

Vorlesung 24



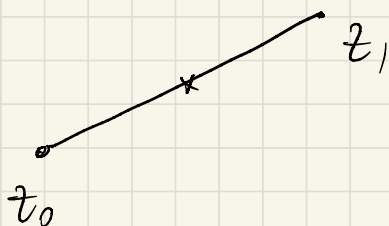
Seminar "Topologie" SS21

↳ kommentierte Vorlesungsverzeichnis

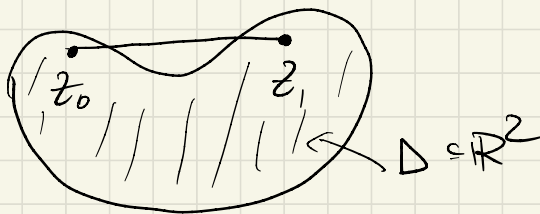
8.4 Konvexität und zweite Ableitung

Konvexe Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$:

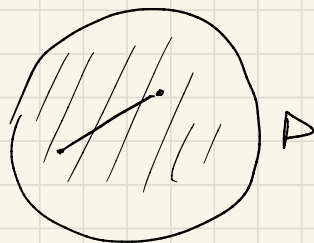
$\forall z_0, z_1 \in D$: Strecke zwischen $z_0, z_1 \in D$



$$\begin{aligned} \gamma: [0,1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma(t) &= (1-t)z_0 + tz_1 \\ \gamma([0,1]) &= \text{Strecke} \end{aligned}$$



nicht konvex



Konvex

Strecke zwischen $z_0, z_1 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\{ z = (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0,1] \}$$

"Wenn t variiert, beschreibt der Parameter t die Punkte der Strecke"

$$z = \underbrace{(1-t)z_0 + tz_1}_{\uparrow}, t \in [0,1]$$

Konvexe Kombination von z_0 und z_1 .

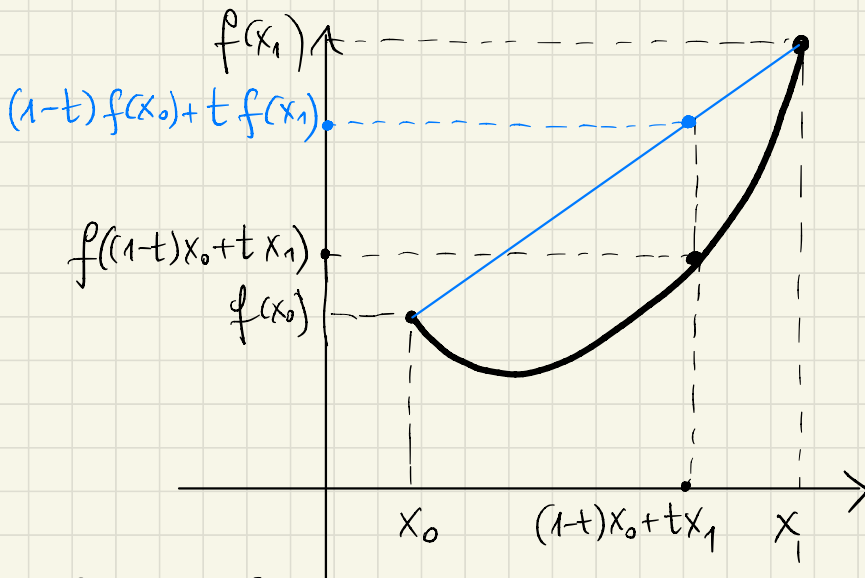
Definition 8.4.1

Es sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt **konvex**, falls für alle $x_0 \neq x_1 \in I$ gilt $x_0 < x_1$

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1). \quad (8.4.1)$$

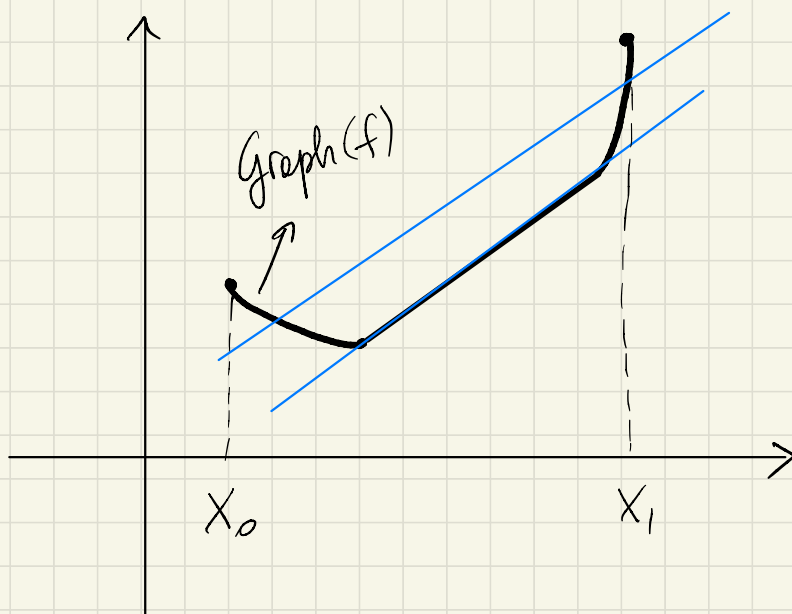
Sie heißt **konkav**, falls das umgekehrte Ungleichheitszeichen gilt.

Eine Funktion heißt **strikt konvex** (bzw. **strikt konkav**), falls Gleichheit in (8.4.1) nur gilt, falls $t = 0$ und $t = 1$.



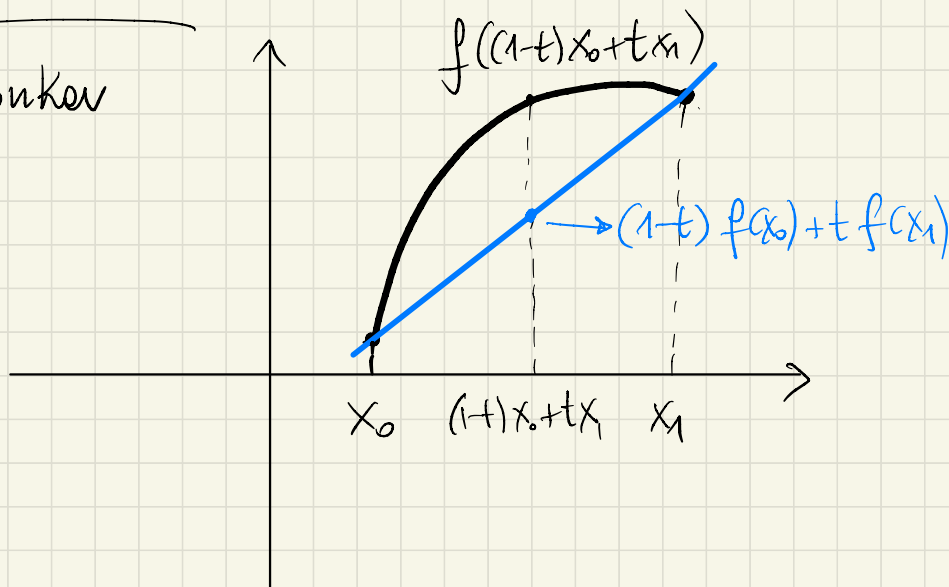
$$\begin{cases} z_0 = (x_0, f(x_0)) \\ z_1 = (x_1, f(x_1)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &: (1-t)z_0 + tz_1 = \\ &= ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)f(x_0) + tf(x_1)) \end{aligned}$$



f konvex aber nicht strikt konvex

f konkav

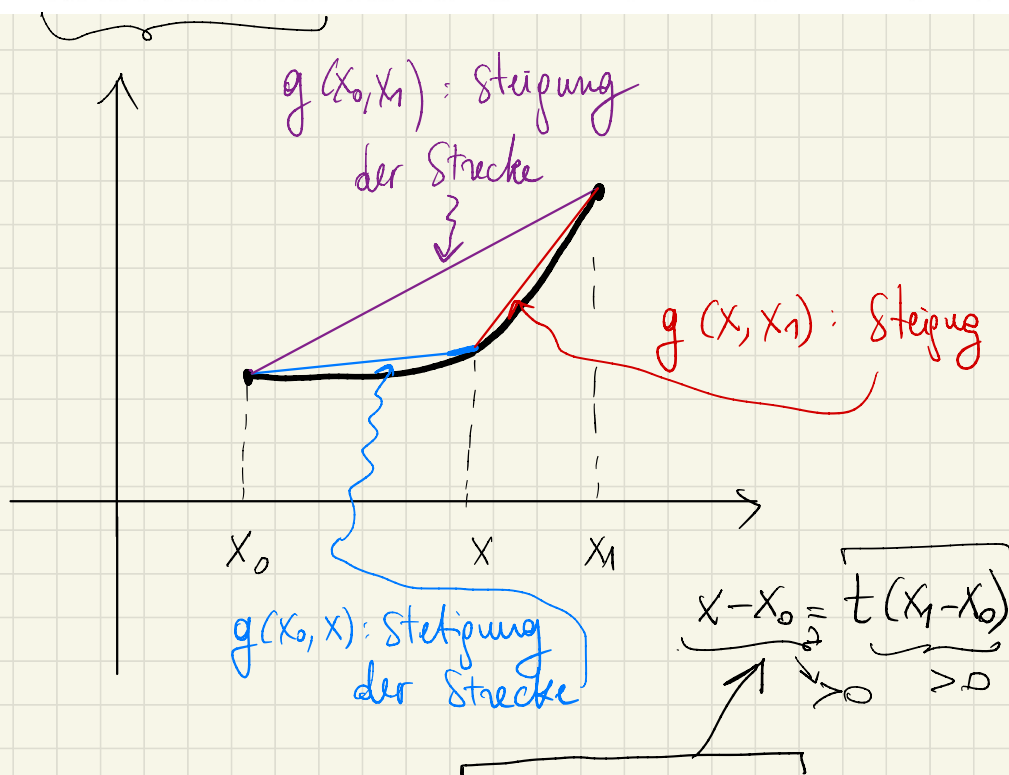


Lemma 8.4.1

Es sei $g: (I \times I) \setminus \{(x, x), x \in I\}$ die Abbildung $g(x, x') := \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$.

Die Funktion f ist konvex genau dann, wenn

$$g(x_0, x) \leq g(x_0, x_1) \leq g(x, x_1) \quad \text{für alle } x_0 < x < x_1. \quad (8.4.2)$$



Beweis : $x_0 < x < x_1$, $x = (1-t)x_0 + tx_1$

$$f(x) \text{ konvex} \Leftrightarrow f(x) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \leq t(f(x_1) - f(x_0))$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{t(f(x_1) - f(x_0))}{t(x_1 - x_0)}$$

$$\Leftrightarrow g(x, x_0) \leq g(x_1, x_0) \quad \blacksquare$$

Satz 8.4.2

Es sei I ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Mal differenzierbar. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) f ist konvex in I ;
- (ii) f' ist monoton wachsend in I ;
- (iii) $f'' \geq 0$ in I .

Beweis

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Es sei f konvex $\xRightarrow{\text{Lemma 8.4.1}} \forall x_0 < x < x_1$

$$\rightarrow g(x_0, x) \leq \overbrace{g(x_0, x_1)}^{\text{Limes}} \leq \underbrace{g(x, x_1)}_{\text{Limes}} \quad \star$$

x_0, x_1 fest und $x_0 < x < x_1$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_1} g(x, x_1) = f'(x_1)$$

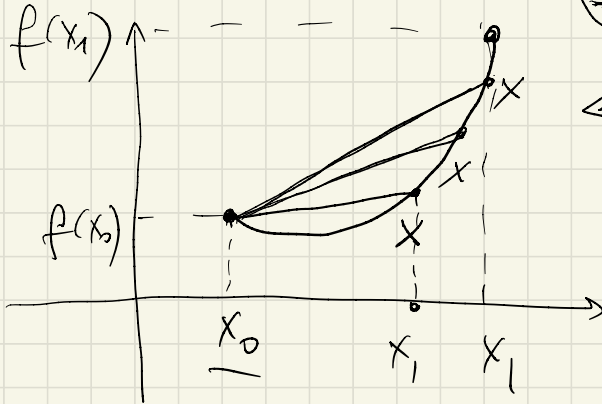
$$(\star) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0, x) \leq g(x_0, x_1) \leq \lim_{x \rightarrow x_1} g(x, x_1)$$
$$x_0 < x_1 \quad \underbrace{f'(x_0) \leq f'(x_1)}_{\text{''}} \quad \underbrace{\leq f'(x_1)}_{\text{''}}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

f' monoton wachsend in $I \Rightarrow$

f Konvex

Bwk



$g_0(x) := g(x_0, x)$: falls f konvex ist
 $\Rightarrow g_0(x)$ monoton wachsend ist

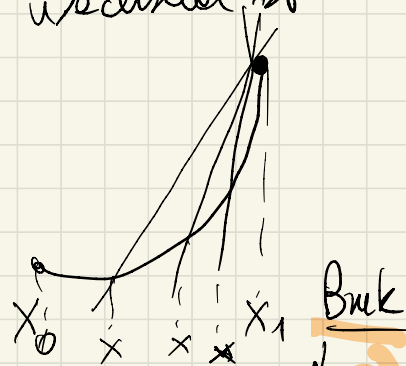
$$\Rightarrow g_0(x) \leq g_0(x_1)$$

$$g(x_1, x_0) \leq g(x_0, x_1)$$

$g_1(x) := g(x_1, x)$
 monoton wachsend

$$\hookrightarrow g_1(x_0) \leq g_1(x)$$

$$g(x_0, x_1) \leq g(x, x_1)$$



Bwk

f konvex $\Leftrightarrow$
 g_0 und g_1
 monoton wachsend sind

Bwk : Es genügt zu beweisen, dass
 g_0 monoton wachsend ist
 (f' monoton wachsend)

$$g'_0(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$= \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \left[f'(x) - \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} \right] \quad x_0 < x$$

$$\leadsto f|_{[x_0, x]}$$

f 2-mal diff. in I

$\Rightarrow f$ stetig in $[x_0, x] \subseteq I$

$\cdot f$ diff. in $(x_0, x) \subseteq I$

$\Rightarrow \exists \xi \in (x_0, x) :$

Satz
Lagrange

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

$$g'_0(x) = \frac{1}{x-x_0} \left[f'(x) - \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} \right] \quad x_0 < x$$

$$= \frac{1}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \underbrace{\left[f'(x) - f'(\xi) \right]}_{\geq 0} \quad \xi < x$$

$\Rightarrow g'_0 \geq 0 \Rightarrow g_0$ monoton wachsend

Ähnlich beweist man, dass g_1 monoton wachsend

$\Rightarrow$ f konvex

Lemma

8.4.1.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)
 f' mon. wach. $\quad \underline{f'' \geq 0}$

(Korollar 8.2.7)



Übung : $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, f 2-Mal differenzierbar in I
 I : offenes Intervall

* $f' > 0$ in $I \Rightarrow f$ strikt Konvex

* $f' < 0$ " $\Rightarrow f$ strikt Konkav

Gelsten die umgekehrten Implikationen?

Kapitel 9 : Das Riemannsche Integral

Definition 9.1.1

Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Eine **Zerlegung** Z von $[a, b]$ ist eine Menge $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ von reellen Zahlen, so dass

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n = b.$$

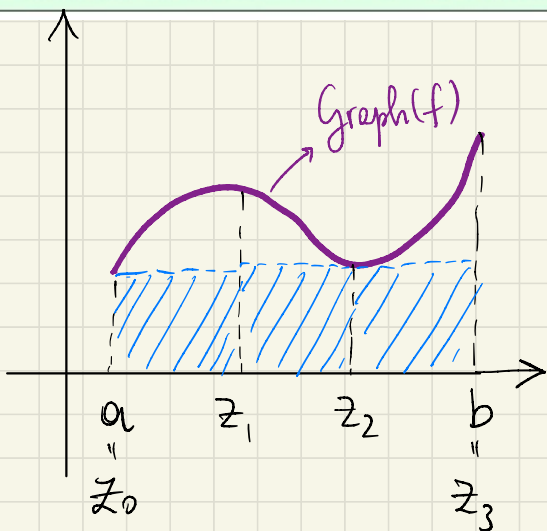
Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$U(Z, f) := \sum_{k=0}^{n-1} \inf f([z_k, z_{k+1}]) \cdot (z_{k+1} - z_k)$$

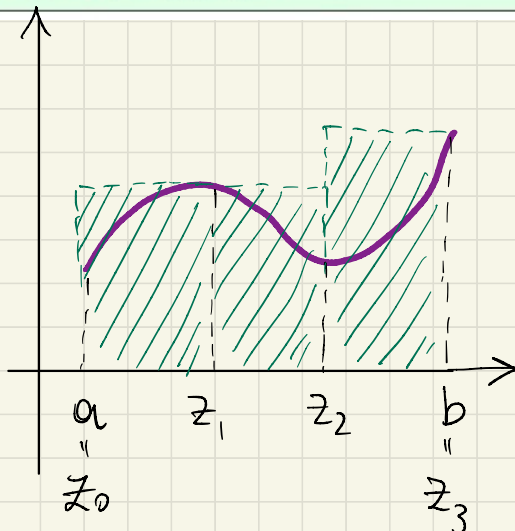
die **Untersumme** von f bezüglich der Zerlegung Z und

$$O(Z, f) := \sum_{k=0}^{n-1} \sup f([z_k, z_{k+1}]) \cdot (z_{k+1} - z_k)$$

heißt die **Obersumme** von f bezüglich der Zerlegung Z .

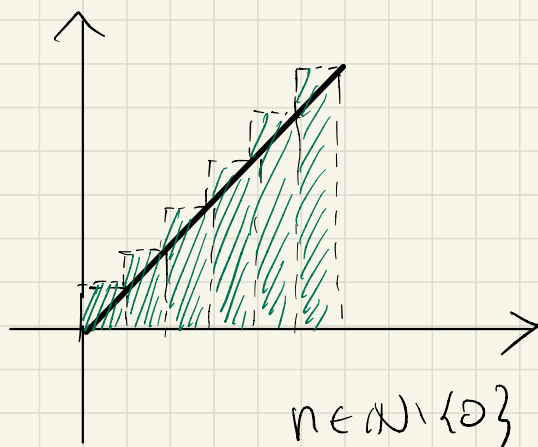
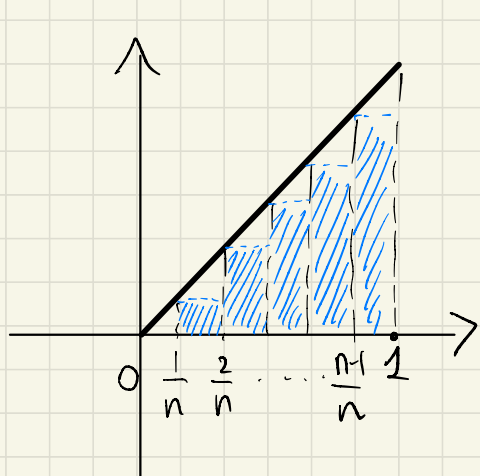


Untersumme bezüglich
 $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$



Obersumme bezüglich
 $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$

Beispiel: $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x$



$$\inf f \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] = \frac{k}{n}, \quad k=0, \dots, n-1$$

$$\sup f \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] = \frac{k+1}{n}, \quad //$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(Z_n f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \inf f \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \cdot \left(\frac{1}{n} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1) \cdot n}{2 \cdot n^2} = \end{aligned}$$

$$O(Z_n f) = \frac{n+1}{2n}$$

Bemerkung: $U(Z_n f) \rightarrow \frac{1}{2}$
 $O(Z_n f) \rightarrow \frac{1}{2}$

* Z, Z' Zerlegungen von $[a, b]$

$Z \subseteq Z'$: Z' ist eine Verfeinerung von Z

Beweis:

$$\begin{array}{ccc} & Z \cup Z' & \\ \subseteq & & \cup \\ Z & & Z' \end{array}$$

Lemma 9.1.1

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

1. Wenn Z' eine Verfeinerung einer Zerlegung Z ist, dann gilt

$$U(Z, f) \leq U(Z', f) \quad \text{und} \quad O(Z', f) \leq O(Z, f).$$

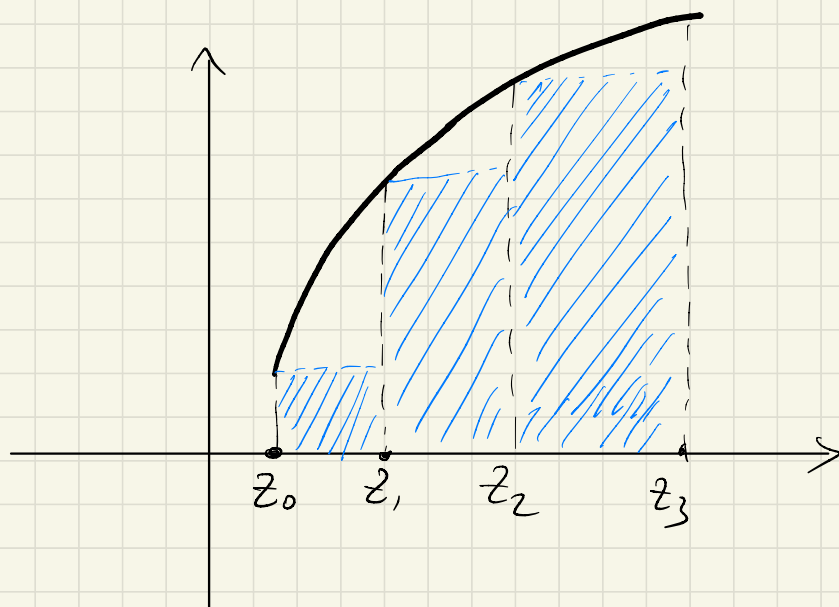
2. Es seien Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a, b]$, dann gilt

$$U(Z', f) \leq O(Z, f).$$

3. Es ist

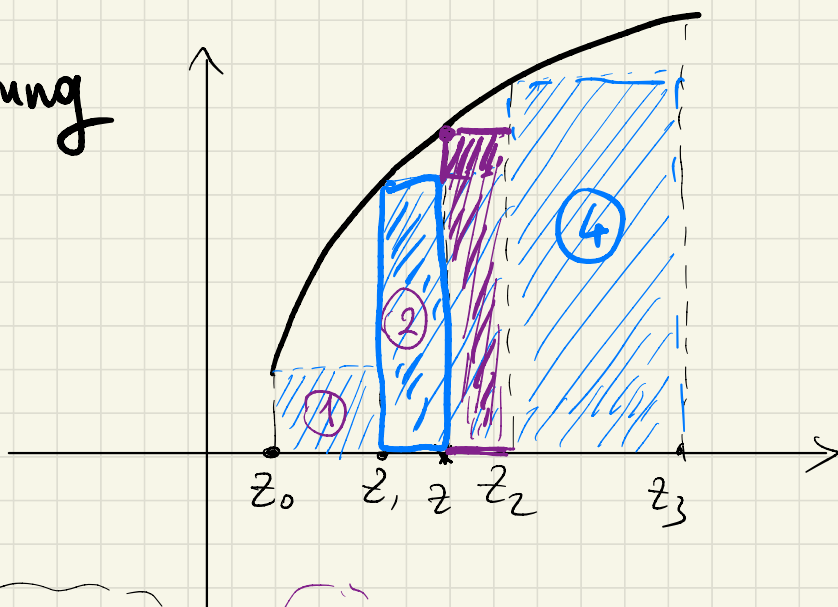
(f fest)

$$\sup\{U(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \leq \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}.$$



Beweis:

1. Übung



$$\underbrace{Z' = Z \cup \{z\}} \supsetneq Z$$

$$\rightarrow \exists h : z_h < z < z_{h+1}$$

$$\inf(f[z_1, z_2]) \leq \inf(f[z, z_2])$$

$$[z, z_2] \subseteq [z_1, z_2] \Rightarrow$$

$$f([z, z_2]) \subseteq f([z_1, z_2])$$

$$\Rightarrow \inf(f[z, z_2]) \geq \inf(f[z_1, z_2])$$

$$\hookrightarrow \underline{u(Z', f) \geq u(Z, f)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Ähnlich für die} \\ \text{Obersummen} \end{array} \right)$$

2. Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a, b]$

$$U(Z', f) \leq \mathcal{O}(Z, f)$$

Beweis: $\inf M \leq \sup M$



$$U(Z, f) \leq \mathcal{O}(Z, f) \quad \star$$

Z, Z' beliebig

$$\left[\begin{array}{cc} Z \vee Z' \\ \cup & \cup \\ Z & Z' \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \underline{U(Z', f)} &\leq U(Z \vee Z', f) \leq \mathcal{O}(Z \vee Z', f) \\ &\quad \downarrow \quad \star \\ &\quad \text{1. Lemma} \quad \leq \underline{\mathcal{O}(Z, f)} \\ &\quad \quad \quad \text{1. Lemma} \end{aligned}$$

3. Zu zeigen

$$\sup_{\substack{Z \text{ Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} \{U(z, f)\} \leq \inf_{\substack{Z \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } [a,b]}} \{\overline{\theta}(z, f)\}$$

$$2. \Rightarrow \underbrace{U(z', f)} \leq \underbrace{\overline{\theta}(z, f)}$$

$$\underbrace{\sup_{Z'} \{U(z', f)\}} \leq \underbrace{\overline{\theta}(z, f)}$$

$$\underbrace{\sup_{Z'} \{U(z', f)\} \leq \inf_Z \{\overline{\theta}(z, f)\}}$$

Definition 9.1.2

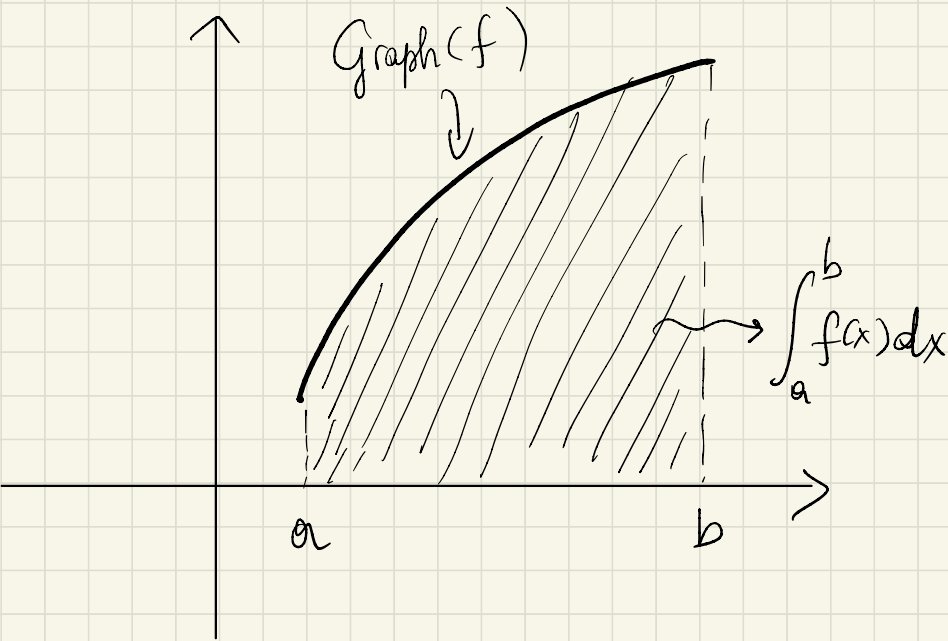
Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn

$$\sup\{U(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} = \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx := \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

das **Riemann-Integral** über f von a nach b .



Beispiele: (1) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Konstante Funktion

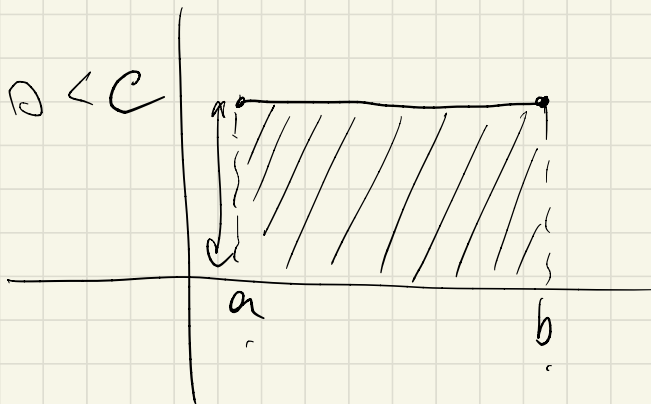
$$f(x) = c \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} U(z, f) &= \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot \underbrace{\inf(f([z_k, z_{k+1}]))}_{= c} = \\ &= c \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) = c(b-a) \end{aligned}$$

Ähnlich

$$D(z, f) = c(b-a)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$$



(2)

$$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

$$U(z, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left((z_{k+1} - z_k) \cdot \underbrace{\inf(f[z_k, z_{k+1}])}_{\substack{\text{"0"} \\ \text{für die Dichte} \\ \text{von } \mathbb{Q} \text{ in } \mathbb{R}}} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} O(z, f) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left((z_{k+1} - z_k) \cdot \underbrace{\sup(f[z_k, z_{k+1}])}_{\substack{\text{"1"} \\ \text{für jede Zerlegung von } [0,1]}} \right) = \\ &= 1 \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k)}_{\substack{\text{"b-a"} \\ \text{für jede Zerlegung von } [0,1]}} = 1 \cdot (1-0) = \underline{1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist nicht Riemann-integrierbar

Satz 9.1.2

(Riemann-)

Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es eine Folge von Zerlegungen $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $[a, b]$ gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f).$$

Zudem, wenn es eine solche Folge von Zerlegungen gibt, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f).$$

Beweis

• $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow \exists (Z_n)$ Zerlegungen

$\downarrow$
z.z.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f)$$

$$I := \int_a^b f(x) dx$$

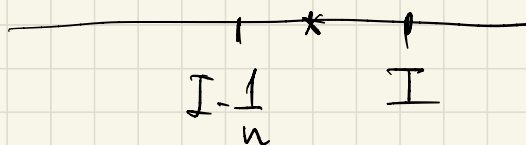
$$I \stackrel{(*)}{=} \sup \{ U(Z, f), Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \inf \{ O(Z', f), Z' \text{ " " " " } \}$$

Aus $(*) \Rightarrow \exists (Z_n)$ Folge von Zerlegungen finden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = \underline{\sup \{ U(Z, f) \}}$$

$$\sup\{\mathcal{U}(z, f), z\} = I$$



$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow$$

$$\exists \underline{z}_n : I - \frac{1}{n} < \mathcal{U}(\underline{z}_n, f) \leq I$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}(\underline{z}_n, f) = I$$

$$\text{Ans (*)} \Rightarrow \exists (\underline{z}'_n)_{n \in \mathbb{N}} :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\underline{z}'_n, f) = I$$

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}(\underline{z}_n, f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{U}(\underline{z}_n \cup \underline{z}'_n, f) \leq$$

g. 1.1. 1.

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\underline{z}_n \cup \underline{z}'_n, f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{O}(\underline{z}'_n, f) \leq I$$

g. 1.1. 2. g. 1.1. 1. 1.

→ Müssen alle $\leq \rightsquigarrow =$

$\Rightarrow$ für $(z_n \cup z'_n)$:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u(z_n \cup z'_n, f) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \vartheta(z_n \cup z'_n, f)\end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass $\exists (z_n)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(z_n, f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \vartheta(z_n, f)$$

$$\forall n \quad u(z_n, f) \leq \sup_z \{u(z, f)\}$$

$$\Downarrow$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(z_n, f) \leq \sup_z \{u(z, f)\}$$

Ähnlich

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \vartheta(z_n, f) \geq \inf_z \{\vartheta(z, f)\}$$

$$n \rightarrow \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U(z_n, f) \leq \sup_z \{U(z, f)\} \leq$$

$$\leq \inf_z \{D(z, f)\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} D(z_n, f)$$

$\downarrow$
 Lemma
 9.1.1,
 3,

$$\text{Aber } \lim_{n \rightarrow \infty} U(z_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} D(z_n, f)$$

$\Rightarrow$ müssen alle $\leq$ $=$

$$\Rightarrow \sup_z \{U(z, f)\} = \inf_z \{D(z, f)\}$$

$\Downarrow$
 f integrierbar



(*Riemannsches Integrabilitätskriterium*)

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \epsilon.$$

⑤ f integrierbar $\Rightarrow$

Satz 9.1.2. $\Rightarrow \exists (z_n) : \lim U(z_n, f) =$
 $= \lim \mathcal{O}(z_n, f) = I$

- Da $U(z_n, f) \rightarrow I$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \underbrace{|u(z_n, f) - I|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(A) \quad I - u(z_n, f) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\bullet \text{ Da } \mathcal{O}(t_n, f) \rightarrow I$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n'_0 : \forall n > n'_0 \quad \underbrace{|\vartheta(z_n, f) - I|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(B) \quad \mathcal{O}(z_n, f) - I$$

$\forall n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ gelte (A) und (B) $\rightarrow$
Summe (A) + (B)

→ $\exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

Satz

von Bolzano-Weierstraß

$$\begin{cases} \mathcal{O}(z_{n_k}, f) \text{ konvergiert} \\ \mathcal{U}(z_{n_k}, f) \quad // \quad // \end{cases} \quad k \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \text{Da } \lim_{k \rightarrow +\infty} (\underbrace{\mathcal{O}(z_{n_k}, f)} - \underbrace{\mathcal{U}(z_{n_k}, f)})$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{O}(z_{n_k}, f) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(z_{n_k}, f)$$

$\Rightarrow f$ integrierbar

Satz 9.1.2

