Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
7.7.2016

Topologie: Übungsblatt 12

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 14.7.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Es seien X ein zusammenhängender Raum und $\phi : \partial D^2 = S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Definieren Sie $Y = X \cup_\phi D^2$. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)/N,$$

wobei $N := \langle [\phi] \rangle$ die normale Untergruppe von $\pi_1(X)$ ist, die durch die Homotopieklasse der Kurve ϕ erzeugt ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Es seien X ein zusamenhängender zweidimensionaler CW-Komplex, und $\phi : \partial D^n \to X$ eine stetige Abbildung. Es sei Y der CW-Komplex definiert durch $Y = X \cup_\phi D^n$. Zeigen Sie, dass

$$\pi_1(Y) \cong \pi_1(X), \qquad \text{wenn} \qquad n \geq 3.$$

Aufgabe 1 und 2 zeigen dass die Fundamentalgruppe eines CW-Komplexes berechnet werden kann, auch wenn man nur das 2-Skelett kennt. Hier haben wir dies nur für endliche Komplexen bewiesen, aber ist der Beweis im allgemeinen Fall nicht viel komplizierter.

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

a) Siehen Sie Figur 1, und zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^1$ homöomorph zu S^1 ist.
b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}P^1$ homöomorph zu S^2 ist.

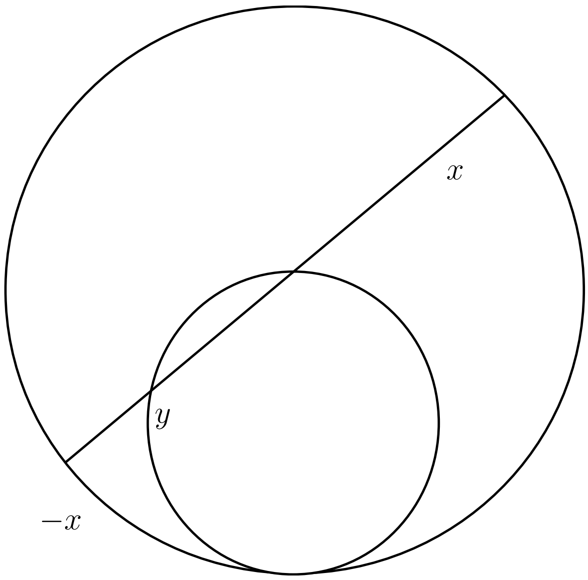

FIGURE 1 – Hinweis : Betrachten Sie das innere Kreis als S^1, und das äußere Kreis als $\mathbb{R}P^1$. Das Punkt $y \in S^1$ wird eindeutig durch das Punkt $[\pm x] \in \mathbb{R}P^1$ definiert. Finden Sie eine Formel für diese Abbildung.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ die Quotientabbildung. Zeigen Sie dass γ eine Überlagerung ist.

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Berechnen Sie $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis : Erinnern Sie sich an Übungsblatt 9.*