeilen sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\pi}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

und ihre drei Spalten durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Element in der 2-ten Zeile und 1-ten Spalte ist $\sqrt{3}$.

2.1.1 Matrizenaddition

Definition 2.1.2
Es seien $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{hk})$ zwei Matrizen. Dann können wir A und B addieren, wenn sie vom selben Typ sind. Also, es sei A des Typs (m, n) und B des Typs (p, q), dann können wir A und B addieren genau dann, wenn $m = p$ und $n = q$. In diesem Fall ist $A + B$ gegeben durch

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Beispiel 2.1.2
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann können wir A und B *nicht* addieren, weil A des Typs $(2, 2)$ ist (also $A \in M_2(\mathbb{R})$) und B des Typs $(2, 3)$.

Die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \pi & -2 \\ \frac{1}{5} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

können addiert werden (ihr Typ ist in beiden Fällen $(2, 3)$) und ihre Summe gegeben durch

$$C + B = \begin{pmatrix} 4 & 4 + \pi & -2 \\ \frac{8}{15} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Es sei $(\mathbb{R}, +)$ die Menge aller reellen Zahlen mit Operation $+$ (Addition). Also, ist $+$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. *Assoziativität*: Für alle a, b und $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

2. *Kommutativität*: Für alle $a, b \in R$ gilt

$$a + b = b + a$$

3. *Existenz des neutralen Elements*: Das Element $0 \in \mathbb{R}$ erfüllt

$$a + 0 = 0 + a = a$$

   für alle $a \in \mathbb{R}$.

4. *Existenz des inversen Elements* : Für alle $a \in \mathbb{R}$, gibt es ein Element $b \in \mathbb{R}$, sodass

$$a + b = b + a = 0.$$

   Dieses Element ist natürlich gegeben durch $-a$.

Jetzt nehmen wir die Addition $+$, betrachtet als Operation zwischen Matrizen desselben Typs:

$$+\colon M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$$

Wir möchten dieselben Eigenschaften der Operation $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beweisen. Zuerst brauchen wir zwei neue Konzepte.

Definition 2.1.3

• Für jedes Paar (m, n) heißt die Matrix $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, deren Einträge alle gleich Null sind, die *Nullmatrix* (des Typs (m, n)).

• Für jede $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ heißt die Matrix $-A := (-a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ das *(additive) inverse Element*.

Beispiel 2.1.3

Es sei

$$C = \begin{pmatrix} 2 & \pi & -2 \\ \frac{1}{5} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dann

$$-C = \begin{pmatrix} -2 & -\pi & 2 \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und

$$C + (-C) = \begin{pmatrix} 2 & \pi & -2 \\ \frac{1}{5} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -\pi & 2 \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Von der Definition der Matrizenaddition kann man leicht die folgende Proposition nachprüfen.

Proposition 2.1.1
Es sei $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ die Menge aller reellen Matrizen des Typs (m, n) mit Matrizenaddition

$$\begin{aligned} +\colon M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) &\to M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ (A, B) &\mapsto A + B. \end{aligned}$$

Dann erfüllt das Paar $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ folgenden Eigenschaften:

1. *Assoziativität: Für alle A, B und $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gilt*

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

2. *Kommutativität: Für alle $A, B \in M_{m,n}(R)$ gilt*

$$A + B = B + A$$

3. *Existenz des neutralen Elements: Das Element $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ erfüllt*

$$A + O = O + A = A$$

   für alle $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

4. *Existenz des inversen Elements: Für alle $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gibt es ein Element $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, sodass*

$$A + B = B + A = O.$$

   Dieses Element ist gegeben durch $-A$.

Fragen und Vertiefungen 2.1.1
Wir haben Matrizen mit *reellen* Koeffizienten definiert, d.h. Matrizen $A = (a_{ij})$ mit $a \in \mathbb{R}$ für alle i und j. Im Prinzip kann man auch Matrizen mit *anderen Koeffizienten* definieren. Zum Beispiel sei K entweder die Menge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$, oder $\mathbb{Z}$

oder $\mathbb{Q}$. Es sei $M_{m,n}(K)$ die Menge aller Matrizen mit Koeffizienten in K. Natürlich gilt

$$M_{m,n}(\mathbb{N}) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{N}_0) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{Z}) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{Q}) \subsetneq M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{N}), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \text{ (und } \notin M_2(\mathbb{N}_0))$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}), \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ (und } \notin M_2(\mathbb{Q}))$$

Für solche Mengen kann man die Addition + definieren.

• Für welche K erfüllt $(M_n(K), +)$ die vier Eigenschaften in Proposition 2.1.1? Für jede K, beschreiben Sie welche Eigenschaften von Proposition 2.1.1 erfüllt werden und welche nicht.

2.1.2 Skalarmultiplikation

Jetzt wollen wir eine andere Operation definieren, die einen Skalar k (d.h. $k \in \mathbb{R}$) und eine Matrix einbezieht.

Definition 2.1.4
Die *Skalarmultiplikation* ist eine Operation

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M_{m,n}(\mathbb{R}) & \to & M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ (k, A) & \mapsto & kA \end{array}$$

wobei die Matrix kA gegeben ist durch (ka_{ij}) für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$. Hier a_{ij}, für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$, bezeichnen die Koeffizienten der Matrix A.

Beispiel 2.1.4

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \pi \end{pmatrix} \quad \text{dann} \quad 3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 3\pi \end{pmatrix}$$

Vorlesung 4 - 31.10.2016

Wir haben folgende

Proposition 2.1.2
Die Skalarmultiplikation erfüllt folgende Eigenschaften:

5. $(h+k)A = hA + kA$ *für alle* $h, k \in \mathbb{R}$ *und* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$*;*

6. $h(A+B) = hA + hB$ *für alle* $h \in \mathbb{R}$ *und* $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$*;*

7. $hkA = h(kA)$ *für alle* $h, k \in \mathbb{R}$ *und* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$*;*

8. $1A = A$ *für alle* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$*.*

Beweis. Übung. □

2.1.3 Matrizenmultiplikation

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

ein n-dimensionaler Zeilenvektor, und

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ein n-dimensionaler Spaltvektor. Das *Produkt* dieser Matrizen ist die folgende Zahl:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \,.$$

Im Allgemeinen seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$: also ist die Anzahl der Spalten von A *genau* die Anzahl der Zeilen von B. Dann können wir wie folgt eine neue Matrix definieren, bezeichnet mit $A \cdot B$ (oder kürzer AB), die in $M_{m,p}(\mathbb{R})$ ist. Es seien $A^{(i)}$ die i-te Zeile von A, d.h. $A^{(i)} = (a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in})$, und $B_{(k)}$ die k-te Spalte von B, d.h.

$$B_{(k)} = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

Wie wir oben erklärt haben, können wir $A^{(i)}$ mit $B_{(k)}$ multiplizieren und erhalten

$$C_{ik} := A^{(i)} \cdot B_{(k)} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \in \mathbb{R}\,.$$

Definition 2.1.5
Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Dann ist $A \cdot B$ die Matrix in $M_{m,p}(\mathbb{R})$ definiert als

$$A \cdot B = (C_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$$

Beispiel 2.1.5
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann können wir $A \cdot B$ *nicht* definieren, weil $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Aber $B \cdot A$ kann definiert werden, und es ist gegeben durch

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 13 & 18 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})\,.$$

Bemerkung 2.1.1
Das obige Beispiel sagt uns, dass wenn $A \cdot B$ definiert ist, kann $B \cdot A$ nicht definiert sein.

Im Allgemeinen, wenn $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{r,s}(\mathbb{R})$, dann

- $A \cdot B$ ist definiert (und des Typs (m, s)), genau dann wenn $n = r$;
- $B \cdot A$ ist definiert (und des Typs (r, n)), genau dann wenn $s = m$;
- $A \cdot B$ *und* $B \cdot A$ sind definiert, genau dann wenn $n = r$ *und* $s = m$. *Aber* im Allgemeinen ist

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A!}$$

Zum Beispiel, es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann sind

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definition 2.1.6
- Das *Kronecker-Delta* (oder *Kronecker-Symbol*) ist das mathematische Zeichen definiert als

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j\,. \end{cases}$$

Dabei können i und j Elemente einer beliebigen Indexmenge I sein.

- Die $n \times n$- *Einheitsmatrix* I_n ist definiert als

$$I_n := (\delta_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

  Zum Beispiel haben wir

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fortan wird das Produkt $A \cdot B$ mit AB bezeichnet.

Satz 2.1.3 *(a) Es seien $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $C, D \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $(A+B)C = AC + BC$;
2. $A(C+D) = AC + AD$;
3. $A(kC) = k(AC) = (kA)C$;
4. $AI_n = A$, $I_nC = C$.

Eigenschaften 1. und 2. heißen Distributivgesetz.

(b) Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{p,r}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$(AB)C = A(BC)\,. \tag{2.1.2}$$

Eigenschaft (2.1.2) *heißt Assoziativität des Produkts.*

Beweis. (a)
Es seien $A^{(i)} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots a_{in})$ (bzw. $B^{(i)} = (b_{i1}\ b_{i2}\ \cdots b_{in})$) die i-te Zeile von A (bzw. B), wobei $i = 1, \ldots, m$, und

$$C_{(k)} = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

die k-te Spalte von C, wobei $k = 1, \ldots, p$. Das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der Matrix $(A+B)C$ ist gegeben durch

$$(A+B)^{(i)}C_{(k)} = (a_{i1}+b_{i1})c_{1k} + (a_{i2}+b_{i2})c_{2k} + \cdots + (a_{in}+b_{in})c_{nk}$$

und das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte der Matrix $AC + BC$ ist gegeben durch

$$A^{(i)}C_{(k)} + B^{(i)}C_{(k)} = (a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots a_{in}c_{nk}) + (b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \cdots b_{in}c_{nk}),$$

also 1. folgt.

Der Beweis der Eigenschaften 2. und 3. ist eine Übung.

4. Das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix AI_n ist gegeben durch

$$A^{(i)}(I_n)_{(j)} = a_{i1}0 + \cdots a_{ij-1}0 + a_{ij}1 + a_{ij+1}0 + \cdots + a_{in}0 = a_{ij}.$$

Weil i und j beliebig sind, erhalten wir $AI_n = A$. Ähnlich kann man beweisen, dass $I_nC = C$.

(b) Zuerst bemerken wir, dass $AB \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, also können wir die Matrizen AB und C multiplizieren. Ähnlich ist BC in $M_{n,r}(\mathbb{R})$, also können wir A mit BC multiplizieren. Das Element in der i-ten Zeile und h-ten Spalte der Matrix $(AB)C$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}(AB)^{(i)}C_{(h)} &= (A^{(i)}B_{(1)})c_{1h} + (A^{(i)}B_{(2)})c_{2h} + \cdots + (A^{(i)}B_{(p)})c_{ph} \\ &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})c_{1h} + \\ &\quad +(a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})c_{2h} + \cdots \\ &\quad \cdots + (a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{2p} + \cdots + a_{in}b_{np})c_{ph} = \\ &= \textstyle\sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le p}} a_{ij}b_{jk}c_{kh}\,.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

wobei $(AB)^{(i)}$ die i-te Zeile der Matrix AB ist.

Andererseits ist das Element in der i-ten Zeile und h-ten Spalte der Matrix $A(BC)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}A^{(i)}(BC)_{(h)} &= a_{i1}(B^{(1)}C_{(h)}) + a_{i2}(B^{(2)}C_{(h)}) + \cdots + a_{in}(B^{(n)}C_{(h)}) \\ &= a_{i1}(b_{11}c_{1h} + b_{12}c_{2h} + \cdots + b_{1p}c_{ph}) + \\ &\quad +a_{i2}(b_{21}c_{1h} + b_{22}c_{2h} + \cdots + b_{2p}c_{ph}) + \cdots \\ &\quad \cdots + a_{in}(b_{n1}c_{1h} + b_{n2}c_{2h} + \cdots + b_{np}c_{ph}) = \\ &= \textstyle\sum_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le p}} a_{ij}b_{jk}c_{kh}\,.\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Weil i und h beliebig sind, nach (2.1.3) und (2.1.4) können wir schließen, dass $(AB)C = A(BC)$.

□

Bemerkung 2.1.2
Nach (2.1.2) folgt, dass das Produkt von mehreren Matrizen definiert werden kann.

Genauer gesagt, seien es $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$. Dann können wir nach (2.1.2) die Matrix $ABC \in M_{m,s}(\mathbb{R})$ entweder als $A(BC)$ oder als $(AB)C$ definieren. Mit anderen Worten, (2.1.2) erlaubt uns, die Klammern zu "vergessen".

Gegeben Matrizen A_i, $i = 1, \ldots, N$, sodass A_i mit A_{i+1} multipliziert werden kann für alle $i = 1, \ldots, N-1$, das Produkt

$$A_1 A_2 \cdots A_N$$

definiert werden kann als, z.B. $(\ldots((A_1A_2)A_3 \cdots)A_N)$. Hier "zum Beispiel" bedeutet, dass nach (2.1.2) die Ordnung der Multiplikation gewählt werden kann, weil das Ergebnis dasselbe ist.

1. ___

Vorlesung 5 - 03.11.2016

2.1.4 Die Transponierte einer Matrix

Definition 2.1.7
Es sei A eine Matrix des Typs (m, n). Mit A^T bezeichnen wir die Matrix des Typs (n, m), die als Spaltenvektoren genau die Zeilenvektoren von A hat. Äquivalent gesagt, es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

dann

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Die Matrix A^T wird *Transponierte* der Matrix A genannt.

Beispiel 2.1.6
Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1.4
Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dann $(A^T)^T = A$.

Beweis. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

dann

$$(A^T)^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

□

Definition 2.1.8

- Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, falls

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{für alle } \; i,j = 1,\ldots,n\,. \tag{2.1.5}$$

  Also sind die Einträge spiegelsymmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale.

  Mit anderen Worten, ist A symmetrisch genau dann, wenn

$$A^T = A\,.$$

- Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ heißt *antisymmetrisch* (oder *schiefsymmetrisch*), falls

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{für alle } \; i,j = 1,\ldots,n\,. \tag{2.1.6}$$

  Mit anderen Worten, ist A antisymmetrisch genau dann, wenn

$$A^T = -A\,.$$

Bemerkung 2.1.3
Gleichung (2.1.6) impliziert, dass wenn A antisymmetrisch ist, dann $a_{ii} = 0$ für alle $i = 1,\ldots,n$.

Beispiel 2.1.7
Die folgenden Matrizen sind symmetrisch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 5 & \frac{1}{6} & -7 \end{pmatrix}$$

und die folgenden antisymmetrisch

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ -5 & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Fragen und Vertiefungen 2.1.2
In Hausaufgabe 2 sollen Sie beweisen, dass gegeben $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, dann gilt

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad \text{und} \quad (AC)^T = C^T A^T \,.$$

Mit Hilfe von obigen Gleichungen, beantworten Sie folgende Fragen:

(i) Seien A und B symmetrische Matrizen, also $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- Ist $A + B$ symmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" geben Sie ein Gegenbeispiel.
- Ist AB symmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" finden Sie Bedingungen von A und B, sodass AB symmetrisch ist.

(ii) Seien A und B antisymmetrische Matrizen, also $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- Ist $A + B$ antisymmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" geben Sie ein Gegenbeispiel.
- Ist AB antisymmetrisch? Wenn "Ja", geben Sie einen Beweis. Wenn "Nein" finden Sie ein Gegenbeispiel.

2.2 Invertierbare Matrizen

Definition 2.2.1
Es sei A eine quadratische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dann sagen wir, dass A *invertierbar* ist, wenn es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ gibt, sodass

$$AB = BA = I_n \,. \tag{2.2.1}$$

Die Matrix B heißt die *Inverse* der Matrix A.

Beispiel 2.2.1
Die Matrix I_n ist invertierbar für alle $n \in \mathbb{N}$, mit Inverse gegeben durch I_n.

Satz 2.2.1
Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix. Dann gilt:

(a) Die Inverse von A ist eindeutig definiert, d. h. wenn B_1 und B_2 existieren, die (2.2.1) erfüllen, dann $B_1 = B_2$.

Wir bezeichnen mit A^{-1} die Inverse von A.

(b) Die Matrix A^{-1} ist auch invertierbar, und $(A^{-1})^{-1} = A$.

(c) Wenn A_1 und A_2 invertierbar sind, dann ist A_1A_2 invertierbar und $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Beweis. (a) Es seien $B_1, B_2 \in M_n(\mathbb{R})$ die (2.2.1) erfüllen. Dann gilt

$$B_1 = B_1 I_n = B_1(AB_2) = (B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2\,,$$

wobei die obigen Gleichungen gelten aufgrund des Satzes 2.1.3.

(b) Wir sollen *die* Matrix B finden (B ist eindeutig definiert wegen (a)), sodass

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n\,.$$

Weil A^{-1} die Inverse der Matrix A ist, haben wir $A^{-1}A = A^{-1}A = I_n$, also $B = A$.

(c) Wir sollen die Matrix B finden, sodass $(A_1A_2)^{-1}B = B(A_1A_2)^{-1} = I_n$. Es genügt zu beweisen, dass

$$(A_1A_2)(A_2^{-1}A_1^{-1}) = (A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2) = I_n\,.$$

Wir haben

$$(A_1A_2)(A_2^{-1}A_1^{-1}) = A_1(A_2A_2^{-1})A_1^{-1} = (A_1I_n)A_1^{-1} = A_1A_1^{-1} = I_n\,.$$

Ähnlich kann man beweisen, dass $(A_2^{-1}A_1^{-1})(A_1A_2) = I_n$. Also ist $(A_1A_2)^{-1}$ genau $A_2^{-1}A_1^{-1}$. □

Fragen und Vertiefungen 2.2.1
Es seien $A_1, \ldots, A_k$ invertierbaren Matrizen. Beweisen Sie, dass $A_1 \cdots A_k$ invertierbar ist, und die Inverse ist gegeben durch $A_k^{-1} \cdots A_1^{-1}$.

Beispiel 2.2.2
(1) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen, dass A invertierbar ist und finden die Inverse A^{-1}. Also sollen wir eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

finden, sodass

$$AB = I_2 \quad \text{und} \quad BA = I_2, \tag{2.2.2}$$

deshalb $B = A^{-1}$. Es sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, wobei a, b, c und d Unbekannte sind. Wir können $AB = I_2$ in folgendes Gleichungssystem umsetzen:

$$\begin{cases} a \phantom{{}+b} + c \phantom{{}+d} = 1 \\ \phantom{a+{}} b \phantom{{}+c} + d = 0 \\ 2a \phantom{{}+b} + c \phantom{{}+d} = 0 \\ \phantom{a+{}} 2b \phantom{{}+c} + d = 1 \end{cases}$$

Man kann nachprüfen, dass das System genau eine Lösung hat, die gegeben ist durch $(a,b,c,d) = (-1,1,2,-1)$, also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Sie können auch nachprüfen, dass $A^{-1}A = I_2$.

(2) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen, dass A *nicht* invertierbar ist. Also, gibt es keine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sodass $AB = I_2$ und $BA = I_2$. In der Tat, ist das Gleichungssystem äquivalent zur Gleichung $BA = I_2$ gegeben durch

$$\begin{cases} a + 2b & & = 1 \\ & 0 & = 0 \\ & c + 2d & = 0 \\ & 0 & = 1 \end{cases}$$

Nach der letzten Gleichung können wir schließen, dass das System keine Lösung hat. Also ist A nicht invertierbar.

Definition 2.2.2
Die Teilmenge von $M_n(\mathbb{R})$ von invertierbaren Matrizen ist bezeichnet durch $GL_n(\mathbb{R})$.

Bemerkung 2.2.1
Wir bemerken, dass:

- Wenn A und B in $GL_n(\mathbb{R})$ sind, dann ist auch AB in $GL_n(\mathbb{R})$ (Satz 2.2.1 (c)).
- $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ (Beispiel 2.2.1).
- Wenn $A \in GL_n(\mathbb{R})$, dann $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ (Satz 2.2.1 (b)).

Fragen und Vertiefungen 2.2.2

- Ist die Nullmatrix $O \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar?
- Gegeben $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ist $-A \in GL_n(\mathbb{R})$?
- Gegeben $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$, ist $A + B \in GL_n(\mathbb{R})$?

2.2.1 Invertierbare Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Es sei

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases} \tag{2.2.3}$$

ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten. Wir können (2.2.3) als

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

schreiben, wobei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir an, dass die Matrix A invertierbar ist mit Inverse A^{-1}. Dann hat (2.2.3) eine einzige Lösung $\mathbf{y} = (y_1\, y_2\, \cdots\, y_n)$, die gegeben ist durch

$$(A^{-1}\mathbf{b})^T.$$

In der Tat, es sei $\mathbf{y} = (A^{-1}\mathbf{b})^T$, dann ist $\mathbf{y}$ eine Lösung des Systems (2.2.3), weil

$$A(\mathbf{y}^T) = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I_n\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Umgekehrt, es sei $\mathbf{y}' = (y'_1\, y'_2\, \cdots\, y'_n)$ eine Lösung des Systems (2.2.3), dann sollen wir beweisen, dass $\mathbf{y}' = (A^{-1}\mathbf{b})^T$. In der Tat haben wir $A(\mathbf{y}')^T = \mathbf{b}$, also $A^{-1}A(\mathbf{y}')^T = A^{-1}\mathbf{b}$, und $(\mathbf{y}')^T = A^{-1}\mathbf{b}$ oder, äquivalent gesagt, $\mathbf{y}' = (A^{-1}\mathbf{b})^T$.

Bemerkung 2.2.2
Wenn $\mathbf{b}$ der Null-Spaltvektor ist, d. h. wenn das System (2.2.3) homogen und A invertierbar ist, dann ist die triviale Lösung die einzige Lösung von (2.2.3).

Vorlesung 6 - 07.11.2016

2.2.2 Umkehrbare Abbildungen und invertierbare Matrizen

Jede $n \times n$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ definiert eine "Transformation" oder Abbildung von $M_n(\mathbb{R})$ nach $M_n(\mathbb{R})$, die wir mit $\mathcal{L}_A$ bezeichnen. In der Tat, gegeben A, können wir $\mathcal{L}_A$ als

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{L}_A\colon & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & B & \mapsto & A \cdot B \end{array} \tag{2.2.4}$$

definieren, also $\mathcal{L}_A(B) = A \cdot B$ für alle $B \in M_n(\mathbb{R})$.

Bemerkung 2.2.3

- Wir können auch eine Abbildung $\mathcal{R}_A$ als

$$\begin{array}{rlcl} \mathcal{R}_A\colon & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & B & \mapsto & B \cdot A \end{array} \tag{2.2.5}$$

  definieren. Bemerken Sie, dass im Allgemeinen $\mathcal{L}_A \neq \mathcal{R}_A$, weil (wenn $n > 1$) die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist!

- Wir haben die Abbildung (2.2.4) (bzw. (2.2.5)) mit $\mathcal{L}_A$ (bzw. mit $\mathcal{R}_A$) bezeichnet, weil wir die Matrix A *links* (bzw. *rechts*) von B multipliziert haben.

Mit der Abbildung $\mathcal{L}_A$ haben wir die Menge $M_n(\mathbb{R})$ in

$$\mathcal{L}_A(M_n(\mathbb{R})) = \{A \cdot B \mid B \in M_n(\mathbb{R})\}$$

"überführt". Zum Beispiel, wenn $A = O$ (die Nullmatrix), dann wird $M_n(\mathbb{R})$ die Menge $\mathcal{L}_O(M_n(\mathbb{R})) = \{O\}$. Natürlich ist die Abbildung $\mathcal{L}_O$ nicht *umkehrbar*, d. h. es gibt keine Matrix C, sodass $\mathcal{L}_C \circ \mathcal{L}_O =$ Identität auf $M_n(\mathbb{R})$. In der Tat haben wir

$$\mathcal{L}_C \circ \mathcal{L}_O(B) = \mathcal{L}_C(O \cdot B) = \mathcal{L}_C(O) = C \cdot O = O \neq B \quad \text{für alle } B \neq O.$$

Ein zweites Beispiel: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathcal{L}_A$ nicht umkehrbar, oder invertierbar. In der Tat haben wir, dass

$$\mathcal{L}_A(B) = \mathcal{L}_A\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}.$$

Also, das Bild $\mathcal{L}_A(B)$ einer beliebigen Matrix B hat dieselben Zeilen, und $\mathcal{L}_A(B)$ ist kein *beliebiges* Element von $M_n(\mathbb{R})$. Sie können nachprüfen, dass diese Tatsache impliziert, dass es keine Matrix C gibt, sodass $\mathcal{L}_C \circ \mathcal{L}_A =$ Identität.

Nun können wir uns fragen: Wann ist die Transformation $\mathcal{L}_A$ *umkehrbar*? Mit anderen Worten, wann ist die Abbildung $\mathcal{L}_A$ *invertierbar*? Genauer gesagt, wann existiert B, so dass

$$\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B = \text{Identität auf } M_n(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_B \circ \mathcal{L}_A = \text{Identität auf } M_n(\mathbb{R})? \tag{2.2.6}$$

Wenn eine solche B existiert, bezeichnen wir $\mathcal{L}_B$ mit $\mathcal{L}_A^{-1}$.

Proposition 2.2.2
Es sei A eine invertierbare Matrix. Dann ist $\mathcal{L}_A$ invertierbar und $\mathcal{L}_A^{-1} = \mathcal{L}_{A^{-1}}$.

Beweis. Wir sollen beweisen, dass die Gleichungen in (2.2.6) gelten mit $B = A^{-1}$. Wir haben

$$\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_{A^{-1}}(C) = \mathcal{L}_A(A^{-1} \cdot C) = A \cdot (A^{-1} \cdot C) = (A \cdot A^{-1}) \cdot C = I_n \cdot C = C.$$

Weil C eine beliebige Matrix ist, erhalten wir, dass $\mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_{A^{-1}} =$ Identität auf $M_n(\mathbb{R})$. Ähnlich kann man nachprüfen, dass $\mathcal{L}_{A^{-1}} \circ \mathcal{L}_A =$ Identität auf $M_n(\mathbb{R})$. □

2.2.3 Elementarmatrizen

Es sei δ_i die m-dimensionale Zeile, deren Einträge a_{ih}, für $h = 1, \ldots, m$, gegeben sind durch δ_{ih} (das Kronecker-Delta). Also hat die Einheitsmatrix I_m Zeilen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ (in dieser Ordnung).

Wir führen drei Typen von Elementarmatrizen ein:

1. Es seien $1 \leq i < j \leq m$. Wir definieren die quadratische Matrix $E_{ij} \in M_m(\mathbb{R})$ als die Matrix, deren Zeilen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_j, \ldots, \delta_i, \ldots, \delta_m$ sind. Also

$$E_{ij}^n = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_j \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_m \end{pmatrix}.$$

   Also können wir E_{ij}^m erhalten durch Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile von I_m.

   Beispiel 2.2.3

$$E_{12}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Gegeben $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sei $E_i^m(\lambda)$ die quadratische $m \times m$-Matrix, deren Zeilen gegeben sind durch $\delta_1, \ldots, \lambda\delta_i, \ldots, \delta_m$. Also erhalten wir $E_i^m(\lambda)$ von I_m durch Multiplizieren der i-ten Zeile von I_m mit $\lambda \neq 0$.

Beispiel 2.2.4

$$E_1^2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Es seien $1 \leq i \neq j \leq m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Matrix $E_{ij}^m(\lambda)$ als die quadratische $m \times m$-Matrix, deren Zeilen gegeben sind durch $\delta_1, \ldots, \delta_i + \lambda\delta_j, \ldots, \delta_j, \ldots, \delta_m$. Also können wir $E_{ij}^m(\lambda)$ von I_m erhalten durch Ersetzen der i-ten Zeile von I_m mit der i-ten Zeile plus λ-Mal die j-te Zeile von I_m.

   Beispiel 2.2.5

$$E_{12}^2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{13}^3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definition 2.2.3
Die quadratischen Matrizen E_{ij}^m, $E_i^m(\lambda)$ und $E_{ij}^m(\lambda)$, die wir in 1., 2. und 3. eingeführt haben, heißen *Elementarmatrizen.*

Wenn der Typ der Matrix nicht nötig ist, bezeichnen wir die Elementarmatrizen mit E_{ij}, $E_i(\lambda)$ und $E_{ij}(\lambda)$.

Proposition 2.2.3
Alle Elementarmatrizen sind invertierbar und die Inversen sind Elementarmatrizen. Genauer gesagt,

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}, \quad E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1}) \quad \textit{und} \quad E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)\,.$$

Beweis: Zuerst beweisen wir, dass $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$. Die h-te Spalte S_h und h-te Zeile Z_h von E_{ij} sind genau die h-te Spalte und h-te Zeile von I_m, für alle $h \notin \{i, j\}$. Weil I_m symmetrisch ist, erhalten wir $Z_h^T = S_h$ für alle $h \notin \{i, j\}$. Es ist einfach zu beweisen, dass $Z_i^T = S_i$ und $Z_j^T = S_j$. Also ist E_{ij} symmetrisch und wir können E_{ij} als

$$E_{ij} = (\delta_1^T \cdots \delta_j^T \cdots \delta_i^T \cdots \delta_m^T)$$

beschreiben. Weil $\delta_h \delta_k^T = \delta_{hk}$ (das Kronecker-Delta) für alle h, k, erhalten wir, dass

$$E_{ij} E_{ij} = (\delta_{hk})_{\substack{1 \leq h \leq m \\ 1 \leq k \leq m}} = I_m\,.$$

Es ist einfach zu beweisen, dass $E_i(\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$.

Um zu beweisen dass $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$, bemerken wir zuerst, dass die Spalten $S_1, \ldots, S_m$ von $E_{ij}(-\lambda)$ gegeben sind durch $\delta_1^T, \ldots, \delta_i^T, \ldots, (-\lambda\delta_i + \delta_j)^T, \ldots, \delta_m^T$.

Es seien $Z_1, \ldots, Z_i = \delta_i + \lambda\delta_j, \ldots, Z_j, \ldots, Z_m$ die Zeilen von $E_{ij}(\lambda)$. Dann bemerken wir, dass

$$Z_h \cdot S_k = \begin{cases} \delta_h \cdot \delta_k^T = 0 & \text{falls } h \neq k, \text{ und } h, k \notin \{i, j\} \\ (\delta_i + \lambda\delta_j) \cdot \delta_i^T = 1 & \text{falls } h = k = i \\ (\delta_i + \lambda\delta_j) \cdot (-\lambda\delta_i + \delta_j)^T = -\lambda + \lambda = 0 & \text{falls } h = i \text{ und } k = j \\ \delta_j \cdot (-\lambda\delta_i + \delta_j)^T = 1 & \text{falls } h = k = j. \end{cases}$$

Also können wir schließen, dass $E_{ij}(\lambda)E_{ij}(-\lambda) = I_m$. Ähnlich kann man beweisen, dass $E_{ij}(-\lambda)E_{ij}(\lambda) = I_m$, und die Behauptung folgt. □

Vorlesung 7 - 10.11.2016

Wie wir schon in Sektion 2.2.2 diskutiert haben, definiert jede $m\times m$-Elementarmatrix E eine Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{L}_E: & M_m(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_m(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & E \cdot A \end{array}$$

die, wegen Propositionen 2.2.2 und 2.2.3, invertierbar ist.

In Sektion 1.3.2, insbesondere in Definition 1.3.2, haben wir drei umkehrbare Operationen auf einem Gleichungssystem eingeführt:

1. Vertauschung von zwei Zeilen des System: $Z_i \leftrightarrow Z_j$;
2. Multiplikation einer Zeile Z mit einem Faktor $\lambda \neq 0$: λZ;
3. Addition des Vielfachen einer Zeile von einer anderen: $Z_i + \lambda Z_j$, mit $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Gegeben ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \tag{2.2.7}$$

in Sektion 1.3.2 haben wir den Gauß-Jordan Algorithmus eingeführt. Dieser Algorithmus benutzt eine Folge von Operationen 1., 2. und 3., um ein lineares Gleichungssystem– das Lösungen hat– mit einem neuen äquivalenten linearen Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu wechseln. Wir können diesen Algorithmus mit Hilfe von Elementarmatrizen beschreiben.

Es seien $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathbf{x} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ und $\mathbf{b} \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ die Matrizen gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Das System (2.2.7) ist äquivalent zu

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}\,.$$

Proposition 2.2.4
Gegeben sei das Gleichungssystem (2.2.7) *und die dazugehörige Matrix A:*

1. *Wenn wir die Zeilen Z_i und Z_j des Systems* (2.2.7) *vertauschen, ist die dazugehörige Matrix des neuen Systems gegeben durch*

$$\mathcal{L}_{E_{ij}}(A) = E_{ij} \cdot A.$$

2. *Wenn wir eine Zeile Z_i des Systems* (2.2.7) *mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ multiplizieren, ist die dazugehörige Matrix des neuen Systems gegeben durch*

$$\mathcal{L}_{E_i(\lambda)}(A) = E_i(\lambda) \cdot A.$$

3. *Wenn wir eine Zeile Z_i des Systems* (2.2.7) *mit der Zeile $Z_i + \lambda Z_j$ substituieren (mit $i \neq j$), ist die dazugehörige Matrix des neuen Systems gegeben durch*

$$\mathcal{L}_{E_{ij}(\lambda)}(A) = E_{ij}(\lambda) \cdot A.$$

Also stimmen Operationen 1., 2. und 3. mit Multiplikation von links mit Elementarmatrizen überein.

Beweis. Übung. □

Fragen und Vertiefungen 2.2.3
Gegeben eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit Zeilen $Z_1, \ldots, Z_i, \ldots, Z_j, \ldots, Z_n$, wegen Proposition 2.2.4 hat die Matrix $\mathcal{L}_{E_{ij}}(A) = E_{ij}A$ Zeilen $Z_1, \ldots, Z_j \ldots, Z_i, \ldots, Z_n$. Was können wir sagen, wenn wir die Matrix $\mathcal{R}_{E_{ij}}(A) = AE_{ij}$ nehmen? Es seien $S_1, \ldots, S_i, \ldots, S_j, \ldots, S_n$ die Spalten von A. Beweisen Sie, dass die Spalten von AE_{ij} gegeben sind durch $S_1, \ldots, S_j, \ldots, S_i, \ldots, S_n$.

Der Gauß-Jordan Algorithmus sagt uns, dass *es eine Folge von Elementarmatrizen* $E_1, \ldots, E_N, E'_1, \ldots, E'_M$ *gibt, sodass die Matrix* $A' := E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M$ *der folgenden Gestalt*

$$A' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

ist, wobei "$*$" eine beliebige reelle Zahl bezeichnet.

Beispiel 2.2.6
Es sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten Elementarmatrizen finden, sodass $A' := E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M$ der Gestalt (2.2.8) ist.

Der Gauß-Jordan Algorithmus sagt uns, dass wir die zweite und dritte Spalte vertauschen sollten. Wegen Fragen und Vertiefungen (2.2.3), stimmt diese Operation mit Multiplikation von rechts mit Elementarmatrizen E^3_{23} überein, nämlich

$$A \cdot E^3_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt sollen wir die dritte Zeile Z_3 mit $Z_3 - Z_2$ ersetzen (weil wir den Koeffizienten im Platz $(3, 2)$ löschen müssen). Also stimmt diese Operation mit Multiplikation von links mit Elementarmatrizen $E_{32}(-1)$ überein, d.h.

$$E_{32}(-1) \cdot (A \cdot E^3_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A' ist gegeben durch

$$A' = E_{32}(-1) \cdot A \cdot E^3_{23} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es seien $Z_1, \ldots, Z_p$ die ersten p-Zeilen von A' die nicht Null sind. Mit Hilfe der Abbildung $\mathcal{L}_{E_{ij}(\lambda)}$, können wir noch A' vereinfachen.

- Nehmen wir die p-te Zeile
$$(0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ * \ \cdots \ *)$$
und die $(p-1)$-te Zeile
$$(0 \ \cdots \ 1 \ a_{p-1} \ * \ \cdots \ *).$$
Substituieren wir die Zeile Z_{p-1} mit $Z_{p-1} - a_{p-1}Z_p$. Die neue $(p-1)$-te Zeile Z'_{p-1} ist der Gestalt
$$(0 \ \cdots \ 1 \ 0 \ * \ \cdots \ *).$$
Diese Operation stimmt mit Multiplikation von links mit $E_{p-1\,p}(-a_{p-1})$ überein.

- Die $(p-2)$-te Zeile Z_{p-2} ist der Gestalt $(0 \ \cdots \ 1 \ \ a_{p-2} \ b_{p-2} \ \ * \ \ \cdots \ \ *)$. Substituieren wir Z_{p-2} mit $Z_{p-2} - b_{p-2}Z_p - a_{p-2}Z'_{p-1}$ und erhalten wir eine neue Zeile der Gestalt $(0 \ \cdots \ 1 \ \ 0 \ 0 \ * \ \cdots \ *)$. Diese Operation stimmt mit Multiplikation von links mit $E_{p-2\,p-1}(-a_{p-2})E_{p-2\,p}(-b_{p-2})$ überein.

Durch Wiederholen dieses Verfahrens, erhalten wir eine Matrix A'' der Gestalt
$$A'' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \\ & \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.9}$$
wobei die ersten p-Zeilen und p-Spalten die Einheitsmatrix I_p bilden.

Beispiel 2.2.7
Es sei A' die Matrix in Beispiel 2.2.6. Hier $p = 2$ und die erste Zeile Z_1 ist $(1 \ a_1 \ *) = (1 \ 1 \ 2)$. Um a_1 zu löschen, sollen wir Z_1 mit $Z_1 - a_1Z_2$ ersetzen. Diese Operation stimmt mit Multiplikation von links mit der Elementarmatrix $E_{12}(-1)$ überein, d.h.
$$E_{12}(-1) \cdot A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Die ersten 2 Zeilen und 2 Spalten, die Matrix I_2 bilden, also
$$A'' = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vorlesung 8 - 14.11.2016

Wir können den folgenden wichtigen Satz beweisen.

Satz 2.2.5
Es sei $A \in M_m(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann sind die folgenden Bedingungen

(i) A ist invertierbar

(ii) A ist das Produkt von Elementarmatrizen

äquivalent.

Beweis. $(ii) \implies (i)$. Es sei A ein Produkt von Elementarmatrizen. Weil jede Elementarmatrix invertierbar ist (Proposition 2.2.3), wegen Satz 2.2.1 (c) (und Fragen und Vertiefungen 2.2.1) ist A invertierbar.

$(i) \implies (ii)$. Es sei A invertierbar, und nehmen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \tag{2.2.10}$$

Weil A invertierbar ist, hat das obige System nur die triviale Lösung (Bemerkung 2.2.2). Also muss die Matrix A'', die wir oben beschrieben haben, die Einheitsmatrix I_m sein. In der Tat, wenn A'' genau $m - p > 0$ Null Zeilen hätte, wäre das dazugehörige homogene System, äquivalent zum System (2.2.10), der folgenden Gestalt

$$\begin{cases} x_1 & & & & +a_{p+1\,1}x_{p+1} & + & \cdots & +a_{1m}x_m & = & 0 \\ & x_2 & & & +a_{p+1\,2}x_{p+1} & + & \cdots & +a_{2m}x_m & = & 0 \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & x_p & +a_{p+1\,p}x_{p+1} & + & \cdots & +a_{pm}x_m & = & 0 \end{cases}$$

und hätte dieses System mehrere Lösungen.

Mit obigem Verfahren wissen wir, dass es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_N, E'_1, \ldots, E'_M$ gibt, so dass

$$A'' = E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M = I_m\,, \tag{2.2.11}$$

also $E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M (E'_1 \cdots E'_M)^{-1} = (E'_1 \cdots E'_M)^{-1}$ und $E_N \cdots E_1 A = (E'_1 \cdots E'_M)^{-1}$. Von letzter Gleichung erhalten wir, dass

$$A = (E_N \cdots E_1)^{-1} E_N \cdots E_1 A = (E_N \cdots E_1)^{-1}(E'_1 \cdots E'_M)^{-1}.$$

Wegen Satz 2.2.1 (c) (und Fragen und Vertiefungen 2.2.1), und wegen Proposition 2.2.3, können wir schließen, dass A ein Produkt von Elementarmatrizen ist. $\square$

Bemerkung 2.2.4
In obigem Beweis haben wir gezeigt, mit Hilfe vom System (2.2.10) und Bemerkung 2.2.2, dass wenn A invertierbar ist, A'' keine Null-Zeilen haben kann. Es gibt einen zweiten Beweis dieser Tatsache: Man kann bemerken, dass A invertierbar ist genau dann, wenn A'' ist (weil $A'' = E_N \cdots E_1 A E'_1 \cdots E'_M$, und Elementarmatrizen sind invertierbar). Jetzt genügt es zu bemerken, dass eine Matrix mit einer Null-Zeile (oder Null-Spalte) nicht invertierbar ist (Sehen Sie Fragen und Vertiefungen 2.2.4).

Bemerkung 2.2.5
Man kann beweisen, dass wenn A invertierbar ist, um A'' in (2.2.9) zu erhalten, braucht man *keine Rechtsmultiplikation*, d.h. wir brauchen keine Matrizen E'_i in (2.2.11). Dies ist eine Folgerung aus der folgenden Tatsache: Der Gauß-Jordan Algorithmus sagt uns, dass wir Rechtsmultiplikation benutzen müssen, wenn es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ gibt, sodass die Matrix A oder $E_k \cdots E_1 A$ der folgenden Gestalt ist:

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0} & * & \cdots & * \end{pmatrix}. \qquad (2.2.12)$$

Aber das ist ein Widerspruch, weil wenn A invertierbar ist, dann sollte auch $E_k \cdots E_1 A$ invertierbar sein, und die Matrizen in (2.2.12) sind *nicht* invertierbar.

Fragen und Vertiefungen 2.2.4
Es ist einfach zu beweisen, dass die Matrix in (a) (also ist die erste Spalte der Null-Spaltvektor) nicht invertierbar ist. In der Tat kann man beweisen, dass eine quadratische Matrix $A \in M_m(\mathbb{R})$ mit einer Spalte (bzw. einer Zeile) die gleich dem Null-Spaltvektor (bzw. dem Null-Zeilenvektor) ist, nicht invertierbar ist. Warum?

Es ist komplizierter zu beweisen, dass eine Matrix der Gestalt (2.2.12) (b) nicht invertierbar ist, und jetzt beweisen wir das nicht.

Fragen und Vertiefungen 2.2.5
Nach Bemerkung 2.2.5 haben wir bewiesen, dass, wenn A invertierbar ist, es eine Folge von Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_N$ gibt, sodass A ein Produkt von Elementarmatrizen ist, nämlich

$$A = (E_N \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1} .$$

Ist dieses Produkt eindeutig? Genauer gesagt, können wir $A = E_1^{-1} \cdots E_N^{-1} = \widetilde{E}_1^{-1} \cdots \widetilde{E}_M^{-1}$ haben für unterschiedliche Folgen $E_1, \ldots, E_N$ und $\widetilde{E}_1, \ldots, \widetilde{E}_M$ von Elementarmatrizen?

2.2.4 Eine Methode um die Inverse zu finden

Nach (2.2.11) und Bemerkung 2.2.12, wissen wir, dass wenn $A \in M_m(\mathbb{R})$ invertierbar ist, es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_N$ gibt, sodass

$$E_N \cdots E_1 A = I_m \quad \text{also} \quad A^{-1} = E_N \cdots E_1 \,. \tag{2.2.13}$$

Um $E_N \cdots E_1$ zu finden, gehen wir wie folgt vor:

Es seien $A, B \in M_m(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}.$$

Dann können wir die folgende Matrix $C \in M_{m,2m}(\mathbb{R})$ bilden:

$$C = (A \ \ B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}.$$

Wenn $D \in M_m(\mathbb{R})$, kann man nachprüfen, dass die folgende Gleichung gilt

$$D \cdot C = (D \cdot A \quad D \cdot B)\,.$$

Also nehmen wir $B = I_m$ und $D = E_N \cdots E_1$. Nach (2.2.13) folgt dass

$$E_N \cdots E_1 \,(A \quad I_m) = (E_N \cdots E_1 A \quad E_N \cdots E_1) = \begin{pmatrix} I_m & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Daher, um A^{-1} zu finden, genügt es auf I_m dieselben Zeilenoperationen anzuwenden, die wir auf A anwenden, um I_m zu erhalten. Entsprechend genügt es, I_m auf der linken Seite mit demselben Produkt elementarer Matrizen zu multiplizieren, derart dass $E_N \cdots E_1 A = I_m$.

Wir erklären diese Methode mit einem Beispiel:

Beispiel 2.2.8
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dann

$$(A \ \ I_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 - 2Z_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}Z_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{Z_1 - Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Wir können schließen, dass A invertierbar ist, mit Inverse gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nach, dass A^{-1} genau $E_{12}(-1)E_2(-\frac{1}{3})E_{21}(-2)$ ist.

Beispiel 2.2.9
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Dann

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2-3Z_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil $A'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Null-Zeile hat, ist A nicht invertierbar (sehen Sie Bemerkung 2.2.4).

Beispiel 2.2.10
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann

$$(A \;\; I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3+Z_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-Z_2]{}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}Z_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1-2Z_3-Z_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Also ist A invertierbar mit Inverse gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie nach, dass $A^{-1} = E_{12}(-1)E_{13}(-2)E_3(\frac{1}{3})E_{32}(-1)E_{31}(1)$.