Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
7.7.2016

Topologie: Übungsblatt 13

Diese Übungen werden nicht korrigiert. Ein paar von diesen Aufgaben werder am 20.7.16 in der Vorlesung besprochen.

Aufgabe 1. (9LP)

Zeigen Sie, dass eine Überlagerung eines Hausdorffraumes Hausdorff ist.

Aufgabe 2. (6LP)

Eine abstrakte definition einer Quotientabbildung $h : X \to Y$ ist , dass h surjetiv ist, und $h^{-1}(U)$ offen ist in X genau dann, wenn U offen ist in Y. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ stetige Abbildungen mit $fg(x) = x$. Zeigen Sie, dass f eine Quotientabbildung ist. Zeigen Sie, dass $\pi : X \times Y \to X$ definiert durch $\pi(x, y) = x$ eine Quotientabbildung ist.

Aufgabe 3. (6LP)

Zeigen Sie, dass eine Quotientabbildung $(0, 1) \to [0, 1]$ existiert. Zeigen Sie, dass keine Quotientabbildung $[0, 1] \to (0, 1)$ existiert.

Aufgabe 4. (6LP)

Sei $\mathcal{T}_l$ die Topologie auf $\mathbb{R}$ mit Basis $[a, b)$. Sei $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathrm{eucl}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 5. (9LP)

Sei $f : S^1 \to S^1$ eine injektive Abbildung. Beweisen Sie, dass f surjektiv ist.

Aufgabe 6. (9LP)

Zeigen Sie, dass keine stetige injektive Abbildung $S^1 \vee S^1 \to S^1$ existiert.

Aufgabe 7. (9LP)

Seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$. Sei

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2\}$$

der Torus und $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|y = z = 0\}$ eine Gerade. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von $T \cup L$.

Aufgabe 8. (6LP)

Ein Raum X ist lokal kompakt, wenn jedes $x \in X$ eine kompakte Menge $C \ni x$ hat, sodass eine offen $U \subset C$ existiert mit $x \in U$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ lokal kompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nicht lokal kompact ist.

Sei $(X, \mathcal{T})$ eine Raum, und sei $X_+ := X \cup \{\infty\}$ die Menge X mit einem zusẗzlichen Punkt ∞. Definieren Sie

$$\mathcal{S} = \{U \in \mathcal{P}(X_+) \,|\, U \in \mathcal{T}, \text{ oder } \infty \in U \text{ und } X \setminus U \text{ ist abgeschlossen und kompakt in } X\}$$

c) Sei X lokal kompakt und Hausdorffsch. Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ eine Topologie ist, und dass X_+ ein kompakter Hausdorffraum ist.

d) Zeigen Sie dass $(0, 1)_+$ homöomorph ist zu S^1.

e) Geben Sie zwei Räume X, Y an, sodass X nicht homöomorph ist zu Y, aber X_+ homöomorph ist zu X.

Aufgabe 9. (9LP)

Sei $\rho : G \to \text{Homöo}(Y)$ eine Wirkung. Wir nennen ρ eine Überlagerungswirkung, wenn für jedes $y \in Y$ eine Umgebung $U \ni y$ existiert mit

$$g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U \neq \emptyset \Longrightarrow g_1 = g_2.$$

Zeigen Sie, dass die Wirkung der Decktransformationen einer wegzusammenhängenden Überlagerung eine Überlagerungswirkung ist.

Aufgabe 10. (6LP)

Betrachten Sie die Buchstaben und Zahlen

$$a\,B\,c\,d\,i\,K\,8\,M$$

eingebettet in $\mathbb{R}^2$. Welche sind homöomorph und welche sind homotop ?

Aufgabe 11. (6LP)

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{(a,b) \subset \mathbb{R} \,|\, a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis ist für $\mathcal{T}_{\text{eukl}}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} = \{[a,b) \,|a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Basis ist für ein Topologie auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie dass die Topologie generiert durch $\mathcal{C}$ nicht $\mathcal{T}_l$ ist.