

Tutorium 11



Übung 1: Es sei $f(x) = \arcsin x$,
 $f: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Beweisen Sie, dass $\exists c \in (-1, 1)$, sodass

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{2} \quad \text{und finden}$$

c

Notiz: Benutzen Satz Lagrange. In diesem Fall müssen wir nachprüfen, dass die Hypothesen des Satzes gelten.

Zu zeigen:

1) f stetig in $[-1, 1]$

2) f differenzierbar in $(-1, 1)$

1) Schon bewiesen ($\arcsin x: (-1, 1) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$)

falls $\sin: \underbrace{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{Intervall}} \rightarrow (-1, 1)$

$\sin$ ist stetig + streng mon. wachsend

} $\arcsin$
ist
stetig

$$2) \quad \overset{\swarrow}{\underset{\searrow}{f}}(x) = \arcsin x$$

$$\underset{\searrow}{g}'(x) := f^{-1}(x) = \sin x$$

Zu bemerken: $g'(x) = \cos x = 0 \iff$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ g \text{ stetig} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

$$\left[\begin{array}{l} (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1 \\ \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} = \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} \\ > 0 \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right] \nearrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} =$$

$$\left(\cos \alpha = \sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\underbrace{\sin(\arcsin(x))}_x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \uparrow$$

Buch

Vom Satz (Vorlesung) und auch ~~direkt~~ von
Können wir schließen, dass

$f'(x)$ existiert nicht für $x = \pm 1$

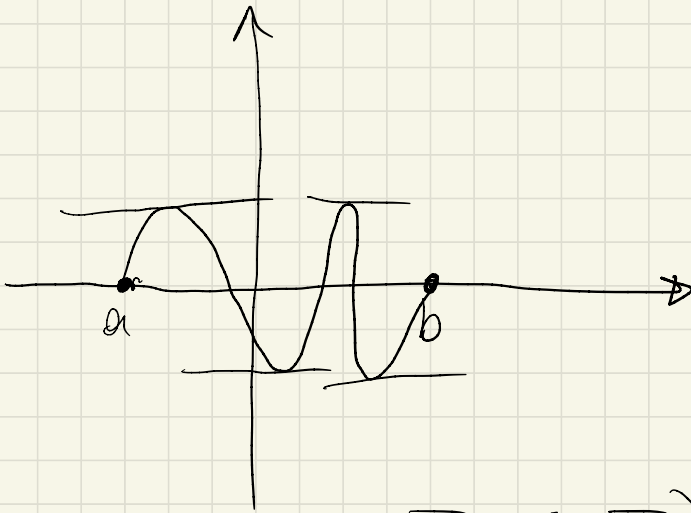
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

~> Wir können den Satz von Lagrange benutzen!

$\Rightarrow \exists c \in (-1, 1)$, sodass

$$(a) \quad f'(c) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1) = 2}$$

(b) Finden Sie ^{alle} c : $\nearrow$



$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(c) = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

Zu lösen $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{2 - \pi \sqrt{1-c^2}}{2 \sqrt{1-c^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\pi} \sqrt{1-c^2} = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow 1-c^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 1 - \frac{4}{\pi^2} \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} =$$

$$= \frac{\pm \sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

Hyperbelfunktionen

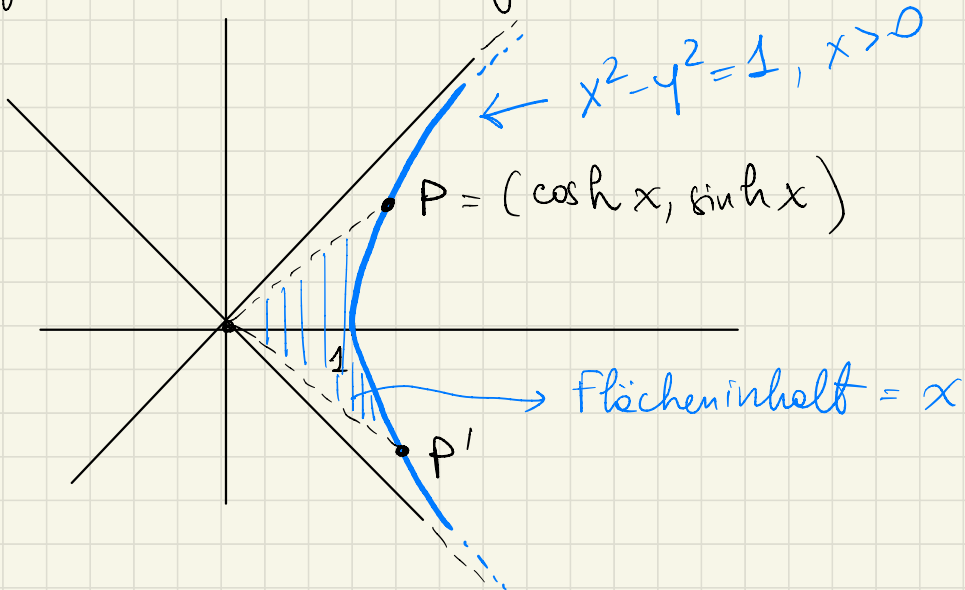
* Hyperbelsinus (oder Sinus hyperbolicus)

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

* Hyperbelcosinus (oder Cosinus hyperbolicus)

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Geometrische Bedeutung:



Übung 2 : Beweisen Sie, dass

(1) $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ invertierbar ist

Die inverse heißt Arctsinus hyperbolicus

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(2) Finden Sie eine explizite Formel für
 $\operatorname{arsinh}(y) = \dots$

(3) Ist arsinh differenzierbar? Wenn ja, berechnen Sie die Ableitung

(4) Berechnen Sie $T_n[\sinh]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(1) $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ invertierbar ist $\iff$

~~sin~~ $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv $\iff$

$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} \rightarrow \text{injektiv (a)} \\ \rightarrow \text{surjektiv (b)} \end{cases}$

(a) Injektivität $\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$f: (I) \rightarrow \text{Intervall}$

[Vorlesung : $f'(x) > 0$ (oder $f'(x) < 0$)

$\Rightarrow f$ streng monoton wachsend
(bzw. " " fallend)

$\Rightarrow f$ injektiv]

$$\frac{d}{dx} (\sinh x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh x$$

$$> 0 \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \sinh x$ strikt monoton wachsend

(b) Surjektivität :

$$\sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Dabei : (*) Wir berechnen

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = l$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = l'$$

* Falls $l = +\infty$ und $l' = -\infty$
wir benutzen die Stetigkeit, um zu
schließen, dass $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
($\leadsto$ surjektiv)

$$(*) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

"Teilübung": $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$(A) \begin{cases} (*) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ (*) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

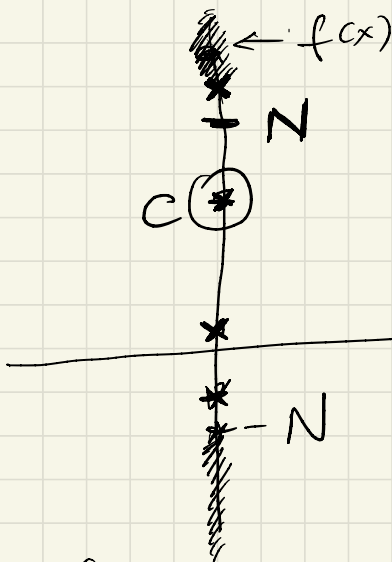
oder

$$(B) \begin{cases} (*) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ (*) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$$

Lösung der Teilübung:

$$(A) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} + f \text{ stetig}$$



$$c \in \mathbb{R}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Zu zeigen:} \\ \exists x \in \mathbb{R} : \\ f(x) = c \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall N > 0 \\ \exists M : \forall x > M \\ f(x) > N \end{array} \right]$$



Nehmen wir $N > c$:

$$\underbrace{\exists x_1 \in \mathbb{R} : f(x_1) > N > c}_{\text{Das gibt eigentlich}} \quad (\forall x > M)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \implies$$

$$\exists x_2 \in \mathbb{R} : f(x_2) < -N < c$$

(2) Formel für $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ziel : $x = x(y)$ $x(y) = \operatorname{arsinh}$

$$2y = e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$$

$$2y e^x - e^{2x} + 1 = 0$$

$$e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$$

Gleichung in x
(y "fest")

Ziel $x = x(y)$

$$e^x = u \quad (\text{Bwk: } \underline{u > 0})$$

$$u^2 - 2y u - 1 = 0$$

$$u = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \rightarrow$$

$$\boxed{u = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{für } u \geq 0 \Rightarrow}$$

$$\text{Bwk } y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$$

$$u = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad u = e^x$$

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\underline{x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})}$$

$$\operatorname{arsinh}(y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

(3) Ist arsinh differenzierbar? Wenn ja, berechnen Sie die Ableitung

$$\underline{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \quad (y_0 = \sinh(x_0))$$

Zu bemerken: (1) $\sinh$ stetig in $\mathbb{R}$ ✓

(2) $\sinh$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit Ableitung $\neq 0$ ✓

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x > 0$$

JA (arsinh differenzierbar)

* Berechnen

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arsinh} y = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} y)} = \star$$

(in Übung 1 ... $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$)
 $\forall x$

$$(\cosh x)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + e^{-2x}) + 2}{4}$$

$$(\sinh x)^2 = \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + e^{-2x}) - 2}{4}$$

$$\Rightarrow (\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \cosh x = \sqrt{1 + (\sinh x)^2}$$

$$\stackrel{\star}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + (\sinh(\operatorname{arsinh} y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

(4) Taylorpolynome von $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\underbrace{f \in C^n(I, \mathbb{R})}_{\text{bei } x_0}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{f^{(k)}(x_0)}_{k!} (x-x_0)^k$$

[Sie brauchen
nur die Differenz.
von
f

in x_0 ,

bis zur
der n-ten
Ableitung]

$$\underbrace{x_0 = 0}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f(x) = \sinh x$$

$$f'(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

⋮

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{(2k)}(x) = \sinh x \\ f^{(2k+1)}(x) = \cosh x \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f^{(2k)}(0) = \sinh(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$f^{(2k+1)}(0) = \cosh(0) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

 $\Downarrow$

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(Bunk : $f(x) = \sinh x$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)
 $\Rightarrow$ (Satz Taylor) $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{x \rightarrow 0}$

Aber ----

$$T_{2n+1}(x) \neq T_{2n+2}(x)$$

$$\begin{cases} o(x^m) \Rightarrow \\ o(x^n) \quad \forall n \leq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Taylor} \quad f(x) = T_{2n+2}(x) + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0$$

$$\stackrel{=}{\neq} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underline{o(x^{2n+2})}$$

Übung 3 : Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh(x) - \sqrt{1+2x^2}}{x^n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}?$$

• Für diese n , berechnen Sie l

Idee : Benutzen die Taylorpolynome und den Satz von Taylor

* Taylorpolynome von $\cosh(x)$:

$$f(x) = \cosh x$$

$$f^{(2k)}(x) = \cosh x, \quad f^{(2k+1)}(x) = \sinh x$$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{(2k)}(0) = 1}$$

$$f^{(2k+1)}(0) = 0 \leftarrow$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \underbrace{T_{2n}(x)}_{\substack{\text{Taylorpol. von} \\ \cosh x \\ \text{um } x_0 = 0}} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Brück : $T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)$

Satz von Taylor (dessen Hypothesen
sicher gelten...)

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f(x) = T_{2n}(x) + o(x^{2n+1}) =$$

$$\underbrace{(\cosh x)}_{\text{}} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\cosh(x))^2}_{\text{}}$$

$$\Rightarrow (\cosh(x))^2 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \right)^2$$

(Probieren wir, ob $n=2$ genug ist...)

$$(\cosh(x))^2 = \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2 =$$

$$= 1 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{(24)^2} + o(x^{10}) + x^2 + \frac{x^4}{24} + \underline{o(x^5)}$$

$$\begin{aligned}
 (\cosh(x))^2 &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^2 = \\
 &= 1 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{(24)^2} + o(x^{10}) + x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^5) + \\
 &\quad + o(x^7) + o(x^9) + \frac{x^6}{48} = \\
 &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5) \quad , x \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

↑

$$\left[\begin{aligned} o(x^n) + o(x^m) &= o(x^n) \quad \forall m > n \\ x^n &= o(x^m) \quad \forall n > m \end{aligned} \right]$$

$$\leadsto g_1(x) = \sqrt{1+2x^2}$$

$$g(y) = \sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(y) = \frac{1}{2} (1+y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g''(y) = \left(-\frac{1}{4} (1+y)^{-\frac{3}{2}} \right)$$

$$\left(g'''(y) = \frac{3}{8} (1+y)^{-\frac{5}{2}} \right)$$

$$\mathcal{T}_n[\sqrt{1+2x^2}](x)$$

$$\mathcal{T}_n[g](y) = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n[\sqrt{1+2x^2}] &= 1 + \frac{(2x^2)}{2} - \frac{(2x^2)^2}{8} + o(x^4) \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$(\cosh(x))^2 \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$

$$\sqrt{1+2x^2} = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$(\cosh(x))^2 - \sqrt{1+2x^2} = \frac{5}{6} x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{6} x^4 + o(x^4)}{x^n} = \underline{\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{n=4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{6} x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{5}{6}$$