Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
25.11.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 6

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 02.12.15 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (30 Punkte)

Zeigen Sie den Hauptsatz der ebenen Kurventheorie.

Satz 1 (Hauptsatz der ebenen Kurventheorie) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Fuktion. Dann existiert eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ. Diese ebene Kurve ist bis auf Dahinterschaltung von orientierungserhalenden euklidischen Bewegungen eindeutig.

Aufgabe 2. (5+15 Punkte)

Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $\ddot{\beta} \neq 0$. Die Evolute der Kurve ist die Kurve $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\epsilon(s) = \beta(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\underline{n}(s).$$

a) Erinnern Sie sich daran, dass wir die Evolute auch für Ebene Kurven definiert haben. Erklären Sie die geometrische Bedeutung der Evolute von Raumkurven.

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (wieder) die Schraubenlinie, gegeben durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} a\cos(s) \\ a\sin(s) \\ bs \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \qquad a, b \neq 0.$$

b) Zeigen Sie, dass die Evolute der Schraubenlinie wieder eine Schraubenlinie ist (es ist erlaubt die Antworten des Übungsblatts 5 zu benutzen). Was sind die Parameter der Evolute ?