

Vorlesung 17

Reihen : vom Korollar 6.1.7
bis Satz 6.3.3.



Vom letzten Mal ...

Satz 6.1.6

(**Wurzelkriterium**) Es sei $\sum a_n$ eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern a_n . Falls ein q existiert, sodass $0 \leq q < 1$ und eine n_0 existiert, sodass

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent. Falls $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ für unendliche viele Indizes n , dann divergiert $\sum a_n$ gegen unendlich. $\smile$

Buch : Es reicht nicht, dass $\boxed{\sqrt[n]{a_n} < 1} \forall n$,
um zu sagen, dass $\sum a_n < +\infty$

$$\underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty}_{\text{Bsp.}} \quad , \text{ aber } \sqrt[n]{n} > 1 \quad \forall n > 1$$
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1}_{\text{für } n > 1}$$

Erinnerung

$a_n \geq 0$ $\Rightarrow (S_n)_n$ monoton wachsend ist

$S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n$
 $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \right]$ existiert immer!

Korollar 6.1.7

Es sei $\sum a_n$ eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern a_n . Nehmen wir an, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

existiert und gleich l ist. Dann wenn $l < 1$, konvergiert die Reihe $\sum a_n$; wenn $l > 1$ dann divergiert die Reihe $\sum a_n$ gegen unendlich.

Beweis: Übung $l + \varepsilon < 1 \dots$

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$, $a \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$ konvergent

$\underbrace{\hspace{10em}} \rightarrow (S_n)$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Satz 6.1.8

(Quotientenkriterium) Es sei $\sum a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern a_n . Falls ein q existiert, sodass $0 \leq q < 1$ und eine n_0 existiert, sodass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \text{ für alle } n \geq n_0,$$

dann ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent. Falls für eine $n_0 \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \geq n_0$ ist, dann divergiert $\sum a_n$ gegen unendlich.

Beweis:

Nehmen wir an, dass $\exists q : 0 \leq q < 1$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \forall n \geq n_0$$

$$\forall k \geq 1$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} &\leq q \Rightarrow a_{n_0+k} \leq q \cdot a_{n_0+k-1} \leq q \cdot (q \cdot a_{n_0+k-2}) \\ &= q^2 \cdot a_{n_0+k-2} \leq q^3 \cdot a_{n_0+k-3} \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{n_0+k} \leq q^k \cdot a_{n_0} \quad \forall k \geq 0 \quad \swarrow +\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k \geq 0} a_{n_0+k}} \leq \sum_{k \geq 0} (q^k \cdot a_{n_0}) = a_{n_0} \cdot \underbrace{\sum_{k \geq 0} q^k}$$

Bmk : $\sum_{k \geq 0} q^k$ geom. Reihe, und sie
konv.

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n \geq n_0} a_n}_{\Downarrow} \leq \sum_{k \geq 0} q^k < +\infty$$

$$\underbrace{\sum_{n \geq 0} a_n}_{\text{konvergiert}} = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n \geq n_0} a_n < +\infty$$

2. Fall: $\forall n \geq n_0 \quad a_{n+1} \geq a_n > 0$

$\Rightarrow$ (a_n) ist keine Nullfolge $\Rightarrow$
(Übung) $\sum a_n = +\infty$

□

Korollar 6.1.9

Es sei $\sum a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern a_n . Nehmen wir an, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existiert und gleich l ist. Dann wenn $l < 1$, konvergiert die Reihe $\sum a_n$; wenn $l > 1$ dann divergiert die Reihe $\sum a_n$ gegen unendlich.

Beweis, Übung

Beispiele: $(1) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right] \quad a_n = \frac{1}{n!} \rightarrow 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{\cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} = \frac{1}{(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \underline{\sum a_n \text{ konv.}}$$

Kor. 6.1.9

$$(2) \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0, a \in \mathbb{R} \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \right)$$

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} =$$

$$\frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \frac{a \cdot \cancel{a^n}}{\cancel{a^n}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(n+1)(\cancel{n!})} = \frac{a}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} < +\infty$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad a_n = \frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!} \cdot n^n}{(\cancel{n+1})(n+1)^n \cdot \cancel{n!}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} < 1$$

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$2 < e < 3 \quad \Bigg| \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < +\infty$$

Satz 6.1.10

(**Cauchysches Verdichtungskriterium**) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit nicht-negativen Folgengliedern, also

$$\underline{a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq 0.}$$

Dann ist $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ konvergent genau dann, wenn $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Beispiel: Wir haben schon bewiesen, dass

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}} = \begin{cases} \text{div. } +\infty & \alpha \leq 1 \\ \text{konv.} & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Für $1 < \alpha < 2$? Mit Satz 6.1.10 $\rightarrow$ konv.

$$\rightarrow \boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{konv.} & \forall \alpha > 1 \\ +\infty & \forall \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \quad 2^n \cdot a_{2^n} = \underbrace{\left(2^n\right)}_{\left(2^\alpha\right)^n} \cdot \frac{1}{\underbrace{\left(2^n\right)^\alpha}_{\left(2^\alpha\right)^n}} = \frac{1}{\left(2^{\alpha-1}\right)^n}$$

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

$$2^n \cdot a_{2^n} = \underbrace{\left(2^n\right)}_{(2^n)^\alpha} \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$$

$$\sum 2^n \cdot a_{2^n} = \sum \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n} : \text{geometrische Reihe}$$

$$\text{Konv. falls } \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right) < 1 \Leftrightarrow 2^{\alpha-1} > 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 > 0$$

Beweis (Satz 6.1.10)

$$(S_n) \quad S_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n \quad \forall n$$

(S'_n) Folge der P.S. von $\sum 2^n a_{2^n}$

$$s'_0 = 2^0 \cdot a_{2^0} = a_1$$

$$s'_1 = s'_0 + 2 \cdot a_2 \dots$$

$$\begin{aligned} a_0 &\leq a_0 \\ a_1 &\leq a_0 \\ a_2 + a_3 &\leq 2 \cdot a_2 \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &\leq 4 \cdot a_4 \\ &\leq a_4 \leq a_4 \end{aligned}$$

$$a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n \cdot a_{2^n}$$

$$(2^{n+1} - 1) - 2^n + 1 = 2^{n+1} - 2^n = 2^n \quad \text{Anzahl der Summanden}$$

$$\boxed{S_{2^{n+1}-1} \leq 2a_0 + s'_n - a_1} \quad (*)$$

$$a_0 \geq \frac{1}{2} a_0$$

$$a_1 + a_2 \geq a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 a_2$$

$$a_3 + a_4 \geq 2 \cdot a_4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot a_4$$

$$\rightarrow a_5 + a_6 + a_7 + \underbrace{a_8}_{\geq a_8} \geq 4 \cdot a_8 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a_8$$

$$\underbrace{a_{2^{n-1}+1}}_{\geq a_{2^n}} + \underbrace{a_{2^{n-1}+2}}_{''} + \dots + a_{2^n} \geq \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2^n a_{2^n}}_{2^{n-1}}$$

$$2^n - (2^{n-1} + 1) + 1 = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\boxed{S_{2^n} \geq \frac{1}{2} S'_n + C} \quad (\text{***})$$

(I) Nehmen wir an, dass (S'_n) konvergiert
 $(\sum 2^n a_{2^n} < +\infty)$

Zu b.: $\sum a_n < +\infty$

$$\boxed{S_{2^{n+1}-1} \leq 2a_0 + S'_n - a_1} \quad (*)$$

(S'_n) konv. $\Rightarrow (S'_n)$ beschränkt $\Rightarrow$

$(S_{2^{n+1}-1})$ (Teilfolge von (S_n)) beschränkt

Bwk (Übung) : $\left. \begin{array}{l} (*) (S_n) \text{ monoton wachsende Folge} \\ (a_n \geq 0) \\ (*) (S_n) \text{ besitzt eine Teilfolge, die beschränkt ist} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow (S_n)$ beschränkt

(S_n) beschränkt + monot. wachsend
 $\Rightarrow$ sie konvergiert, $\sum a_n$

$$\boxed{S_n \geq \frac{1}{2} S'_n + C} \quad (**)$$

II) Nehmen wir an, dass $\sum a_n$ konv.

z.B. : $\sum 2^n a_{2^n}$ konv.

$\sum a_n$ konv. $\Rightarrow (S_n)$ beschränkt $\Rightarrow (**)$

(S'_n) beschränkt

Aber (S'_n) monoton wachsende, beschränkte

Folge $\Rightarrow$ sie konvergiert



6.2 Absolut Konvergenz

Bwk : Falls (a_n) nicht unbedingt ≥ 0

* $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existiert? Nicht immer....

[* Es ist nicht genug zu wissen, dass (S_n) beschränkt ist, um zu schließen, dass sie konvergiert
 $(a_n \geq 0 \Rightarrow \underline{(S_n)} \text{ mon. wach.})$]

Beispiele

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n$$

$$a_n = (-1)^n \not\rightarrow 0$$

$$S_n$$

$$S_0 = a_0 = 1$$

$$S_1 = S_0 + a_1 = 1 - 1 = 0$$

$$S_2 = S_1 + a_2 = 1, S_3 = 0$$

1 0 1 0 1 0 ... besitzt
keinen Grenzwert!!

Definition 6.2.1

Eine reellwertige oder komplexwertige Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ konvergent ist.

Bemk. : $|a_n| \geq 0 \leadsto$ Kriterien

Frage: $\sum |a_n|$ konvergiert $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ konvergiert

Satz 6.2.1

Eine Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, die absolut konvergent ist, ist selbst konvergent.

Beweis $(\sum |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty)$

$\circ \nabla \underbrace{a_n \leq |a_n|}_{\text{Vorsicht!}}$

Bemk. : Selbst wenn $a_n \leq |a_n|$, können wir kein Majoranten-Kriterium benutzen!!!

Cauchy-Kriterium (Satz 6.1.1.)

(s'_n) : Folge der P.S. von $\sum |a_n|$

$\sum |a_n|$ konv. $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon),$

$$\forall n \geq m \geq n_0$$

$$|s'_n - s'_m| < \varepsilon$$

$$|a_n + \dots + a_{m+1}| \stackrel{||}{\leq} |a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_{m+1}| < \varepsilon$$

 $\downarrow$ Dreiecksungleichung

$\Rightarrow \sum a_n$ erfüllt das Cauchy-Kriterium

$\iff (s_n)$ Cauchy Folge ist $\iff (s_n)$
konvergent!



Buck: Es gilt nicht, dass

$$\sum a_n \text{ konv.} \Rightarrow \sum |a_n| \text{ konv.}$$

Beispiel: $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n} \text{ konv. (später)}$

aber $\sum_{n \geq 1} \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$

$$\sum a_n \text{ konv.} \not\Rightarrow \sum |a_n| \text{ konv.}$$

Beispiele (absolut konvergente Reihen)

$$1. \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

$$\leadsto \sum_{n \geq 1} \left| (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \right| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \quad \forall \alpha > 1$$

2. Exponentialreihe : $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{absolut konv. } \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} \quad \leadsto \sum \frac{|z|^n}{n!} \quad \text{konv. } \forall |z| \geq 0$$

$\left(\sum \frac{a^n}{n!} \right)$

$$\underbrace{\exp(z)} := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Eulersche Zahl e

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Lemmas : $e = \exp(1)$

$\updownarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{!}{=} \sum_{n \geq 0} \frac{1^n}{n!}$$

(Kein Beweis)

Für Reihen die nicht absolut konvergent sind... welches "Konvergenzkriterium" haben wir?

Satz 6.2.3

(Leibniz Kriterium) Es sei $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ eine alternierende reellwertige Reihe, wobei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nehmen wir an, dass

(i) die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist

(ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$.

Beweis

$$(1) \quad a_n \geq a_{n+1} \geq \dots \geq a_{n+k} \dots \quad \forall k > 0 \quad (*)$$

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_n$$

$$\begin{aligned} S_{2n+2} &= S_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = \\ &= S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = \\ &= S_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq S_{2n} \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \quad (1)$

Also $S_{2n+2} \leq S_{2n} \quad \forall n$

$\Rightarrow (S_{2n})$ monoton fallend

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq S_{2n-1} \quad \forall n$$

$\Rightarrow (S_{2n+1})$ monoton wachsend $\forall n$

$$\underbrace{S_{2n} - S_{2n+1}}_{\cdot} = \underbrace{a_{2n+1}}_{\cdot} > 0 \quad (\star)$$

$$\Rightarrow \underbrace{S_{2n}}_{(\star)} > S_{2n+1} \geq S_{2n-1} \geq \dots \geq \underbrace{S_1}$$

$\Rightarrow (S_{2n})$ nach unten beschränkt ist }
dazu (S_{2n}) monoton fallend } $\Rightarrow$

$\Rightarrow (S_{2n})$ konvergiert (gegen $\underbrace{\infty}_{\substack{! \\ l}})$

$$S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$$

(*) (S_{2n+1}) monoton wachsend

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1}$ existiert

Zu beweisen: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = l$

$$\begin{array}{ccc} S_{2n+1} = \underbrace{S_{2n}}_{\downarrow n \rightarrow +\infty} - \underbrace{a_{2n+1}}_{\downarrow (ii)} & & \\ \downarrow & & \\ l = l - 0 & & \end{array}$$

Deshalb:

$$\left. \begin{array}{l} (S_{2n}) \quad (\text{Teilfolge von } (S_n)) \quad S_{2n} \rightarrow l \\ (S_{2n+1}) \quad \text{''} \quad \text{''} \quad S_{2n+1} \rightarrow l \end{array} \right\} \text{Übung} \rightarrow$$

$$\underline{S_n \rightarrow l}$$



Beispiel: $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ Konvergiert

(*) alternierende Reihe

(i) $(a_n = \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ ist monoton fallend

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

... aber $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist nicht absolut
Konvergent !

6.3 Assoziativität und Kommutativität

$\sum a_n$: reell- oder komplexwertige Reihe

• Assoziativität

$$\left(\sum a_n \right)$$

$$\left(\sum b_n \right)$$

wir gruppieren einige Summanden von a_n

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & \underbrace{\hspace{2.5cm}} & & & \\ b_0 & & b_1 & & & b_2 & & & \\ (a_0 + a_1) & & (a_2 + a_3 + a_4) & & & & & & \end{array}$$

Assoziativität : (S_n) Folge der Partialsummen von $\sum a_n$

$$(S'_n) \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \sum b_n$$

Assoziativität bedeutet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existiert

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n$ existiert, falls $\overset{n \rightarrow \infty}{S'_n}$ existieren, sind sie dieselbe

Lemma 6.3.1

Falls $\sum a_n$ konvergiert $\Rightarrow \sum b_n$ konvergiert

Falls $a_i \in \mathbb{R} \forall i$ $\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$

Beweis: Übung

Bemerkung: (s_n) ist
eine Teilfolge von (s_n)

... aber

$$\sum (-1)^n$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ existiert /
nicht!

$$\Rightarrow (1-1) + (1-1) + (1-1) \dots \rightarrow 0$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 0 \quad \quad 0$

$$(s_n) = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \dots)$$

• Kommutativität

Definition 6.3.1

Es sei $\sum a_n$ eine Reihe. Wir sagen, dass $\sum b_n$ eine **Umordnung** der Reihe $\sum a_n$ ist, wenn eine bijektive Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$\rightarrow b_j = a_{\sigma(j)} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

→ Die Summanden von $\sum a_n$ werden umgeordnet

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{\text{Komm.}} = a_2 + a_1 + a_3 \quad \checkmark$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}$

$$\sigma: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

1	↦	2
2	↦	1
3	↦	3

$b_1 = a_2$
 $b_2 = a_1$
 $b_3 = a_3$

• Was bedeutet, dass die Kommutativität gilt?

$$\sum a_n \quad (S_n) \quad , \quad \sum b_n \quad (S'_n)$$

$\exists \text{ lin } S_n \iff \exists \text{ lin } S'_n$ und
falls sie existieren, sie rollen dieselbe sein

nicht
immer
wahr!

* Für einige Umordnungen gilt, immer, dass $\sum a_n$ $\sum b_n$ dasselbe Verhalten haben

$$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \exists J \subseteq \mathbb{N}, |J| = m \in \mathbb{N}, \\ \sigma(j) = j \quad \forall j \in \mathbb{N} \setminus J$$

Übung

Satz 6.3.2

(Satz von **Riemann-Dini**) Es sei $\sum a_n$ eine reelle Reihe, die konvergent – aber nicht absolut konvergent – ist. Dann gegeben eine beliebige (!) reelle Zahl s , gibt es eine Umordnung, die gegen s konvergiert. Es gibt dazu Umordnungen, die gegen $+\infty$ divergieren und Umordnungen, die nicht konvergent sind.

Satz 6.3.3

Es sei $\sum a_n$ eine reellwertige Reihe, die absolut konvergent ist. Dann ist jede Umordnung absolut konvergent, und konvergiert gegen dieselbe Summe von $\sum a_n$.