

# Analysis 1 Nachklausur WS1415 Geiges

Thorsten Bülo

18. März 2015

## 1

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? Beweisen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel!

### 1.1 i

Die Summe zweier rationaler Zahlen ist rational.

### 1.2 ii

Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist irrational.

### 1.3 iii

Die Summe einer rationalen mit einer irrationalen Zahl ist irrational.

### 1.4 iv

Die irrationalen Zahlen liegen dicht in den Reellen Zahlen, d.h. zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen lässt sich immer noch eine irrationale Zahl finden.

## 2

Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung  $z^3 = 1$  und schreiben Sie diese Lösungen sowohl in der Form  $z = x + iy$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und in der Form  $z = r * e^{i\varphi}$  mit  $r \in \mathbb{R}$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

## 3

### 3.1 a

Geben Sie eine präzise Definition dafür, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$  konvergiert gegen  $a \in \mathbb{C}$ . Schreiben Sie die Definition sowohl in Form von Quantoren als auch in ganzen Worten.

### 3.2 b

Untersuchen Sie folgende Folgen auf Konvergenz oder Divergenz, geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

#### 3.2.1 i

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

#### 3.2.2 ii

$$a_n = \frac{2^n}{n}$$

#### 3.2.3 iii

$$a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$$

## 4

Ein Kreiszylinder ist eine Menge der Form

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, 0 \leq z \leq h\}.$$

mit  $r, h \in \mathbb{R}^+$ . Bestimmen Sie bei gegebenem Volumen  $V$  den Zylinder mit kleinster Oberfläche.

## 5

### 5.1 a

Formulieren und beweisen Sie die Quotientenregel für die Ableitung! Die leibnizsche Produktregel darf ohne Beweis zitiert werden.

### 5.2 b

Bestimmen Sie die Ableitung von

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

### 5.3 c

Warum hat die Tangensfunktion eine Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist? Bestimmen Sie die Ableitung!

# 6

Berechnen Sie folgende Integrale:

## 6.1 a

$$\begin{aligned} & \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ & \int_1^2 x \log x dx \\ & \int_1^2 \log x dx \end{aligned}$$

# 7

Welche der folgenden Reihen sind konvergent, welche sind divergent? Geben Sie an, welches Kriterium Sie verwendet haben und warum man es verwenden darf.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \\ & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 1}} \end{aligned}$$

Nachwort:

Diese Klausur habe ich aus Stichpunkten rekonstruiert. Das heißt, die Wortwahl entspricht nicht dem Original, inhaltlich bin ich mir ziemlich sicher dass alles korrekt ist. Allerdings kann ich dafür selbstverständlich nicht garantieren. Ich hoffe, ich habe hiermit ein wenig bei eurer Klausurvorbereitung geholfen.

Grüße von Thorsten

Verbesserungsvorschläge bitte an thorsten.buelo@gmail.com

Es gilt cc-by-nc-sa, ohne die Rechte von Prof. Geiges einzuschränken.