Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
16.4.2018

Topologie: Übungsblatt 2

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 23.4.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Seien $\mathcal{T}_{\text{eucl}}$ die Euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad x < 0 \\ 1 & \qquad\quad\ \ x \geq 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{eucl}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{eucl}})$ nicht stetig ist.

b) Was ist die gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{eucl}})$$

stetig ist?

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei $\mathcal{B}_l = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_l$ die Basiseigenschaft hat.

b) Sei $\mathcal{T}_l$ die Topologie mit Basis $\mathcal{B}_l$. Geben Sie alle Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ an, die offen in $\mathcal{T}_l$ sind.

c) Sei

$$\mathcal{C}_l = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \mid a < b,\ a,\ b \in \mathbb{Q}\}.$$

Ist die Untermenge $\mathcal{C}_l \subset \mathcal{B}_l$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_l$?

Aufgabe 3. (15 Punkte)

Wir betrachten die Menge $X = \mathbb{R} \cup \{*\}$, d.h. X besteht aus $\mathbb{R}$ und einem weiteren Punkt $*$. Wir sagen $U \subset X$ is offen wenn gilt :

i) Zu jedem Punkt $x \in U \cap \mathbb{R}$ existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset U$.

ii) Wenn $* \in U$, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $(-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \subset U$.

Dieser Raum wird "Gerade mit zwei Nullen" genannt.

a) Zeigen Sie, dass dies in der Tat eine Topologie auf X definiert.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : X \to X$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn} \quad x \neq 0, *, \\ * & \quad\quad\quad\; x = 0, \\ 0 & \quad\quad\quad\; x = *, \end{cases}$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Für jedes $(a, n) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}$ definieren wir die folgende Menge

$$B(a, n) := \{n + \lambda \cdot p^a : \lambda \in \mathbb{Z}\} .$$

Zeigen Sie, dass $\{B(a, n) : (a, n) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}\}$ die Basiseigenschaft hat und eine Topologie auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Sei $M_n(\mathbb{R})$ die Menge der $n \times n$ Matrizen auf $\mathbb{R}$. Identifizieren Sie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

mit $(a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots a_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}$.

a) Zeigen, Sie, dass die Determinantenfunktion $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ist (hier $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ und $\mathbb{R}$ haben euklidische Topologien). Es ist erlaubt Ergebnisse aus der Vorlesung Analysis (z.b.) zu benutzen.

b) Welche der Mengen

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}, \qquad O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = I\},$$
$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}, \qquad SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\},$$

sind offen, geschlossen oder keiner von beiden in $\mathbb{R}^{n^2}$?