

---

**ANALYSIS I NOTIZEN:**  
**EIN GESPRÄCH MIT DEN STUDENTEN**  
Prof. Dr. Silvia Sabatini

---



WINTERSEMESTER 2020/21 - Universität zu Köln

### **Warnung!**

Es handelt sich hier um *Notizen*: Es wird keine Garantie gegeben für die grammatischen oder mathematischen Korrektheit des Textes. Die Anwendung dieser Notizen erfolgt auf eigene Gefahr.

---

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>Wichtige Informationen zu diesen Notizen</b>	<b>1</b>
0.1 Organisation . . . . .	2
0.2 Wie verwende ich diese Notizen? . . . . .	3
0.3 Einige nützliche Tipps zum Studium von Analysis 1 (und allen mathematischen Fächern im Allgemeinen): . . . . .	4
<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Einige Grundbegriffe der Mengenlehre . . . . .	6
1.1.1 Logik der Prädikate . . . . .	6
1.1.2 Quantoren (oder Quantifikatoren) . . . . .	9
1.1.3 Mengenlehre . . . . .	11
1.2 Relationen und Abbildungen . . . . .	18
1.2.1 Spezielle Funktionen und Verknüpfung zweier Funktionen . . . . .	20
1.2.2 Äquivalenzrelationen und Ordnungen . . . . .	24
1.3 Die natürlichen Zahlen . . . . .	29
1.3.1 Mächtigkeit (oder Kardinalität) einer Menge . . . . .	29
1.3.2 Definition der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ . . . . .	30
1.3.3 Operationen auf $\mathbb{N}$ . . . . .	31
1.3.4 Peanos Axiome und das Induktionsprinzip . . . . .	32
1.3.5 Das Induktionsprinzip . . . . .	34
1.4 Etwas Kombinatorik . . . . .	39
1.5 Die ganzen und rationalen Zahlen . . . . .	49
1.5.1 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ . . . . .	49
1.5.2 Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ . . . . .	55
1.6 Zusätzliche Übungen . . . . .	57

<b>2 die Reellen Zahlen</b>	<b>63</b>
2.1 Das abstrakte Konzept von angeordnetem Körper . . . . .	64
2.1.1 Die Ordnungsvollständigkeit . . . . .	72
2.2 Reelle Zahlen als Dezimalzahlen . . . . .	76
2.2.1 Die Operationen auf der Menge der Dezimalzahlen . . . . .	77
2.2.2 Die Ordnungsvollständigkeit . . . . .	80
2.3 Weitere Eigenschaften und Definitionen von $\mathbb{R}$ . . . . .	82
2.3.1 Das Archimedische Axiom und die Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ . . . . .	82
2.3.2 Potenzen und (Quadrat)wurzeln . . . . .	83
2.4 Mächtigkeit und Abzählbarkeit . . . . .	84
2.5 Zusätzliche Übungen . . . . .	90
<b>3 die Komplexen Zahlen</b>	<b>93</b>
3.1 Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ . . . . .	94
3.2 Die Polarform der komplexen Zahlen . . . . .	100
3.3 Zusätzliche Übungen . . . . .	106
<b>4 Folgen</b>	<b>109</b>
4.1 Folgen: Allgemeine Eigenschaften . . . . .	110
4.1.1 Das Konzept von Grenzwert und Konvergenter Folgen . . . . .	110
4.1.2 Reelle Folgen . . . . .	116
4.2 Häufungspunkte und Bolzano-Weierstraß . . . . .	122
4.3 Zurück in die Vergangenheit . . . . .	129
4.3.1 Mathematische Chronologie . . . . .	130
4.3.2 Andere Möglichkeiten zur Einführung reeller Zahlen . . . . .	131
4.4 Zusätzliche Übungen und Beispiele . . . . .	134
<b>5 Stetigkeit und Topologie auf <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>139</b>
5.1 Euklidische Norm und Abstandsfunktion . . . . .	140
5.2 Stetigkeit . . . . .	143
5.3 Grenzwerte von Funktionen . . . . .	154
5.3.1 Grenzwerte für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ . . . . .	159
5.4 Überblick über die euklidische Topologie . . . . .	161
5.4.1 Kompaktheit . . . . .	174
5.4.2 Zusammenhängende Teilmengen . . . . .	177
5.5 Stetige Funktionen und topologische Konsequenzen . . . . .	179
5.6 Zusätzliche Übungen und Beispiele . . . . .	185
<b>6 Reihen</b>	<b>193</b>
6.1 Konvergenzkriterien für Reihen . . . . .	196
6.1.1 Reelle Reihen mit nicht-negativen Gliedern . . . . .	197
6.2 Absolut Konvergenz . . . . .	205
6.3 Assoziativität und Kommutativität . . . . .	208

6.4 Zusätzliche Übungen . . . . .	213
<b>7 Einige elementare Funktionen</b>	<b>217</b>
7.1 Stetigkeit und strenge Monotonie . . . . .	218
7.2 Exponentialfunktionen, Logarithmen und Potenzfunktionen . . . . .	221
7.3 Einige wichtige Grenzwerte . . . . .	228
<b>8 Differentialrechnung</b>	<b>231</b>
8.1 Differenzierbarkeit: erste Eigenschaften und Beispiele . . . . .	232
8.2 Funktionseigenschaften und Ableitungen . . . . .	250
8.2.1 Erste Ableitung, Extrema und Monotonie . . . . .	250
8.3 Taylorapproximation und Taylorpolynome . . . . .	261
8.3.1 Verwendung von Taylorpolynomen bei der Berechnung von Grenzwerten . . . . .	274
8.3.2 Ein Blick auf die Taylorreihen . . . . .	276
8.4 Konvexität und zweite Ableitung . . . . .	280
8.5 Zusätzliche Übungen . . . . .	285
<b>9 Das Riemannsche Integral</b>	<b>297</b>
9.1 Definitionen und erste Eigenschaften . . . . .	298
9.2 Integrierbarkeitskriterien . . . . .	309
9.2.1 Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	310
9.3 Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung . . . . .	317
9.3.1 Partielle Integration . . . . .	321
9.3.2 Substitution . . . . .	323
9.4 Uneigentliche Integrale . . . . .	325
9.4.1 Reihen und uneigentliche Integrale . . . . .	327
9.5 Zusätzliche Übungen . . . . .	328
<b>Vorlesungen</b>	<b>329</b>

---

## WICHTIGE INFORMATIONEN ZU DIESEN NOTIZEN

## 0.1 Organisation

Auf Grund der SARS-CoV-2 Pandemie ist die Präsenzlehre für Analysis I im Wintersemester 2020/21 bis auf weiteres ausgesetzt. Deshalb wird das Lehrangebot online durchgeführt. Für diese Vorlesung sind folgende Maßnahmen geplant:

- Die **erste Vorlesung** findet online im Streaming als **Webinar** auf **Zoom** statt und beginnt am **3. November 2020 um 8:00 Uhr**.
- Bitte installieren Sie auf Ihrem Rechner das Programm **Zoom**. Sie brauchen lediglich das Programm und keinen Account, um der Vorlesung zu folgen. **Hier** kann man das Programm runterladen. **Bitte treten Sie dem Zoom Meeting mit ausgeschalteter Kamera und Mikrofon bei.**
- Die **folgenden Vorlesungen** werden aufgezeichnet und auf der ILIAS-Website veröffentlicht. Um auf die Inhalte von ILIAS zugreifen zu können, müssen Sie sich auf ILIAS registrieren und einloggen (mit dem Benutzernamen und dem Passwort, die Sie von der Universität erhalten haben). Jede Woche werden die Vorlesungen zu Beginn der Woche verfügbar sein (z. B. werden die beiden Lektionen der Woche A am Montag der Woche A in Videoform auf ILIAS verfügbar sein).
- Für Informationen und Hausarbeiten:  
[www.silvia-sabatini.com/analysis1](http://www.silvia-sabatini.com/analysis1)
- **Sprechstunde** während der Vorlesungszeit: nach Vereinbarung (bitte senden Sie eine E-Mail an [sabatini@math.uni-koeln.de](mailto:sabatini@math.uni-koeln.de), damit wir ein "Zoom-Meeting" organisieren können)
- **Zuständiger Assistent:** Alexander Caviedes Castro ([caviedes@math.uni-koeln.de](mailto:caviedes@math.uni-koeln.de))
- Bitte verwenden Sie die E-Mail-Adresse [analysis-sabatini@math.uni-koeln.de](mailto:analysis-sabatini@math.uni-koeln.de) für mathematische Fragen. Die Antworten werden Ihnen direkt von den Assistenten in Ihren Übungsklassen gegeben. Für dringendere und wichtigere Fragen wenden Sie sich bitte direkt an [sabatini@math.uni-koeln.de](mailto:sabatini@math.uni-koeln.de).

## 0.2 Wie verwende ich diese Notizen?

Die Vorlesung von Analysis 1 ist nicht einfach, da viele schwierige Konzepte in sehr kurzer Zeit eingeführt werden müssen, die von Mathematikern der letzten Jahre über viele Jahre hinweg ausgearbeitet und eingeführt wurden.

In diesen Notizen habe ich versucht, diese Konzepte mit gebührender Vorsicht und Präzision einzuführen und auch viele Beispiele und Übungen zu diskutieren, die zum Verständnis beitragen sollen. Aber all dieses Material ist viel, und ich kann das alles nicht in den Stunden diskutieren, die uns gegeben wurden (auch unter Berücksichtigung der Tatsache, dass wir aufgrund von Covid zwei Wochen weniger Unterricht haben). Also habe ich diese Notizen wie folgt organisiert:

- Da wir nicht die Zeit haben, alles, was ich hier geschrieben habe, zusammen zu sehen, wird das *wesentliche und notwendige Material* für die Vorlesung in den aufgezeichneten Vorlesungen behandelt, aus denen ich auch prägnantere Notizen schreiben werde (die auf ILIAS veröffentlicht werden).

*Dies gilt insbesondere für die Kapitel 1 und 2.*

- Die neugierigsten Studierenden, die eine tiefere Einführung in Analysis 1 wünschen, haben die Möglichkeit, durch Lesen dieser Notizen mehr zu lernen. *Beachten Sie jedoch, dass, wie oft (zumindest für mich), die zu prägnante Behandlung schwieriger Konzepte viel weniger klar ist als die längeren!* Wenn es Ihre Zeit erlaubt, *werden Sie alle aufgefordert, diese Notizen zu lesen.*
- Bitte beachten Sie, dass insbesondere das in den **Abschnitten 1.1.1 und 1.1.2** behandelte Material im Unterricht nicht behandelt wird, da Ihnen zumindest das meiste davon bereits bekannt sein sollte und bereits im Vorkurs besprochen wurde. Wenn Sie Lücken haben, *können Sie diese beiden Abschnitte bereits vor Beginn des Unterrichts (3. November) lesen.*

### 0.3 Einige nützliche Tipps zum Studium von Analysis 1 (und allen mathematischen Fächern im Allgemeinen):

- *Das Verständnis neuer und schwieriger Konzepte erfordert Zeit und Konzentration.* Ich rate Ihnen, Ihr Mobiltelefon während des Studiums auszuschalten oder nicht anzusehen und sich nicht von den vielen Benachrichtigungen über soziale Netzwerke stören zu lassen ...
- *Wenn Sie verwirrt sind, ist das wahrscheinlich ein gutes Zeichen.* Ein/e gute/r Student/in stellt sich immer viele Fragen, und sie nicht zu haben oder zu akzeptieren, was geschrieben steht, ist kein gutes Zeichen und bedeutet zu viel Passivität. Ein wenig Verwirrung ist also willkommen, solange Sie sich die richtige Zeit nehmen, um Ihre Ideen zu klären.
- Nochmal, *seien Sie nicht passiv!* Stellen Sie sich immer viele Fragen (und am Anfang werde ich Sie dringend bitten, sie zu stellen). Wenn Sie Geschriebenes "es folgt, dass ...", "und daher ..." finden, fragen Sie sich immer, ob Sie den Grund für diese Konsequenz wirklich verstanden haben.
- *Lösen Sie viele Übungen!* Im Verlauf dieser Notizen gibt es viele Vorschläge. Viele davon sind optional, einige werden jedoch in den Übungsblättern verwendet. Wenn Sie Zeit haben und sich für dieses Thema begeistern, versuchen Sie auch, andere zu lösen (z.B. aus anderen Übungsbüchern). Es ist eine Möglichkeit, sich wirklich für dieses (schöne) Thema zu begeistern, und es lässt Sie wirklich verstehen, was Sie verstanden haben und was Sie nicht verstanden haben.
- Das Lösen der Übungen kann lange dauern. Seien Sie also nicht überrascht, wenn Sie nicht wissen, wie Sie sie sofort lösen können! Sie werden auf die schwierigsten Übungen hingewiesen.
- Biten Sie andere Kommilitonen (Kommilitoninnen), Assistenten oder mich um Hilfe, wenn Sie genügend Zeit damit verbracht haben, über die Antworten nachzudenken, nach denen Sie suchen.

---

---

## KAPITEL 1

---

### GRUNDLAGEN

*Warnung! Für einige Studierende scheinen die Konzepte, die in den nächsten Abschnitten folgen, entweder trivial oder zu beschwerlich und verwickett zu sein, um intuitiv zutreffende Konzepte auszudrücken. Die Intuition kann uns jedoch leicht täuschen, und, ohne eine angemessene Formalisierung und Klärung grundlegender Konzepte, bei noch komplexeren Konzepten verlässt sie uns langsam. Eine Formalisierung ist dann notwendig, um zu vermeiden, Opfer subtiler Widersprüche zu werden und in logische Fallen zu geraten. Wir müssen daher geduldig sein und nicht alles für selbstverständlich halten, wie die Hausarbeiten verständlich machen sollten*

...

## 1.1 Einige Grundbegriffe der Mengenlehre

*Im Folgenden bezeichnen wir mit  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen, die intuitiv als  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  definiert ist (aber formal definiert in Abschnitt 1.3).*

In diesem Abschnitt werden einige Grundbegriffe des (definitiv nicht elementaren!) Feldes der Mengenlehre und Logik besprochen.

### 1.1.1 Logik der Prädikate

Es sei  $P$  eine Aussage, nämlich ein Satz, der von keinen Variablen abhängt, und dem wir einen Wert der Wahrheit zuschreiben können: wahr (W) oder falsch (F). Zum Beispiel, "Köln ist eine schöne Stadt", oder "2 ist eine gerade Zahl" sind Aussagen (die beide wahr sind?), aber "Willkommen in Köln" ist keine Aussage. In der Mathematik werden nicht oft Aussagen verwendet, sondern Prädikate: sie sind Sätze, die von einer oder mehreren Variablen (oder Argumenten) abhängen. Dann kann man den Wert von Wahrheit zuordnen, oder annehmen. Tatsächlich sind die Prädikate genau die "Sätze", die als Hypothesen und Thesen unserer Lemmas, Sätze und Theoreme erscheinen. Zum Beispiel ist "2 ist eine gerade Zahl" kein Prädikat, aber " $n$  ist eine gerade Zahl" ist ein Prädikat. Im Folgenden werden wir Prädikate einfach mit  $P, Q, \dots$  bezeichnen (Manchmal muss jedoch angegeben werden, dass sie beispielsweise von einer natürlichen Zahl  $n$  abhängen und in diesem Fall mit  $P(n)$  bezeichnet werden.)

Es seien  $P$  und  $Q$  Prädikate. Ein oder mehrere Prädikate können durch die folgenden Operationen geändert oder verbunden werden:

- $\neg P$ , die Verneinung von  $P$ .
- $P \vee Q$ , nämlich  $P$  oder  $Q$  (auch beides gleichzeitig ist erlaubt).
- $P \wedge Q$ , nämlich  $P$  und  $Q$ .

- $P \Rightarrow Q$  (der Folgepfeil) liest "P impliziert Q" oder "wenn P gilt, dann gilt auch Q". Wenn zum Beispiel P die Aussage "n ist ein natürliche Vielfaches von 4" ist, und Q die Aussage "n ist gerade", dann haben wir " $P \Rightarrow Q$ ".

Es wird auch verwendet, um zu sagen, dass "Q eine *notwendige Bedingung* für P ist" oder "P eine *hinreichende Bedingung* für Q ist". Im vorherigen Beispiel erhalten wir die folgenden: "Es reicht aus, dass eine Zahl n ein Vielfaches von 4 ist, damit sie gerade ist" oder, "Eine Zahl n muss gerade sein, damit sie ein Vielfaches von 4 ist".

Die Notation  $Q \Leftarrow P$  bedeutet  $P \Rightarrow Q$ .

- $P \Leftrightarrow Q$  lautet "P ist äquivalent zu Q" oder "P gilt genau dann, wenn Q gilt". Die folgende Äquivalenz sollte an dieser Stelle klar sein (?):

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

Beachten Sie, dass " $\neq P$ ", " $P \vee Q$ ",  $P \wedge Q$ ,  $P \Rightarrow Q$  und  $P \Leftrightarrow Q$  selbst neue Prädikate sind.

Für diese neuen Prädikate hängt die Zuordnung des Wahrheitswertes von dem Wahrheitswert ab, der den Komponentenprädikaten zugeschrieben wird. Zum Beispiel, wenn wir annehmen, dass P falsch ist, impliziert dies, dass die Verneinung von P,  $\neg P$ , als wahr angenommen wird und umgekehrt. Dies kann in der folgenden Tabelle zusammengefasst werden:

$P$	$\neg P$
W	F
F	W

Eine solche Tabelle heißt *Wahrheitstabelle*. Ähnlich haben wir

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	W	F
W	F	F	W	F	F
F	F	F	F	W	W

Ich glaube, unsere Intuition lässt uns die Wahrheitstabellen für  $P \wedge Q$ ,  $P \vee Q$  und  $P \Leftrightarrow Q$  akzeptieren. Aber was verwirrend sein kann, ist die Tabelle für  $P \Rightarrow Q$ . Wie könnten wir sie erklären? Nehmen wir das folgende Beispiel: Es sei P das Prädikat "Sie bekommen die Note 1", und Q "Ich schenke Ihnen eine Blume". Dann ist " $P \Rightarrow Q$ " das Prädikat "Wenn Sie die Note 1 bekommen, schenke ich Ihnen eine Blume."

Die Aussage ist wahr, wenn ich mein Versprechen halte, und falsch, wenn ich es nicht halte.

- Angenommen, es ist wahr, dass Sie die Note 1 bekommen und es wahr ist, dass ich Ihnen eine Blume gebe. Da ich mein Versprechen gehalten habe, ist die Implikation wahr. (Erste Zeile in der Tabelle.)
- Nehmen wir an, es ist wahr, dass Sie eine 1 bekommen, aber es ist falsch, dass ich Ihnen eine Blume gebe. Da ich mein Versprechen nicht gehalten habe, ist die Folgerung falsch. (Dritte Zeile)
- Und wenn es falsch ist, dass Sie eine 1 bekommen? Ob ich Ihnen eine Blume gebe oder nicht, ich habe mein Versprechen nicht gebrochen. Die Implikation kann also nicht falsch sein, also muss sie wahr sein. (Die zweite und vierte Zeilen der Tabelle.)

**Übung 1.1.1** (a) Was bedeutet der lateinische Ausdruck

"*ex falso sequitur quodlibet*"?

Und warum müssen wir diese lateinische Übung lösen?

- (b) Prüfen Sie nach, dass die Wahrheitstabelle von " $P \implies Q$ " mit der von " $\neg P \vee Q$ " übereinstimmt. Dann erhalten wir

$$(P \implies Q) \iff \neg P \vee Q.$$

(Überzeugen Sie sich mit dem vorherigen Beispiel dieser Äquivalenz.)



Eine *Tautologie* ist ein Prädikat, das unabhängig vom Wahrheitswert der Prädikate, aus denen es besteht, wahr ist. Zum Beispiel, nehmen wir das Prädikat  $S$  definiert als

$$S := (P \wedge (P \implies Q)) \implies Q.$$

(Das Symbol  $:=$  bedeutet "definiert als") Wir wollen beweisen, dass dies eine Tautologie ist, d.h. (das heißt), dass ihre Wahrheitstabelle immer wahr ist. Sie können leicht nachprüfen, dass sie wie folgt ist:

$P$	$Q$	$P \implies Q$	$P \wedge (P \implies Q)$	$S$
W	W	W	W	W
F	W	W	F	W
W	F	F	F	W
F	F	W	F	W

Wir können  $S$  folgendermaßen interpretieren: "Wenn  $P$  wahr ist und wir beweisen wollen, dass  $Q$  wahr ist, dann gehen wir vor, indem wir beweisen, dass  $P \implies Q$  wahr ist."

**Übung 1.1.2**

Beweisen Sie, dass die folgenden Prädikate Tautologien sind (und überzeugen Sie sich selbst, dass es Sinn macht, dass es sich um Tautologien handelt!):

- (a)  $"(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)"$
- (b)  $"P \vee \neg P"$
- (c)  $"((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)"$
- (d)  $"\neg(P \wedge \neg P)"$
- (e)  $"(\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)"$
- (f)  $"(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)"$

**Bemerkung 1.1.1**

Die Tautologie (a) rechtfertigt die folgende Aussage: Wenn wir in der Hypothese, dass  $P$  wahr ist, beweisen wollen, dass  $Q$  wahr ist, können wir äquivalent beweisen, dass  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ .  $\diamond$

**1.1.2 Quantoren (oder Quantifikatoren)**

Es sei  $P(x)$  ein Prädikat, das von einer Variablen  $x$  abhängt. Mit der Hilfe des *Existenzquantors* (oder *Existenzialquantifikators*)  $\exists$  und des *Allquantors* (oder *Universalquantors*)  $\forall$  kann man neue Prädikate bilden:

- $\exists$  liest "existiert (mindestens ein)". Zum Beispiel, gegeben  $P(n) := n \in \mathbb{N}$  ist eine Primzahl", das neue Prädikat  $E(n) := \exists n: P(n)$  liest "Es existiert (mindestens ein)  $n$ , sodass  $n$  eine Primzahl ist". Wir wissen (?), dass  $E(n)$  wahr ist.
- $\forall$  liest "für alle/jedes". Zum Beispiel, das Prädikat  $A(n) := \forall n: P(n)$  liest "für alle  $n$  (oder für jedes  $n$ ), ist  $n$  eine Primzahl". Wir wissen (?), dass  $A(n)$  falsch ist.

Falls  $P$  von zwei Variablen abhängt, dann kann man Spaß haben, neue Prädikate zu bilden.

**Beispiel 1.1.1**

Es sei  $P(x, y)$  das Prädikat "der/die Studierende  $x$  liest das Buch der Analysis I (das heißt)  $y$ ". Dann

- (a)  $\exists x: P(x, y)$  bedeutet, dass "es eine/n Studierende/n  $x$  gibt, die/der das Buch  $y$  liest".

- (b)  $\forall x: P(x, y)$  bedeutet "alle Studierenden lesen das Buch  $y$ ".
- (c)  $\forall y, \exists x: P(x, y)$  bedeutet, dass es "für jedes Buch  $y$  eine/n Studierende/n  $x$  gibt, die/der das Buch  $y$  liest".
- (d)  $\exists x, \forall y: P(x, y)$  bedeutet, dass "es eine/n Studierende/n gibt, die/der alle Bücher der Analysis I liest"
- (e) ...

Bemerken Sie, dass (c) und (d) sehr unterschiedlich sind, selbst wenn ich nur die Ordnung der Quantoren getauscht habe!



### Übung 1.1.3

Verwenden Sie im vorherigen Beispiel die Quantoren  $\exists$  und  $\forall$ , um das optimistischste und realistischste Prädikat zu erstellen.



Es gibt eine wichtige Beziehung zwischen den Quantoren  $\exists$  und  $\forall$ , und der Verneinung  $\neg$ . Nehmen wir das folgende Prädikat "Nicht alle (mathematischen) Erklärungen sind klar" (das leider manchmal wahr ist). Wir können es so formalisieren: Es sei  $P(x) := "x$  ist eine (mathematische) Erklärung" und  $Q(x) := "x$  ist klar". Dann ist das obige Prädikat genau

$$\neg(\forall x: P(x) \implies Q(x)).$$

Wir können auch sagen, dass dies gleichbedeutend mit dem Prädikat "es gibt (mindestens...) eine mathematische Erklärung, die nicht klar ist" ist, die so formalisiert werden kann:

$$\exists x: \neg(P(x) \implies Q(x)) \text{ oder (Schauen Sie sich Übung 1.1.1 an)} \quad \exists x: P(x) \wedge \neg Q(x).$$

Dieses Beispiel zeigt (beweist aber formal nicht ...), dass die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\neg(\forall x: A(x)) \iff \exists x: \neg A(x), \tag{1.1.1}$$

und ähnlich

$$\neg(\exists x: A(x)) \iff \forall x: \neg A(x). \tag{1.1.2}$$

Wenn wir beweisen wollen, dass eine bestimmte Eigenschaft  $A(x)$  nicht für jedes  $x$  gilt (linke Seite der Äquivalenz (1.1.1)), müssen wir ein "spezielles" Element  $x$  finden, so dass  $A(x)$  nicht wahr ist (rechte Seite der Äquivalenz (1.1.1)): Dieses "spezielle" Element wird als *Gegenbeispiel* bezeichnet. Wenn Sie beispielsweise in einer Übung aufgefordert werden, zu beweisen, dass eine bestimmte Aussage falsch ist, müssen Sie nur<sup>1</sup> ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage finden. Außerdem wird Ihnen manchmal nicht mitgeteilt, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. Wenn Sie

---

<sup>1</sup>Aber manchmal ist die Suche nach Gegenbeispielen wirklich nicht trivial...

das Gefühl haben, dass es wahr ist, müssen Sie einen (direkten oder Widerspruch) Beweis finden, und wenn Sie das Gefühl haben, dass es falsch ist, müssen Sie ein Gegenbeispiel finden.

---

### Vorlesung 1 -

#### 1.1.3 Mengenlehre

Wie definiert man eine Menge? Die Definition, die Cantor in 1895 gegeben hatte,<sup>2</sup> ist die folgende:

*Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.*

Wenn es die Situation erlaubt, werden oft Mengen mit einem Großbuchstaben bezeichnet, während ihre Elemente mit Kleinbuchstaben<sup>3</sup> sind. Zum Beispiel kann das Alphabet als die Menge  $A$  definiert werden, deren Elemente  $\{a, b, c, \dots\}$  sind. Wir müssen beachten, dass es einen Unterschied zwischen  $a$  und  $\{a\}$  gibt, da letzterer eine Menge bezeichnet, deren einziges Element  $a$  ist, daher  $a \in \{a\}$ .

Nachfolgend schreiben wir eine Liste von Definitionen, die irgendwie schon bekannt sein sollten:

- $\emptyset$  ist die leere Menge, nämlich die Menge, die keine Elemente enthält.
- " $\in$ ": Um zu sagen, dass ein Element zu einer Menge gehört, verwenden wir das Symbol  $\in$  ("gehört"); Zum Beispiel im vorherigen Beispiel,  $a \in A$ . Wir werden das Symbol  $\notin$  verwenden, um anzudeuten, dass sich ein Element nicht in  $A$  befindet. Wenn beispielsweise  $A$  das italienische Alphabet bezeichnet, dann  $x \notin A$ .
- " $\subseteq, \subset$ ": Es seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen. Dann, falls jedes Element von  $A$  auch ein Element von  $B$  ist, nennt man  $A$  eine *Teilmenge von  $B$* . In Symbolen

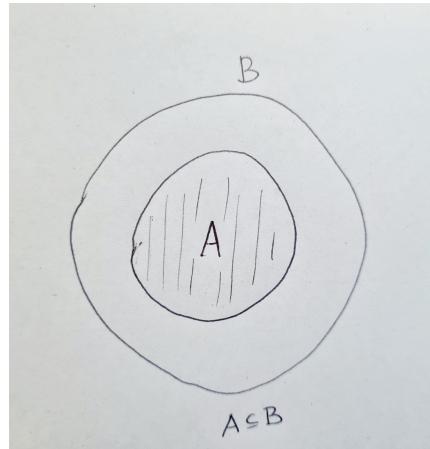
$$A \subseteq B : \iff (\forall x \in A \implies x \in B)$$

(Das Symbol  $:$   $\iff$  bedeutet, dass die linke Beziehung durch die rechte Beziehung definiert wird.)

---

<sup>2</sup>Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen 46 (1895)

<sup>3</sup>Es ist eine allgemein anerkannte Regel in der Mathematik, dass Objekte mit unterschiedlichen Rollen auf unterschiedliche Weise bezeichnet werden sollten. Zum Beispiel würde es ein Mathematiker verwirrend finden, eine Menge mit  $X$  und eines ihrer Elemente mit  $Y$  zu bezeichnen...



Beachten Sie, dass mit der Notation  $A \subseteq B$  nicht ausgeschlossen ist, dass die Mengen  $A$  und  $B$  dieselben sind, in Symbolen  $A = B$ . Genau definiert, wir haben

$$A = B : \Leftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Außerdem gilt für jede Menge  $A$ , dass  $\emptyset \subseteq A$  und  $A \subseteq A$ .

Die Notation  $A \subsetneq B$  bedeutet, dass

$$(A \subseteq B) \wedge (A \neq B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (\exists x \in B: x \notin A)$$

• Die Teilmengen von  $B$ , die  $A \subsetneq B$  ausfüllen, werden *echte Teilmengen* (von  $B$ ) genannt.

Endlich haben wir, dass

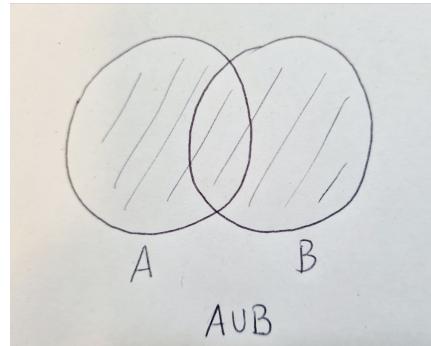
$$B \supseteq A : \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \text{und} \quad B \supsetneq A : \Leftrightarrow A \subsetneq B.$$

Warnung! Einige Autoren verwenden das Symbol  $\subset$  anstelle von  $\subsetneq$ . Überprüfen Sie immer die Definitionen dieses Symbols, um Verwirrung zu vermeiden.

- “ $\cup$ ”: Es seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen. Dann die *Vereinigung* (oder *Vereinigungsmenge*) von  $A$  und  $B$  ist die Menge, die mit  $A \cup B$  bezeichnet wird, deren Elemente zu mindestens einer der beiden Mengen gehören. In Symbolen:

$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

(Die rechte Seite lautet:“die Menge der Elemente  $x$  sodass (Symbol  $|$ )  $x$  ist in  $A$  oder  $x$  ist in  $B$ ”)



Die vorherige Definition kann auf diese Weise verallgemeinert werden. Sei  $\Lambda$  eine Indexmenge, nämlich eine nicht leere Menge, deren Elemente zum Indizieren einer Mengenfamilie<sup>4</sup>  $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  verwendet werden. Dies heißt, dass wir für jedes  $\lambda \in \Lambda$  eine Menge  $A_\lambda$  erhalten. Zum Beispiel, falls  $\Lambda = \{1, 2\}$ , dann erhalten wir  $\{A_1, A_2\}$ , eine Mengenfamilie mit zwei Mengen; falls  $\Lambda = \mathbb{N}$  die Mengenfamilie  $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$  enthält unendliche viele Mengen<sup>5</sup>. Dann kann man die folgende Vereinigung definieren:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda: x \in A_\lambda\}.$$

(Das Symbol “:” hier oben lautet “mit”.)

- “ $\cap$ ”. Es seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen. Dann der *Schnitt* (oder die *Schnittmenge*) von  $A$  und  $B$  ist die Menge, die mit  $A \cap B$  bezeichnet wird, deren Elemente zu beiden Mengen gehören. In Symbolen:

$$A \cap B := \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Natürlich, für eine Indexmenge  $\Lambda$  und eine Mengenfamilie  $\{A_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ , können wir die Schnittmenge der Familie so definieren:

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda: x \in A_\lambda\}.$$

- Die *Differenz* (oder *Differenzmenge*) von  $A$  und  $B$  wird mit  $A \setminus B$  bezeichnet, und ist durch

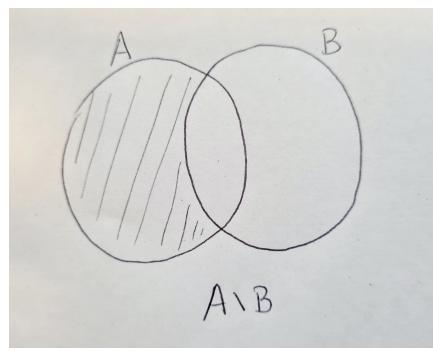
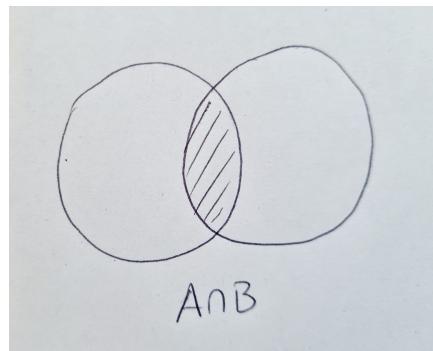
$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

definiert.

---

<sup>4</sup>Eine Mengenfamilie ist eine Menge, deren Elemente noch Mengen sind.

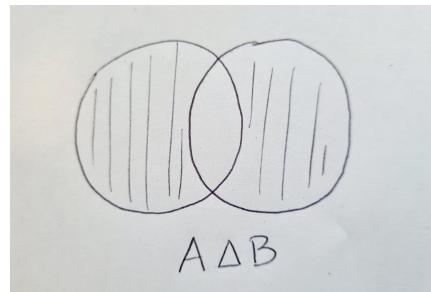
<sup>5</sup>Die Indexmenge kann aber auch nicht “diskret” sein, was auch immer diskret bedeutet ...



- Die symmetrische Differenz von  $A$  und  $B$  wird mit  $A \Delta B$  bezeichnet, und ist durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

definiert.



- Komplement: Es sei  $A$  eine Teilmenge von  $U$ . Dann ist das Komplement von  $A$  in  $U$  die Menge  $U \setminus A$ . Wenn es klar ist, was die Menge  $U$  ist (zum Beispiel, man arbeitet immer mit Teilmengen von einer Menge  $U$ ) dann wird das Komplement von  $A$  mit  $A^c$  bezeichnet.
- Die Potenzmenge einer Menge  $A$  ist die Menge aller Teilmengen von  $A$ , und wird mit  $\mathcal{P}(A)$  bezeichnet. Zum Beispiel, ist  $A = \emptyset$ , dann  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ , d.h. die Potenzmenge der leeren Menge ist eine Menge, die nicht leer ist, und die genau ein Element enthält.
- Das Kartesische Produkt von  $A$  und  $B$ , das mit  $A \times B$  bezeichnet wird, ist die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Element in  $A$  liegt, und deren zweites Element in  $B$ . Formal definiert haben wir

$$A \times B := \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

Vor den Übungen schließen wir das Kapitel mit einer wichtigen Definition.

### Definition 1.1.1

Gegeben eine nicht leere Menge  $G$ , eine **zweistellige** (oder **binäre**) **Verknüpfung** (oder **Operation**) ist eine Abbildung  $*: G \times G \rightarrow G$ , nämlich, für jedes Paar  $(g_1, g_2) \in G \times G$ , ordnet  $*$  ein Element von  $G$  zu, das mit  $g_1 * g_2$  bezeichnet wird.

Eine solche zweistellige Verknüpfung heißt:

- *assoziativ*, falls

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3) \quad \text{für alle } g_1, g_2, g_3 \in G;$$

- *kommutativ*, falls

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1 \quad \text{für alle } g_1, g_2 \in G;$$

- Gegeben eine zweite Verknüpfung  $\circ: G \times G \rightarrow G$ , dann heißt die Verknüpfung *\* distributiv* über  $\circ$ , falls

$$g_1 * (g_2 \circ g_3) = (g_1 * g_2) \circ (g_1 * g_3).$$

**Übung 1.1.4** • Beweisen Sie, dass die Assoziativität einer Verknüpfung es uns erlaubt, die Verknüpfung von drei Elementen  $g_1 * g_2 * g_3$  zu definieren. Wie?

- In den vorherigen Definitionen, es sei  $U$  eine nicht leere Menge, und für  $G = \mathcal{P}(U)$  haben wir die folgenden Verknüpfungen definiert:  $\cup, \cap, \setminus, \Delta$ . Machen die folgenden Symbole Sinn? Und wenn Ja, wie sind sie definiert? (Hier sind  $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$ )

$$A \cup B \cup C, \quad A \cap B \cap C, \quad A \setminus B \setminus C, \quad A \Delta B \Delta C$$

- Es sei  $m = 10000$ ,  $n = 2$  und  $r = 1$ . Macht dieses Symbol

$$m - n - r$$

Sinn?



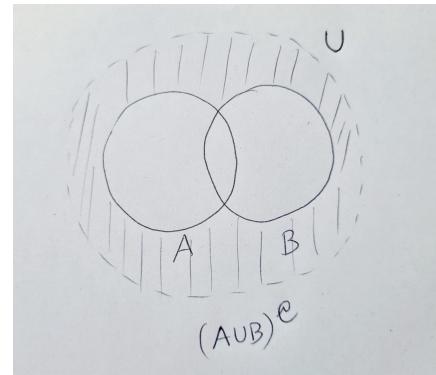
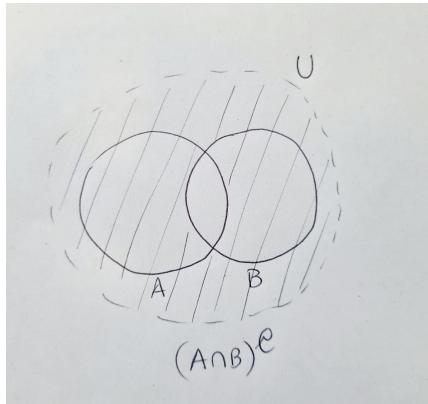
**Übung 1.1.5**

Es seien  $A, B$  und  $C$  beliebige Teilmengen einer nicht leeren Menge  $U$ . Beweisen Sie, dass die folgenden Gleichungen gelten:

- $A \cup A = A$  und  $A \cap A = A$  (*Idempotenz*)
- $A \cup B = B \cup A$  und  $A \cap B = B \cap A$  (*Kommutativität*)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  und  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (*Distributivität*)
- $A \cup (A \cap B) = A$  und  $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \subseteq B \iff (A \cup B = B)$  und  $A \supseteq B \iff (A \cap B = B)$
- $(A^c)^c = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  und  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Die Gleichungen in (g) sind als *de-morgansche Gesetze* bekannt. Haben Sie so etwas schon einmal gesehen?...





### Übung 1.1.6

(Naivität vs Formalität...) Es sei  $I$  die "Menge aller Mengen" (in vielen Zitaten...). Dann ist  $I \in I$  (das ist schon an sich sehr verwirrend...) und definieren wir

$$R = \{x \in I \mid x \notin x\}.$$

Da  $R \cup R^c = I$  und  $R \cap R^c = \emptyset$ , wir sollten haben, dass entweder  $R \in R$  oder  $R \notin R$ . Welche der beiden gilt?



## 1.2 Relationen und Abbildungen

### Definition 1.2.1

Seien  $X$  und  $Y$  nicht leere Mengen. Eine (**zweistellige**) **Relation** zwischen  $X$  und  $Y$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{R}$  von  $X \times Y$ . Gilt  $X = Y$ , so heißt  $\mathcal{R}$  **Relation auf  $X$** .

Wenn  $(x, y) \in \mathcal{R}$  ist, sagen wir, dass  $x$  mit  $y$  zusammenhängt. Zum Beispiel, die Gleichheitsrelation “ $=$ ” auf  $X$  sagt, dass  $x$  mit  $y$  zusammenhängt genau dann, wenn  $x = y$ . Oder, es sei  $X$  die Menge der Punkte in der Ebene, und  $Y$  die Menge der Geraden in der Ebene. Dann ist eine Relation  $\mathcal{R}$  zwischen  $X$  und  $Y$ :  $(x, r) \in \mathcal{R} : \iff x \in r$ , nämlich genau dann, wenn der Punkt  $x$  der Gerade  $r$  gehört.

Im Folgenden werden wir noch viele Beispiele von Relationen sehen.

### Definition 1.2.2

Es seien  $X$  und  $Y$  nicht leere Mengen. Eine **Abbildung** oder **Funktion**  $f: X \rightarrow Y$  ist eine Relation  $\mathcal{R}$ , die *an jedem* Element  $x$  von  $X$  *genau ein* Element  $y$  von  $Y$  assoziiert. In diesem Fall nennen wir  $y$  das *Bild* von  $x$  und bezeichnen es durch  $y = f(x)$ . Endlich, um zu sagen, dass  $x$  auf  $y$  abgebildet ist, verwenden wir das Symbol  $x \mapsto y$ .

Also, falls  $\mathcal{R}$  eine Funktion ist, dann:

- gibt es für alle  $x \in X$  ein  $y \in Y$ , sodass  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , und
- falls  $(x, y_1)$  und  $(x, y_2)$   $\mathcal{R}$  gehören, dann ist  $y_1 = y_2$ .

Der *Graph* von  $f$  ist die Teilmenge von  $X \times Y$ , die so definiert wird

$$\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

Bemerken Sie, dass falls  $(x, y_1) \in \text{Graph}(f)$  und  $(x, y_2) \in \text{Graph}(f)$ , dann muss  $y_1 = y_2$  sein.

Gegeben eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$ , die Menge  $X$  heißt die *Definitionsmenge* (oder *Definitionsbereich*) und  $Y$  die *Zielmenge* (oder *Wertebereich*) von  $f$ . Die *Bildmenge*  $f(X)$  ist die Teilmenge von  $Y$ , die auf Bildern von  $f$  besteht, oder mit Symbolen

$$f(X) := \{y \in Y \mid \exists x \in X: y = f(x)\}.$$

Falls  $f(X)$  eine Menge mit genau einem Element ist, dann sagen wir, dass  $f$  *konstant* ist. Darüber hinaus, es seien  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$ , dann werden wir definieren

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A: f(x) = y\}$$

und

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Im folgenden nehmen wir an, dass wir schon wissen, was die reellen Zahlen sind<sup>6</sup> (die Sie intuitiv, aber nicht formal, in der Schule eingeführt haben), und was die folgenden Symbole  $<$ ,  $\leq$ ,  $>$ ,  $\geq$  bedeuten. Die Menge der reellen Zahlen wird durch  $\mathbb{R}$  bezeichnet, und durch  $[a, b]$  (bzw.<sup>7</sup>  $(a, b)$ ) bezeichnen wir  $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  (bzw.  $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ), wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ . Außerdem sei  $(-\infty, a]$  die Teilmenge  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$  (bzw.  $(-\infty, a)$  die Teilmenge  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ), mit  $a \in \mathbb{R}$ , und  $[b, \infty)$  (bzw.  $(b, \infty)$ ) die Teilmenge  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$  (bzw.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > b\}$ ), mit  $b \in \mathbb{R}$ .

### Beispiel 1.2.1

Die folgenden sind Beispiele einer Funktion  $f: X \rightarrow Y$ , wobei  $X$  und  $Y$  Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind:

- (a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ ,
- (b)  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$ ,
- (c)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sin(x)$

Die Definitionsmengen und Zielmengen sind schon oben geschrieben. Außerdem ist in (a) das Bild von  $f$  gegeben durch  $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$ , in (b) durch  $g([0, 1]) = [0, 1]$  und in (c) durch  $h(\mathbb{R}) = [-1, 1]$ . ♣

Bemerken Sie, dass falls  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}$ , kann man den Graph von  $f$  auf der kartesischen Ebene zeichnen. Was eine Funktion auszeichnet, ist in diesem Fall, dass, wenn wir den Graphen von  $f$  mit einer vertikalen Linie  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = x_0\}$  schneiden, dann erhalten wir entweder die leere Menge (genau wenn  $x_0$  nicht zur Definitionsmenge gehört), oder eine Menge mit nur einem Punkt  $\{(x_0, f(x_0))\}$ .

*Wann sind zwei Funktionen gleich?* Zwei Funktionen sind gleich, wenn die Definitionsmengen und Zielmengen dieselben sind, und wenn die Regel, nach der  $y$  mit  $x$  verknüpft ist, dieselbe ist. In Beispiel 1.2.1 ist die “Regel”, die  $f$  und  $g$  beschreibt, dieselbe (“ $x \mapsto x^2$ ”). Aber, da die Definitionsmengen unterschiedlich sind, sind die Funktionen  $f$  und  $g$  auch unterschiedlich. Das ist keine umständliche Formalität: zum Beispiel, im Fall (a) ist  $f(\mathbb{R})$  unbegrenzt (die Bilder können so groß sein, wie wir wollen), und  $g([0, 1])$  ist begrenzt, d.h., für alle  $y \in g([0, 1])$  gilt  $0 \leq y \leq 1$ .

---

<sup>6</sup>Aber sie werden formal in Kapitel 2 definiert

<sup>7</sup>beziehungsweise

### 1.2.1 Spezielle Funktionen und Verknüpfung zweier Funktionen

Es sei  $X' \subseteq X$  und  $f: X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann bezeichnen wir durch  $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$  die *Einschränkung* (oder *Restriktion*) von  $f$  auf  $X'$ , nämlich die Funktion  $g: X' \rightarrow Y$ , die auf  $X'$  mit  $X$  übereinstimmt.

Gegeben eine beliebige nicht leere Menge  $X$ , dann ist die *Identität* auf  $X$  die Funktion, die so definiert wird:  $\mathbb{1}_X: X \rightarrow X$ ,  $\mathbb{1}_X(x) = x$  für alle  $x \in X$ .

#### Definition 1.2.3

Eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  heißt **injektiv**, falls

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2; \quad (1.2.1)$$

das heißt, dass verschiedene Elemente der Definitionsmenge verschiedene Bilder haben müssen oder, mit anderen Worten,

$$\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X \text{ sodass } x_1 \neq x_2, \text{ ist } f(x_1) \neq f(x_2). \quad (1.2.2)$$

#### Übung 1.2.1

Überzeugen Sie sich selbst, dass die Bedingungen (1.2.1) und (1.2.2) tatsächlich äquivalent sind. ♠

Wenn die Definitionsmenge und Zielmenge Teilmengen von  $\mathbb{R}$  sind, um zu beweisen, ob eine Funktion injektiv ist oder nicht, muss man eine Gleichung lösen und beweisen, dass es höchstens eine Lösung gibt.

#### Beispiel 1.2.2

In Beispiel 1.2.1 (a) müssen wir verstehen ob, gegeben  $y \in \mathbb{R}$  (d.h., dass  $y$  ein fester, beliebiger Wert in  $\mathbb{R}$  ist), die Gleichung  $y = x^2$  höchstens eine Lösung hat.

- Falls  $y < 0$  hat  $y = x^2$  keine Lösung.
- Falls  $y = 0$  hat  $0 = x^2$  genau eine Lösung, nämlich  $x = 0$ . Also, bis jetzt, kein Widerspruch der Injektivität, aber...
- Falls  $y > 0$  hat  $y = x^2$  zwei Lösungen, und zwar  $x_1 = \sqrt{y}$  und  $x_2 = -\sqrt{y}$ .

Wir schließen, dass die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2$  nicht injektiv ist. Aber bemerken Sie (oder prüfen Sie nach), dass die Funktion  $g$  in Beispiel 1.2.1 (b),  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$ , *injektiv* ist und gilt, dass  $g = f|_{[0,1]}$ . Also kann die Einschränkung einer nicht injektiven Funktion injektiv sein.

Da die Funktion  $h$  in Beispiel 1.2.1 (c) die Gleichung  $h(x) = \sin(x) = \sin(x + 2\pi) = h(x + 2\pi)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt, können wir schließen, dass  $h$  nicht injektiv ist. Können Sie eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  der Gestalt  $[a, b]$  finden, sodass  $h|_{[a,b]}$  injektiv ist? ♣

Falls  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  können wir die Injektivität einer Funktion  $f: X \rightarrow Y$  mit der Hilfe ihrer Graphen erklären: Die horizontale Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = y_0\}$  muss den Graph von  $f$  in höchstens einem Punkt schneiden. Bemerken Sie, dass falls  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = y_0\} \cap \text{Graph}(f) = \emptyset$ , das heißt nur, dass  $y_0 \notin f(X)$ .

#### Definition 1.2.4

Eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  heißt **surjektiv**, falls

$$\forall y \in Y, \exists x \in X: y = f(x) \quad (1.2.3)$$

oder, mit anderen Worten, falls  $f(X) = Y$ .

#### Bemerkung 1.2.1

Falls  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  können wir die Surjektivität einer Funktion  $f: X \rightarrow Y$  so interpretieren: die Gleichung  $y = f(x)$  hat immer (mindestens) eine Lösung. Mit der Hilfe des Graphen von  $f$ , ist die Surjektivität äquivalent zu sagen, dass für alle  $y_0 \in Y$  die horizontale Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = y_0\}$  immer  $\text{Graph}(f)$  schneidet, nämlich, dass  $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = y_0\} \cap \text{Graph}(f) \neq \emptyset$ . Also:

*Während die Injektivität eine Bedingung für die Einheitlichkeit einer Lösung ist (wenn eine Lösung existiert), ist die Surjektivität eine Bedingung für ihre Existenz.*



Wenn eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  gegeben ist, kann man die Zielmenge immer einschränken, um  $f$  surjektiv zu machen, nämlich man nimmt einfach  $f: X \rightarrow f(X)$ . Es könnte aber schwer sein, das Bild  $f(X)$  zu charakterisieren.

#### Definition 1.2.5

Eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  heißt **bijektiv**, falls sie injektiv und surjektiv ist.

#### Übung 1.2.2

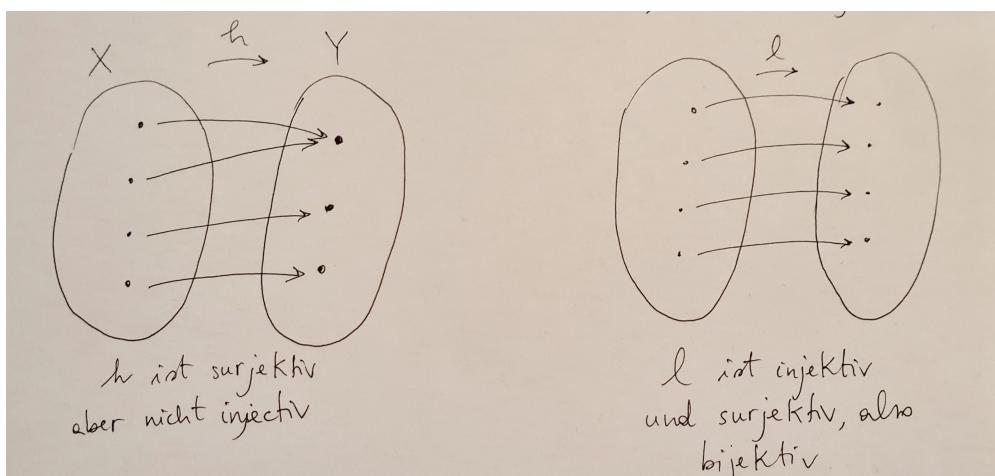
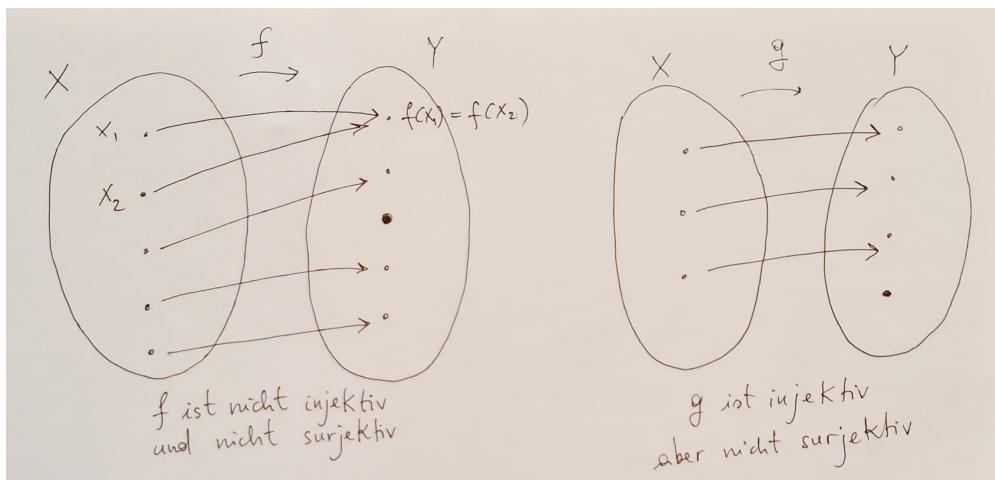
In Beispiel 1.2.1 welche Funktionen sind bijektiv? Können Sie die Definitionsmenge und Zielmenge einschränken, um sie bijektiv zu machen?




---

#### Vorlesung 2 -

Gegeben eine bijektive Funktion  $f: X \rightarrow Y$ , für alle  $y_0 \in Y$  gibt es ein  $x_0 \in X$  mit  $y_0 = f(x_0)$  (Surjektivität von  $f$ ); darüber hinaus ist ein solches Element  $x_0$



das einzige, das  $y_0 = f(x_0)$  erfüllt (Injektivität von  $f$ ). Dann können wir eine neue Funktion  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  definieren<sup>8</sup> mit  $f^{-1}(y_0) = x_0$ , die die **Umkehrfunktion** oder **Inverse Funktion** von  $f$  heißt.

### Übung 1.2.3

Beweisen Sie, dass, gegeben eine bijektive Funktion  $f: X \rightarrow Y$ , die Umkehrfunktion  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  auch bijektiv ist. Was ist  $(f^{-1})^{-1}$ ? ♠

Es seien nun  $f: X \rightarrow Z$  und  $g: W \rightarrow Y$ . Falls  $f(X) \subseteq W$ , ist  $f(x)$  in der Definitionsmenge von  $g$ , für alle  $x \in X$ . Dann hat der folgende Ausdruck

$$g(f(x))$$

Sinn, und wir können die folgende Definition einführen:

#### Definition 1.2.6

Es seien  $f: X \rightarrow Z$  und  $g: W \rightarrow Y$  mit  $f(X) \subseteq W$ . Dann ist die **Verknüpfung** von  $f$  und  $g$  die Funktion  $g \circ f: X \rightarrow Y$ , die gegeben durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad \text{für alle } x \in X$$

ist.

Bemerken Sie, dass gegeben  $f: X \rightarrow Z$  und  $g: W \rightarrow Y$  die verknüpft werden können, d.h. die Verknüpfung  $g \circ f$  definiert werden kann, es kann sein, dass  $f \circ g$  keinen Sinn macht, und selbst wenn es Sinn macht, es kann sein, dass  $g \circ f \neq f \circ g$  ist.

### Übung 1.2.4

Können Sie zwei Funktionen  $f: X \rightarrow Z$  und  $g: W \rightarrow Y$  finden, sodass beide  $g \circ f$  und  $f \circ g$  Sinn machen, aber mit  $g \circ f \neq f \circ g$ ? ♠

Die folgenden Übungen sind sehr wichtig, und werden sehr wahrscheinlich in Ihrer Hausaufgabe sein.

### Übung 1.2.5

Es seien  $f: X \rightarrow Z$  und  $g: W \rightarrow Y$  Funktionen, die verknüpft werden können.

- (a) Welche Bedingungen auf  $f$  und  $g$  sind *notwendig* (siehe Abschnitt 1.1.1), damit  $g \circ f$  injektiv ist?
- (a') Welche Bedingungen auf  $f$  und  $g$  sind *hinreichend* (siehe Abschnitt 1.1.1), damit  $g \circ f$  injektiv ist?

---

<sup>8</sup>Warum? Was sind die Bedingungen, die eine Funktion definieren?

(a'') Finden Sie Bedingungen auf  $f$  und  $g$ , die notwendig und hinreichend sind, damit  $g \circ f$  injektiv ist; nämlich, vervollständigen Sie den folgenden Satz:

$$g \circ f \text{ ist injektiv genau dann, wenn } f \dots \text{ und } g \dots .$$

Wiederholen Sie die vorherige Übung (also, (a), (a') und (a'')), nachdem Sie ‘‘injektiv’’ durch ‘‘surjektiv’’ ersetzt haben. ♠

### Übung 1.2.6

Beweisen Sie, dass  $f: X \rightarrow Y$  bijektiv ist genau dann, wenn es eine Funktion  $g: Y \rightarrow X$  gibt, mit

$$g \circ f = \mathbb{1}|_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \mathbb{1}|_Y.$$

Beweisen Sie, dass  $g$  genau die Inversefunktion  $f^{-1}$  ist. ♠

## 1.2.2 Äquivalenzrelationen und Ordnungen

In der Mathematik werden verschiedene Objekte häufig in derselben ‘‘Äquivalenzklasse’’ vereint, da es möglicherweise eine Operation, oder eine mathematische Eigenschaft, gibt, die nicht vom aufgenommenen Objekt abhängt, sondern von der Äquivalenzklasse, zu der es gehört. Nehmen wir ein Beispiel. Es seien  $G$  die Menge der geraden Zahlen,  $G := \{0, 2, 4, \dots\}$  und  $U$  die Menge der ungeraden Zahlen,  $U := \{1, 3, 5, \dots\}$ . Wir bemerken, dass die Summe zweier geraden Zahlen immer gerade ist, unabhängig von den gewählten geraden Zahlen, und die Summe zweier ungerader Zahlen immer gerade ist, usw. Dann können wir eine Addition auf der Menge  $\mathcal{A} := \{G, U\}$  definieren:

$$\begin{array}{ll} G + G := G & G + U := U \\ U + G := U & U + U := G. \end{array}$$

Also, wir haben eine Partition (siehe Definition 1.2.8 hier unten) der Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  definiert,  $\mathbb{N} = G \cup U$ ; Wir haben eine neue Menge  $\mathcal{A}$  erstellt, in der die Elemente der Partition  $G$  und  $U$  – die Mengen sind und Äquivalenzklassen genannt werden – Elemente von  $\mathcal{A}$  werden. Da die Operation  $+$  nicht vom Element der Äquivalenzklasse abhängt, können wir die Operation  $+$  an  $\mathcal{A}$  definieren.

Kommen wir zur rigorosen Definition einer Äquivalenzrelation.

### Definition 1.2.7

Es sei  $X$  eine nichtleere Menge, und  $\mathcal{R}$  eine Relation auf  $X$ . Dann ist  $\mathcal{R}$  eine **Äquivalenzrelation** auf  $X$ , falls die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

- (i) für alle  $x \in X$  gilt:  $(x, x) \in \mathcal{R}$ ; (*Reflexivität*)
- (ii) für alle  $x, y \in X$  gilt:  $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R}$ ; (*Symmetrie*)
- (iii) für alle  $x, y, z \in X$  gilt:  $(x, y) \in \mathcal{R}$  und  $(y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \in \mathcal{R}$ ; (*Transitivität*).

Die Teilmenge  $[x] \subseteq X$  gegeben durch  $[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}$  wird **Äquivalenzklasse** von  $x$  genannt.

Im Folgenden, falls  $\mathcal{R}$  eine Äquivalenzrelation ist, und  $(x, y) \in \mathcal{R}$ , schreiben wir  $x \approx y$ .

Bemerken Sie, dass im vorherigen  $X = \mathbb{N}$  ist, und  $\mathcal{R}$  die Relation:

$$(x, y) \in \mathcal{R}, \quad \text{oder, } x \approx y \iff x - y = 2k,$$

für ein  $k \in \mathbb{N}$  (warum?). Darüber hinaus gibt es zwei verschiedene Äquivalenzklassen  $G = [0]$  und  $U = [1]$ , die disjunkt sind, und deren Vereinigung  $\mathbb{N}$  gibt. Dies führt zu folgendem Konzept:

### Definition 1.2.8

Eine **Partition** einer Menge  $X$  ist eine Teilmenge  $\mathcal{P} = \{X_i\}_{i \in I}$  der Potenzmenge von  $X$ , wobei

- $X_i \neq \emptyset$ , für alle  $i \in I$ ,
- $\cup_{i \in I} X_i = X$ , und
- $X_i \cap X_j = \emptyset$ , für alle  $i \neq j$ .

Zum Beispiel, gegeben  $X = \{a, b, c\}$ , die folgenden sind Beispiele von Partitionen von  $X$ :

$$\mathcal{P} = \{\{a\}, \{b, c\}\} \quad \text{oder} \quad \mathcal{P} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \quad \text{oder} \quad \mathcal{P} = \{\{a, b, c\}\}, \quad \text{usw.}$$

Die nächste Übung ist wichtig

### Übung 1.2.7

Die Menge aller verschiedenen Äquivalenzklassen ist eine Partition von  $X$ .



**Definition 1.2.9**

Gegeben eine Äquivalenzrelation  $\mathcal{R}$  auf  $X$ , die Menge, deren Elemente die Äquivalenzklassen von  $\mathcal{R}$  sind, wird **Quotientenmenge** genannt, und wird mit  $X/\mathcal{R}$  bezeichnet.

Wie oben für die Addition zwischen geraden und ungeraden Zahlen erwähnt, kann eine auf  $X$  definierte Operation “zum Quotienten übergehen”, in dem Sinne, dass es aus der Operation auf  $X$  möglich ist, eine auf der Quotientenmenge zu definieren. Wir werden viele Beispiele für diesen Prozess sehen.

**Definition 1.2.10**

Gegeben eine nicht leere Menge  $X$ , ist eine **Ordnung** auf  $X$  eine Relation  $\mathcal{O}$  auf  $X$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) für alle  $x \in X$  gilt:  $(x, x) \in \mathcal{O}$ ; (*Reflexivität*)
- (ii) für alle  $x, y \in X$  gilt:  $(x, y) \in \mathcal{O}$  und  $(y, x) \in \mathcal{O} \iff x = y$ ; (*Antisymmetrie*)
- (iii) für alle  $x, y, z \in X$  gilt:  $(x, y) \in \mathcal{O}$  und  $(y, z) \in \mathcal{O} \implies (x, z) \in \mathcal{O}$ ; (*Transitivität*).

Falls für alle  $x, y \in X$ , entweder  $(x, y) \in \mathcal{O}$  oder  $(y, x) \in \mathcal{O}$ , dann sagen wir, dass es eine **totale Ordnung** ist.

Wir werden das Symbol  $x \preceq y$  benutzen, um zu sagen, dass  $(x, y) \in \mathcal{O}$ . Wenn es nicht verwirrend ist, bezeichnen wir die Ordnung direkt mit  $\preceq$ .

**Beispiel 1.2.3**

Zum Beispiel, es sei  $A$  eine nicht leere Menge und  $\preceq$  die Ordnung auf  $\mathcal{P}(A)$  (die Potenzmenge von  $A$ ) die so definiert wird:

$$B \preceq C : \iff B \subseteq C.$$

Dann können Sie leicht beweisen, dass “ $\subseteq$ ” eine Ordnung ist. Ist im Allgemeinen (d.h., ohne zusätzliche Bedingungen auf  $A$ ) “ $\subseteq$ ” eine totale Ordnung? ♣

Gegeben eine nicht leere Menge  $X$ , eine Ordnung  $\mathcal{O}$  auf  $X$  und eine nicht leere Teilmenge  $S$  auf  $X$ , können wir einfach die Ordnung  $\preceq$  auf  $S$  einschränken.

**Definition 1.2.11** • Ein Element  $x \in X$  heißt **obere Schranke** von  $S$  wenn

$$s \preceq x \quad \text{für alle } s \in S$$

gilt. Falls ein solches Element  $x$  existiert, heißt  $S$  *nach oben beschränkt*.

- Ähnlich, falls es  $y \in X$  gibt, so dass

$$y \preceq s \quad \text{für alle } s \in S$$

dann heißt  $y$  eine **untere Schranke** von  $S$ , und wir sagen, dass  $S$  *nach unten beschränkt* ist.

- Eine Menge  $S$  heißt *beschränkt*, falls sie nach unten und oben beschränkt ist.

Es sollte leicht sein, sich davon zu überzeugen, dass jede Teilmenge einer (nach unten/nach oben) beschränkten Menge auch (nach unten/nach oben) beschränkt ist.

#### Beispiel 1.2.4

Es sei  $A$  eine nicht leere Menge, und  $\mathcal{P}(A)$  ihre Potenzmenge, zusammen mit der Ordnung “ $\subseteq$ ” auf  $\mathcal{P}(A)$ . Dann ist  $\mathcal{P}(A)$  beschränkt, da  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$  eine untere Schranke, und  $A \in \mathcal{P}(A)$  eine obere Schranke sind.

Es sei nun  $A = \{a, b, c, d\}$ , und  $S$  die folgende Teilmenge von  $\mathcal{P}(A)$ ,  $S := \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ . Da  $\mathcal{P}(A)$  beschränkt ist, ist  $S$  auch beschränkt. In diesem Fall, sind mögliche obere Schranken gegeben durch  $\{a, b, c\}$  oder  $\{a, b, c, d\}$ . Aber ist  $\{a, b, c\}$  das einzige Element, das  $S$  gehört. Ähnlich finden Sie alle untere Schranken, und bemerken Sie, dass es nur genau eine gibt, die  $S$  gehört. ♣

Das obige Beispiel führt zu der folgenden

#### Definition 1.2.12

Es sei  $X$  eine nicht leere Menge und  $\preceq$  eine Ordnung auf  $X$ . Dann ist ein Element  $m$  ein **Minimum** (bzw. **Maximum**) von  $X$ , falls:

- $m \in X$ , und
- $m$  eine untere (bzw. obere) Schranke von  $X$  ist.

Wir werden in den folgenden Kapiteln sehen, dass ein Minimum (resp. Maximum) nicht immer existiert, aber wenn es existiert, muss es eindeutig sein.

#### Lemma 1.2.1

*Es sei  $X$  eine nicht leere Menge und  $\preceq$  eine Ordnung auf  $X$ . Wenn  $X$  ein Minimum (resp. Maximum) besitzt, dann ist es eindeutig.*

*Beweis:* Wir schreiben den Beweis für den Fall, in dem  $X$  ein Minimum  $m$  besitzt (man kann diesen Beweis adaptieren, um den anderen Fall zu beweisen; wie?)

Nehmen wir an, dass  $X$  zwei Minima,  $m_1$  und  $m_2$ , besitzt. Dann

- da  $m_1$  ein Minimum ist, haben wir  $m_1 \in X$  und  $m_1 \preceq x$  für alle  $x \in X$ ;

(ii) da  $m_2$  ein Minimum ist, haben wir  $m_2 \in X$  und  $m_2 \preceq x$  für alle  $x \in X$ ;

Aus (i) erhalten wir dass, insbesondere,  $m_1 \preceq m_2$  ist, und aus (ii), dass  $m_2 \preceq m_1$  ist. Dann folgt aus der Antisymmetrie der Ordnung (siehe Definition 1.2.10 (ii)), dass  $m_1 = m_2$ .  $\square$

### Definition 1.2.13

Es sei  $\mathcal{O}$  eine Ordnung auf einer Menge  $X$ . Dann heißt  $\mathcal{O}$  eine **Wohlordnung**, falls jede nicht leere Teilmenge von  $X$ , mit der von  $X$  induzierten Ordnung, ein Minimum besitzt.

### Bemerkung 1.2.2

Bemerken Sie, dass eine Wohlordnung automatisch total ist. In der Tat, gegeben die Teilmenge  $S := \{x, y\} \subseteq X$ , da wir angenommen haben, dass die Ordnung auf  $X$  eine Wohlordnung ist, dann besitzt  $S$  ein Minimum. Das heißt, dass entweder  $x \preceq y$  oder  $y \preceq x$  ist. Da  $x$  und  $y$  beliebige Elemente in  $X$  sind, können wir schließen, dass die Ordnung total ist.  $\diamond$

Sobald wir die Mengen natürlicher, ganzer, rationaler und reeller Zahlen rigoros eingeführt haben, werden wir viele weitere Beispiele für Ordnungen haben, von denen wir uns fragen können, ob sie total oder Wohlordnungen sind.

## 1.3 Die natürlichen Zahlen

Wie bereits erwähnt, möchten wir in diesem ersten Kapitel formell Begriffe definieren, die wir “anwenden” werden, wie z. B. natürliche Zahlen, und mit denen wir formal algebraische Operationen ausführen können. Wir werden bald erkennen, dass es jedoch einen großen Unterschied gibt zwischen: dem Wissen, wie einige Objekte formal verwendet werden (Zahlen und ihre Operationen) und dem Wissen, wie man sie definiert. Wenn dieser Abschnitt Sie verwirrt, ist das ein *gutes Zeichen!*

### 1.3.1 Mächtigkeit (oder Kardinalität) einer Menge

In diesem ersten Abschnitt geben wir eine Definition der natürlichen Zahlen mit der Hilfe der Mengentheorie, die wir schon eingeführt haben. Zunächst müssen wir ein wichtiges Konzept einführen.

#### Definition 1.3.1

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen. Falls  $A = B = \emptyset$ , oder falls  $A$  und  $B$  nichtleere Mengen sind und es eine bijektion  $f: A \rightarrow B$  gibt, dann sagen wir, dass die zwei Mengen **gleichmächtig** sind. In Symbolen schreiben wir  $A \sim B$ .

#### Übung 1.3.1

Beweisen Sie, dass für alle nicht leeren Mengen  $A, B$  und  $C$  die folgenden Eigenschaften gelten:

- $A \sim A$ ;
- Falls  $A \sim B$  dann  $B \sim A$ ; (*Hinweis:* Benutzen Sie Übung 1.2.3)
- Falls  $A \sim B$  und  $B \sim C$ , dann  $A \sim C$ . (*Hinweis:* Benutzen Sie Übung 1.2.5).



#### Definition 1.3.2

Die **Mächtigkeit** (oder **Kardinalität**) einer Menge  $A$  ist die Familie von Mengen, die zu  $A$  gleichmächtig sind, und wird durch  $|A|$  bezeichnet.

Falls es eine injektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gibt, schreiben wir, dass  $|A| \leq |B|$ .

Im nächsten Abschnitt werden wir dieses neue Konzept, das von der Mengentheorie kommt, benutzen, um die natürlichen Zahlen zu definieren.

### 1.3.2 Definition der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Zuerst definieren wir

$$0 := |\emptyset|.$$

Bemerken Sie, dass bis jetzt “0” nur ein Symbol ist. Um die anderen natürlichen Zahlen zu definieren, brauchen wir den Begriff von “nachfolgender Menge”: Gegeben eine Menge  $A$ , werden wir mit  $A^+$  die Menge bezeichnen, deren Elemente die Elemente von  $A$  und die Menge  $A$  selbst sind. Mit Symbolen:

$$A^+ := A \cup \{A\}$$

Zum Beispiel, falls  $A = \{a, b, c\}$ , dann wäre  $A^+$  die Menge  $\{a, b, c, \{a, b, c\}\}$  (deshalb, da intuitiv  $A$  drei Elemente hat, dann hat  $A^+$  vier Elemente,  $a, b, c$  und  $\{a, b, c\}$ . Also  $\{a, b, c\} \in A^+$ ). Dann können wir die natürlichen Zahlen als die Mächtigkeit der nachfolgenden Mengen, die von  $\emptyset$  gebildet werden, definieren:

$$0 := |\emptyset|, \quad 1 := |\emptyset^+| = |\{\emptyset\}|, \quad 2 := |\{\emptyset\}^+| = |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \quad 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}^+| = \dots$$

und so weiter (usw). Die Menge dieser (unendlichen...) Mächtigkeiten wird mit  $\mathbb{N}$  bezeichnet, und deren Elemente werden **natürliche Zahlen** genannt. Ein beliebiges Element von  $\mathbb{N}$  wird oft mit  $n$ , oder  $m$ , bezeichnet.

Noch eine Notation: gegeben die natürliche Zahl  $n = |A|$ , wobei  $A$  der Gestalt  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \dots\}$  ist, bezeichnen wir mit  $n^+$  die Mächtigkeit von  $A^+$ , und wir sagen, dass  $n^+$  die *nachfolgende Zahl* ist. Dann haben wir eine Abbildung  $N: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definiert: gegeben  $n \in \mathbb{N}$  ist  $N(n) := n^+$ .

#### Übung 1.3.2

Welche Eigenschaften besitzt  $N$ ?

- Ist  $N$  injektiv?
- Ist  $N$  surjektiv? Wenn nicht, ist die Einschränkung  $N: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$  surjektiv?



Gegeben eine Menge  $A$ , sagen wir, dass  $A$  *endlich* ist, falls es  $n \in \mathbb{N}$  gibt, mit  $|A| = n$ . Ansonsten heißt die Menge *unendlich*.

Die Menge  $\mathbb{N}$  hat eine Ordnung, die mit dem bekannten Symbol  $\leq$  bezeichnet wird, die durch die Zugehörigkeit  $\in$  induziert wird, nämlich:

$a \leq b$  genau dann, wenn entweder  $a = b$ , oder  $a < b$ , wobei das letzte Symbol so definiert wird:

$$\begin{aligned} 0 < 1 : &\iff \emptyset \in \{\emptyset\}, & 0 < 2 : &\iff \emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots \\ 1 < 2 : &\iff \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, & 1 < 3 : &\iff \{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots \end{aligned}$$

**Übung 1.3.3**

Beweisen Sie, dass  $\leq$  eine Wohlordnung auf  $\mathbb{N}$  ist, und deshalb (siehe Bemerkung 1.2.2) total. ♠

Sie haben Recht, wenn Sie der Meinung sind, dass diese Definitionen umständlich erscheinen, und Sie haben das Recht, sich für einige Zeit verwirrt zu fühlen (obwohl ich hoffe, dass Sie davon überzeugt sind, dass diese Formalisierung sinnvoll ist). Wenn Sie sich jedoch fragen, wie uns natürliche Zahlen als Kinder “erklärt” wurden, werden Sie bald davon überzeugt sein, dass der Begriff der Mächtigkeit notwendigerweise mit dem Begriff der natürlichen Zahlen verbunden sein muss.

Im nächsten Abschnitt werden wir die (sehr bekannten) Operationen auf  $\mathbb{N}$  definieren, die genau wie in der Schule (wahrscheinlich so etwa wie vor 12 Jahren...) definiert wurden.

**1.3.3 Operationen auf  $\mathbb{N}$** 

Es seien  $A$  und  $B$  endliche Mengen, und  $n = |A|$ ,  $m = |B|$  die dazugehörigen Mächtigkeiten.

- *Addition:* Es sei  $A \cap B = \emptyset$ , dann

$$n + m := |A \cup B|$$

(**Übung:** Beweisen Sie, dass  $n^+ = n + 1$  ist. ♠)

- *Multiplikation:*

$$n \cdot m := |A \times B|$$

- *Differenz:* Es sei  $A \subseteq B$ , dann

$$m - n := |B \setminus A|.$$

Bemerken Sie, dass in den obigen Definitionen, zwei Mengen  $A$  und  $B$  gewählt wurden. Man sollte dann beweisen, dass die obigen Operationen nicht von  $A$  und  $B$  abhängen, sondern nur von  $|A|$  und  $|B|$ . Das ist eine Übung für Sie.

Noch eine Frage: Wir sind es gewohnt, die Kommutativität und Assoziativität von Addition und Multiplikation, sowie die Distributivität der Multiplikation über die Addition (siehe Definition 1.1.1), zu verwenden. Können Sie diese Eigenschaften nun *beweisen*? Welche frühere Übung, die Sie bereits hätten lösen sollen, ist nützlich?

**Übung 1.3.4**

Beweisen Sie, dass gegebenen endliche Mengen  $A$  und  $B$  mit  $|A| = n$  und  $|B| = m$ ,

$$A \subseteq B \implies n \leq m.$$



**Bemerkung 1.3.1**

Obwohl diese Übung trivial erscheinen könnte, denken Sie daran, dass Sie nur die Definitionen verwenden können, die wir gegeben haben, und nicht die “Intuition”, die uns glauben lässt, dass diese Implikation trivial ist. Das Konstruieren neuer Aussagen aus Definitionen und Axiomen unterscheidet sich stark davon, sich davon zu überzeugen, dass etwas wahr ist!  $\diamond$

**Übung 1.3.5**

- Beweisen Sie, dass die Multiplikation  $\cdot$  distributiv über die Addition ist (siehe Definition 1.1.1), d.h.

$$m \cdot (n + p) = (m \cdot n) + (m \cdot p), \quad \text{für alle } m, n, p \in \mathbb{N}.$$

Welche Menge-theoretische Eigenschaft müssen Sie beweisen?

- Beweisen Sie, dass  $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$  und dass  $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bemerkung 1.3.2**

Aus der vorherigen Übung, ist die Differenz  $m - n$  nur definiert, wenn  $n \leq m$ . Wie es häufig vorkommen wird, müssen wir die Menge der Zahlen, an denen wir arbeiten, erweitern, damit eine Operation oder eine Eigenschaft allgemeiner definiert werden kann. Um beispielsweise die Definition von  $m - n$  zu ermöglichen, wenn  $m < n$ , werden wir die ganzen Zahlen einführen. Dies wird in Abschnitt 1.5.1 zusammen mit weiteren Beispielen für neue “Mengen der Zahlen”, geschehen.  $\diamond$

**1.3.4 Peanos Axiome und das Induktionsprinzip**

Giuseppe Peano war ein italienischer Mathematiker, die die natürlichen Zahlen auf *axiomatische Weise* einföhrte. Dies bedeutet, dass er eine Reihe von Axiomen aufgelistet hat (die als “wahr” angesehen werden müssen), aus denen die Definition einer *eindeutigen* Menge mit einigen Eigenschaften folgen sollte.

**Definition 1.3.3**

Es sei  $\mathbf{N}$  eine nicht leere Menge,  $0_{\mathbf{N}}$  ein Symbol und  $N: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  eine Funktion. Das Tripel  $(\mathbf{N}, 0_{\mathbf{N}}, N)$  ist ein *Modell natürlicher Zahlen*, wenn es die folgenden Axiome verifiziert:

- (P1)  $0_{\mathbf{N}} \in \mathbf{N}$ ;
- (P2) Für jedes Element  $n \in \mathbf{N}$ , es ein eindeutiges Element  $N(n)$  existiert, das noch in  $\mathbf{N}$  liegt (Existenz der “Nachfolgendenabbildung”  $N: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ );
- (P3) Es gibt kein  $n \in \mathbf{N}$ , so dass  $N(n) = 0_{\mathbf{N}}$  (die Nachfolgendeabbildung ist nicht surjektiv, da  $0_{\mathbf{N}} \notin N(\mathbf{N})$ , und  $0_{\mathbf{N}}$  ist keine Nachfolgende Zahl);
- (P4) Falls  $N(n) = N(m)$ , dann  $n = m$ , für alle  $n, m \in \mathbf{N}$  (die Nachfolgendeabbildung ist injektiv);
- (P5) Es sei  $A$  eine Teilmenge von  $\mathbf{N}$  mit den folgenden Eigenschaften:
  - (i)  $0_{\mathbf{N}} \in A$ , und
  - (ii) Für alle  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \in A \implies N(n) \in A$ .

Dann ist  $A = \mathbf{N}$ .

Falls man die natürlichen Zahlen mit der obigen Definition einführen möchte, sollte man zuerst beweisen, dass ein solches Modell existiert, und dass alle solchen Modelle “isomorph” sind. Die Existenz wird in Proposition 1.3.1 bewiesen. Aber haben wir noch zwei Probleme: wir haben das Konzept von Isomorphismus zwischen zwei Modellen noch nicht eingeführt, und sobald wir diese Definition zur Hand haben, sollten wir beweisen, dass zwei solche Modelle immer isomorph sind: Dies geht über den Rahmen dieser Notizen hinaus. Was wir beweisen können, und was für uns wichtig ist, ist Folgendes:

**Proposition 1.3.1**

*Das Tripel  $(\mathbf{N}, 0, N)$ , wie in Abschnitt 1.3.2 vorgestellt, ist ein Modell natürlicher Zahlen.*

*Beweis:* Eigenschaften (P1) und (P2) sind wahr, nach Konstruktion von  $(\mathbf{N}, 0, N)$ . Die Eigenschaften (P3) und (P4) sollten Sie bereits bewiesen haben; wenn nicht, bitte machen Sie es jetzt.

Wir beweisen zusammen (P5) nach Widerspruch, d.h., angenommen  $A$  ist eine Menge mit Eigenschaften (i) und (ii). Dann führt  $A \subsetneq \mathbf{N}$  zu einem Widerspruch.

Angenommen  $A \subsetneq \mathbf{N}$ , dann ist das Komplement  $A^c$  von  $A$  in  $\mathbf{N}$  nicht leer. Weil  $\leq$  eine Wohlordnung auf  $\mathbf{N}$  ist (siehe Übung 1.3.3), besitzt  $A^c$  ein Minimum  $m$ . Da  $m \notin A$  und  $0 \in A$ , müssen wir  $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  haben. Nun bemerken wir, dass durch die Konstruktion von  $\mathbf{N}$ , jede Zahl  $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$  die nachfolgende Zahl von

ein  $n \in \mathbb{N}$  ist, nämlich  $m = N(n)$ , und dazu muss  $n < m$  gelten (warum?). Aber, weil  $m$  das Minimum von  $A^C$  ist, können wir schließen, dass  $n \in A$  sein muss. Wir haben endlich einen Widerspruch, weil  $A$  Eigenschaft (ii) erfüllt (also, wenn  $n \in A$  sollte auch  $N(n) = m \in A$  sein).  $\square$

### Fragen 1.3.1

Falls man ein Objekt mit einer Liste von Axiomen definiert, muss man sich fragen, warum jedes Axiom wirklich nötig ist. Wie so oft bedeutet das Verstehen der Bedeutung der einzelnen Axiome das Verstehen ihrer Rolle bei der Definition des betrachteten Objekts. Es bedeutet also zu verstehen, was passieren würde, wenn einer von ihnen weggelassen würde. Wäre das definierte Objekt eindeutig? Wäre es das, was “wir erwarten”?

Zum Beispiel, warum ist (P5) nötig in der Definition eines Modells der natürlichen Zahlen?

Um den Grund zu verstehen, warum (P5) nötig ist, nehmen wir an, dass wir schon wissen, was die reellen Zahlen sind, und wir bezeichnen deren Menge mit  $\mathbb{R}$ . Dann nehmen wir die Teilmenge  $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ , und  $N: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  definiert als  $N(x) := x + 1$ . Welche Axiome erfüllt das Tripel  $(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0, N)$ ? Erwarten wir, dass  $(\mathbb{R}_{\geq 0}, 0, N)$  ein Modell der natürlichen Zahlen ist?  $\heartsuit$

## Vorlesung 3 -

### 1.3.5 Das Induktionsprinzip

Es sei  $(\mathbf{N}, 0_{\mathbf{N}}, N)$  ein Modell der natürlichen Zahlen. Dann können wir (P5) in das sogenannte Induktionsprinzip verwandeln, das häufiger in Bezug auf Prädikate angegeben wird.

**(Induktionsprinzip):** Sei  $P(n)$  ein Prädikat, das von  $n \in \mathbf{N}$  abhängt, dann wenn

- (i)'  $P(0_{\mathbf{N}})$  wahr ist, und
  - (ii)" für jedes  $n \in \mathbf{N}$ ,  $P(n)$  wahr  $\implies P(N(n))$  wahr,
- haben wir, dass  $P(n)$  für jedes  $n \in \mathbf{N}$  wahr ist.

Dieses Prinzip ist äquivalent zu (P5). Wir beweisen, dass (P5) das Induktionsprinzip impliziert. Es sei  $A$  die Teilmenge  $\{n \in \mathbf{N} \mid P(n)\}$  (also, die Menge aller  $n$ , damit

$P(n)$  wahr ist), wobei  $P(n)$  die Eigenschaften (i)' und (ii)' erfüllt. Dann (i)' impliziert, dass  $0_{\mathbb{N}} \in A$ , und (ii)', dass  $n \in A \implies N(n) \in A$ . Nach (P5) folgt, dass  $P(n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  wahr ist.

### Übung 1.3.6

Beweisen Sie, dass das Induktionsprinzip (P5) impliziert. (*Hinweis:* Nehmen Sie das Prädikat  $P(n)$ : " $n \in A$ "). ♠

Da das Tripel  $(\mathbb{N}, 0, N)$  ein Modell der natürlichen Zahlen ist (Proposition 1.3.1), können wir schließen, dass das Induktionsprinzip für  $(\mathbb{N}, 0, N)$  gilt. Dieses Prinzip wird oft verwendet, um eine Behauptung zu beweisen, die von einer natürlichen Zahl  $n$  abhängt. Diese Art von Beweis wird **Induktionsbeweis** genannt, und besteht aus folgenden Schritten:

**(Induktionsbeweis):** Es sei  $P(n)$  ein Prädikat, das von  $n \in \mathbb{N}$  abhängt. Dank des Induktionsprinzips, um zu beweisen, dass  $P(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, genügt es zu beweisen, dass

- $P(0)$  wahr ist (*Induktionsanfang*), und dass
- für jedes  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(n) \implies P(n + 1)$  (*Induktionsschritt*).

Bemerken Sie, dass der Induktionsschritt bedeutet: anzunehmen, dass  $P(n)$  wahr ist (**Induktionshypothese**), und mit Argumenten, die für jedes  $n \in \mathbb{N}$  (!! gelten, zu beweisen, dass  $P(n + 1)$  wahr ist (**Induktionsschritt**).

### Übung 1.3.7

Beweisen Sie, dass falls  $n_0 \in \mathbb{N}$  gilt, mit

- $P(n_0)$  wahr, und
- für jedes  $n \geq n_0$ ,  $P(n) \implies P(n + 1)$ ,

dann ist  $P(n)$  wahr für jedes  $n \geq n_0$ . ♠

Es gibt noch ein Induktionsprinzip, das sogenannte *starke Induktionsprinzip*, das so lautet

**(Starkes Induktionsprinzip):** Sei  $P(n)$  ein Prädikat, das von  $n \in \mathbb{N}$  abhängt, dann, wenn

- (i)  $P(n_0)$  wahr ist, und
- (ii) für jedes  $n \geq n_0$ ,  $P(n_0), P(n_0 + 1), \dots, P(n)$  wahr  $\implies P(n + 1)$  wahr,

haben wir, dass  $P(n)$  für jedes  $n \geq n_0$  wahr ist.

Der Unterschied ist, dass wir im Induktionsschritt annehmen müssen, dass die Prädikate  $P(n_0), \dots, P(n)$  wahr sind, und nicht nur  $P(n)$ . Das Induktionsprinzip ist eigentlich äquivalent zum starken Induktionsprinzip, aber wir beweisen diese Äquivalenz nicht. (Aber Sie können es versuchen!)

Im Folgenden werden wir das Wort "Folge" benutzen, die einfach eine Abbildung  $a$  von  $\mathbb{N}$  nach  $A$  ist, wobei  $A$  eine nicht leere Menge ist, und  $a_n := a(n)$ . Selbst wenn wir die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  noch nicht definiert haben, da Sie schon davon eine intuitive Idee haben, werden wir hier annehmen, dass  $A = \mathbb{R}$  ist.

### Beispiel 1.3.1

- (*Summe der ersten  $n$  Folgenglieder einer arithmetischen Folge*)

Die arithmetische Folge ist durch die rekursive Formel

$$a_n = a_{n-1} + d$$

definiert, also (warum?)

$$a_n = a_0 + n \cdot d \quad \text{wobei } n \in \mathbb{N}, a_0 \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen zuerst eine explizite Formel für die Summe der ersten  $n + 1$  Folgenglieder

$$a_0, a_1 = a_0 + d, \dots, a_n = a_0 + n d$$

finden. Jetzt schreiben wir zwei Mal ihre Summe:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & & +(a_0 + d) & & + \cdots & & +(a_0 + n d) & & + \\ (a_0 + n d) & & +(a_0 + (n - 1)d) & & + \cdots & & +a_0 & & \end{array}$$

und bemerken, dass die Summe der beiden Elemente in der Spalte immer  $2a_0 + n d$  ist, und dass es genau  $n + 1$  Spalten gibt <sup>9</sup>. Dann können wir schließen, dass die Summe der ersten  $(n + 1)$  Folgenglieder, die wir mit  $S(n)$  bezeichnen, gegeben ist durch

$$S(n) := \sum_{i=0}^n (a_0 + i \cdot d) = \frac{(n + 1)(2a_0 + n d)}{2}. \quad (1.3.1)$$

Die Folge  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert hier oben wird *arithmetische Reihe* genannt.

Wir haben dann die Formel (1.3.1) schon direkt bewiesen, aber wir möchten sie nochmal mit der Hilfe des Induktionsbeweises nachprüfen. (Bemerken Sie, dass

---

<sup>9</sup>Dieser Trick war Carl Friedrich Gauss bereits als Kind bekannt ... Tatsächlich soll ihm die Aufgabe übertragen worden sein, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, und er antwortete in kürzester Zeit mit "5050"! (Warum?)

die Induktion uns nicht hilft die Formel zu finden; wir können nur beweisen, dass (1.3.1) für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt.)

Es sei  $P(n)$  das Prädikat

$$P(n) : " S(n) = \frac{(n+1)(2a_0 + nd)}{2} ".$$

Um zu beweisen mit der Induktion, dass  $P(n)$  wahr für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist, müssen wir beweisen, dass

- $P(0)$  wahr ist, und
- $P(n) \implies P(n+1)$  für alle  $n \geq 0$ .

(Induktionsanfang) Beginnen wir mit  $P(0)$ , und bemerken dass  $P(0) : "a_0 = a_0"$  immer wahr ist.

(Induktionsschritt) Angenommen dass  $P(n)$  wahr ist (Induktionshypothese). Wie können wir diese Voraussetzung benutzen um zu beweisen, dass  $P(n+1)$  wahr ist? (Nämlich, dass die Formel (1.3.1) für  $n+1$  gilt?) Es genügt zu bemerken, dass

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + a_{n+1} = S(n) + a_0 + (n+1)d \stackrel{P(n) \text{ ist wahr}}{=} \\ &= \frac{(n+1)(2a_0 + nd)}{2} + a_0 + (n+1)d = \dots = \frac{(n+2)(2a_0 + (n+1)d)}{2}, \end{aligned}$$

und deshalb  $P(n+1)$  wahr ist.

- (*Summe der ersten  $n$  Folgenglieder einer geometrischen Folge*) Gegeben  $q \in \mathbb{R}, q \neq 0$ , ist die geometrische Folge gegeben durch

$$q^0 = 1, \quad q^1, \quad q^2, \dots, q^n, \dots$$

und wir wollen zuerst eine explizite Formel für die Summe der ersten  $n+1$  Folgenglieder finden. Dann sei es

$$S(n) := \sum_{i=0}^n q^i.$$

Wir nennen die obige Folge  $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  die *geometrische Reihe*. Wir können leicht bemerken, dass falls  $q = 1$  diese Summe genau  $n+1$  ist; dieser Fall ist nicht so interessant, also nehmen wir an, dass  $q \neq 1$ .

Dann genügt es zu bemerken, dass

$$S(n+1) = S(n) + q^{n+1}, \quad \text{und auch, dass } S(n+1) = qS(n) + 1$$

Da wir angenommen haben, dass  $q \neq 1$ , von den obigen Gleichheiten erhalten wir, dass

$$S(n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad (1.3.2)$$

Wie in dem Fall der arithmetischen Reihe, können wir die obige Gleichheit mit der Hilfe des Induktionsbeweises beweisen. Dann definieren wir das Prädikat

$$P(n) : " S(n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} "$$

Für  $n = 0$ ,  $P(0)$  ist die Identität  $1 = 1$ , also wahr.

Angenommen  $P(n)$  ist wahr. Wir bemerken, dass

$$S(n+1) = 1 + q + \cdots + q^{n+1} = S(n) + q^{n+1} \stackrel{P(n) \text{ ist wahr}}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q},$$

also ist  $P(n+1)$  auch wahr.

- Ein “Gegenbeispiel”, oder genauer gesagt, ein Beispiel, wie der Induktionsbeweis richtig gemacht werden muss! (Und nicht wie unten...)

Nehmen wir an, dass die Vorlesung Analysis I so viele Studierende hat, wie die Elemente von  $\mathbb{N}$  (was fast wahr ist...). Wir wollen “beweisen”, dass das folgende Prädikat

$P(n)$  : “ $n$  (beliebige) Studierende der Analysis I haben die gleiche Augenfarbe” wahr ist, für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  (es macht keinen Sinn für  $n = 0$ ). Wir benutzen den Induktionsbeweis, der vom starken Induktionsprinzip kommt. Also falls wir beweisen, dass

- $P(1)$  wahr ist, und dass
- angenommen  $P(1), P(2), \dots, P(n)$  wahr, dann ist  $P(n+1)$  auch wahr,

mit dem starken Induktionsprinzip können wir schließen, dass  $P(n)$  für alle  $n \geq 1$  wahr ist.

Wir bemerken zuerst, dass  $P(1)$  wahr ist. Angenommen, dass  $P(1), P(2), \dots, P(n-1), P(n)$  wahr sind. Wir müssen beweisen, dass  $P(n+1)$  folgt. Es seien  $a_1, \dots, a_{n+1}$   $n+1$  beliebige Studierende. Wir teilen diese Gruppe in zwei Untergruppen: die Studierenden  $a_1, \dots, a_n$  und die Studierenden  $a_2, \dots, a_{n+1}$ . Da  $P(n)$  wahr ist, haben die Studierenden  $a_1, \dots, a_n$  dieselbe Augenfarbe. Gleichermaßen gilt für  $a_2, \dots, a_{n+1}$ . Aber, da  $P(n-1)$  wahr ist, haben die Studierenden  $a_2, \dots, a_n$  dieselbe Augenfarbe. Da diese Teilmenge von Studenten eine Teilmenge von  $a_1, \dots, a_n$  und  $a_2, \dots, a_{n+1}$  ist, können wir schließen, dass  $a_1, \dots, a_{n+1}$  dieselbe Augenfarbe haben. An dieser Stelle sollten Sie sehr verwirrt sein oder den Fehler bereits gefunden haben ...



## 1.4 Etwas Kombinatorik

In diesem Abschnitt stellen wir grundlegende kombinatorische Konzepte vor, die uns in diesem und anderen Vorlesungen helfen werden, einfache, aber notwendige Berechnungen durchzuführen.

Die Fragen, die wir beantworten möchten, sind beispielsweise folgende:

1. Unter der Annahme, dass jede Buchstabenfolge ein Wort mit voller Bedeutung bildet, wie viele Wörter können gebildet werden mit:
  - (a) drei verschiedenen Buchstaben (z.B.:  $abc$ ,  $cba$ ,  $abd$ ,  $dcb$ , ...)?
  - (b) zwei identischen Buchstaben und einem anderen (z.B.:  $aab$ ,  $bbc$ ,  $cac$ , ...)?
2. Wie viele Anagramme gibt es vom Wort “Analyse”?
3. Wie viele natürliche Zahlenlösungen gibt es für die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 10?$$

4. Gegeben eine Menge mit  $n \in \mathbb{N}$  Elementen, wie viele Teilmengen mit  $k$  Elementen gibt es? Und was ist die Mächtigkeit der Potenzmenge von  $X$ ?
5. Gegeben Mengen  $X$  und  $Y$  mit, bzw.,  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}$  Elementen, wie viele:
  - (a) *Funktionen*  $f: X \rightarrow Y$  gibt es?
  - (b) *injektive Funktionen*  $f: X \rightarrow Y$  gibt es?
  - (c) *surjektive Funktionen*  $f: X \rightarrow Y$  gibt es? :-)  
(Und warum gibt es am Ende dieser Frage ein lächelndes Gesicht?)
  - (d) *bijektive Funktionen*  $f: X \rightarrow X$  gibt es?

Um diese Fragen zu beantworten, beginnen wir mit einigen Definitionen.

### Definition 1.4.1

Gegeben eine Menge  $X$  mit  $n$  Elementen, eine **Permutation** seiner Elemente ist eine Anordnung der (aller) Elemente in einer bestimmten Reihenfolge.

Zum Beispiel, es sei  $X := \{a, b, c\}$ . Dann sind alle möglichen Permutationen gegeben durch:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Also sind die möglichen Permutationen einer Menge mit drei Elementen genau sechs. Warum ist das so?

Für den ersten Buchstaben steht uns frei  $a$ ,  $b$  oder  $c$  zu wählen, also drei Möglichkeiten:

$$a\_ \quad b\_ \quad c\_.$$

Nehmen wir an, dass wir schon den ersten Buchstaben gewählt haben, z.B.  $a$ . Wie viele Möglichkeiten haben wir für den zweiten Buchstaben? Nur zwei, da der zweite Buchstabe unterschiedlich vom ersten sein muss. Also, wir haben  $6 = 3 \cdot 2$  Möglichkeiten

$$ab\_, ac\_, ba\_, bc\_, , ca\_, cb\_.$$

Jetzt bemerken wir, dass falls man die ersten zwei Buchstaben schon gewählt hat, man keine Freiheit hat den dritten Buchstaben zu wählen, d.h. <sup>10</sup> die Wahl des dritten Buchstabens wird durch die ersten beiden bestimmt. Tatsächlich können wir die obigen Wörter nur auf eine Weise vervollständigen und schließlich die  $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$  Permutationen bekommen:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

An dieser Stelle sollte der Grund für die Einführung der folgenden Definition klar erscheinen.

#### Definition 1.4.2

**(Fakultät)** Gegeben  $n \in \mathbb{N}$ , definiert man  $0! := 1$ , und  $n!$  (liest “ $n$  Fakultät”) die natürliche Zahl

$$n! := n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots \cdot 1.$$

Also, induktiv, könnte man die Fakultät so definieren:

$$0! := 1 \quad \text{und} \quad n! := n \cdot (n - 1)!$$

Zum Beispiel,

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \dots$$

#### Satz 1.4.1

Gegeben  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , die Permutationen von  $n$  verschiedenen Objekten sind  $n!$

*Beweis:* Der Beweis folgt genau dem vorherigen Beispiel. Es gibt genau  $n$  Möglichkeiten zu bestimmen, welches Objekt wir auf dem ersten Platz haben. Sobald das erste Objekt ausgewählt wurde, wird das zweite Objekt - das sich vom ersten unterscheiden muss - aus einer Menge mit  $(n - 1)$  Elementen ausgewählt. Für die ersten beiden Auswahlmöglichkeiten haben wir also genau  $n \cdot (n - 1)$  Möglichkeiten, und so weiter.  $\square$

---

<sup>10</sup>das heißt

**Übung 1.4.1**

Für Studenten, die “und so weiter” nicht mögen (und auch für diejenigen, die es mögen), beweisen Sie den obigen Satz durch Induktion.



Wie viele Fragen von Seite 39 können Sie beantworten? Ich behaupte, dass Sie mindestens zwei Fragen beantworten können und wenn Sie nicht genau wissen, welche, hier ist ein “Hinweis”:

**Übung 1.4.2**

Beweisen Sie, dass Sie nachweisen können, wie viele bijektive Funktionen  $f: X \rightarrow X$  vorhanden sind, falls  $|X| = n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 1$ .

Insbesondere beweisen Sie, dass, gegeben  $X$  wie oben, es eine Bijektion gibt zwischen:

- der Menge aller möglichen Bijektionen von  $X$  nach  $X$  und
- der Menge aller möglichen Permutationen von  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Vertiefungen 1.4.1**

Was bedeutet “zu zählen”? “Zählen” bedeutet, eine Bijektion zwischen einer Menge, deren Elemente wir zählen möchten, und einer anderen Menge, deren Mächtigkeit möglicherweise von einer Funktion von  $n \in \mathbb{N}$  abhängt, zu finden. Das Auffinden solcher Bijektionen kann jedoch eher nicht trivial sein.

Apropos, bitte lesen Sie den einleitenden Abschnitt 1.1 “How to count?” des Buches von R. Stanley “Enumerative Combinatorics, Volume 1”, das legal online auf seiner Webseite ist. Bitte klicken Sie [hier](#).

**Definition 1.4.3**

Gegeben eine Menge  $X$  mit  $n$  Elementen, eine **Variation ohne Wiederholung von  $n$  Objekten zur Klasse  $k$**  ist eine Anordnung von  $k$  Elementen in  $X$  in einer bestimmten Reihenfolge.

Zum Beispiel, gegeben  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ , sind die folgenden Variationen (ohne Wiederholung) von 4 Objekten zur Klasse 2:

$$12, \quad 13, \quad , 14, \quad 23, \quad 24 \dots$$

Im Allgemeinen, gegeben  $X$  mit  $|X| = n > 0$ , ist eine Variation ohne Wiederholung von  $n$  Objekten zur Klasse  $k$  gegeben durch

$$x_1 x_2 \dots x_k \quad \text{wobei } x_i \in X \text{ und } x_i \neq x_j, \text{ für alle } i, j = 1, \dots, k.$$

Natürlich hat das obige Konzept nur Sinn, wenn  $k \leq n$ ; außerdem, für  $k = n$  erhalten wir genau die Permutationen, die wir schon definiert haben.

**Satz 1.4.2**

Gegeben  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$  und  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $1 \leq k \leq n$ , die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von  $n$  Objekten zur Klasse  $k$  ist

$$n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

*Beweis:* Der Beweis ähnelt dem von Satz 1.4.1. Für das erste Element haben wir  $n$  Möglichkeiten; Sobald das erste Element ausgewählt wurde, können wir das zweite Element unter den verbleibenden  $(n-1)$  Elementen auswählen und so weiter, bis wir das Element der Stelle  $k$  erreichen, für das es  $(n-(k-1))$  Möglichkeiten gibt. Dann ist die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von  $n$  Objekten zur Klasse  $k$  genau  $n(n-1) \cdots (n-k+1)$ , die gleich  $\frac{n!}{(n-k)!}$  ist.  $\square$

**Übung 1.4.3**

Es seien  $X$  und  $Y$  endliche Mengen, mit  $|X| = k$  und  $|Y| = n$ . Unter welchen Bedingungen auf  $k$  und  $n$  gibt es eine injektive Funktion von  $X$  nach  $Y$ ? Beschreiben Sie eine Bijektion zwischen:

- der Menge aller injektiven Funktionen von  $X$  nach  $Y$ , und
- der Menge der Variationen ohne Wiederholung von  $n$  Objekten zur Klasse  $k$ ,

und beantworten Sie Frage 5(b) auf Seite 39. ♠

Definieren wir nun die **Permutationen mit Wiederholung**. Beginnen wir mit einem Beispiel: Betrachten wir das folgende “Wort”  $aaabb$ . Dies ist eine Reihenfolge von 2 Buchstaben an 5 Stellen, wobei die Buchstaben an der ersten, zweiten und dritten Stelle nicht unterscheidbar sind, ebenso wie die Buchstaben an der vierten und fünften Stelle. Daher wird eine Permutation mit Wiederholung durch die folgenden Daten bestimmt (und definiert):

Unterscheidbare Elemente  $x_1, \dots, x_k$ , die eine Anordnung von  $n$  Elementen bilden, wobei  $x_1$  für  $n_1$ -mal,  $x_2$  für  $n_2$ -mal, ...,  $x_k$  für  $n_k$ -mal wiederholt wird. Also muss es insbesondere  $n_1 + \dots + n_k = n$  sein.

Zum Beispiel ist im Wort  $aaabb$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $n_1 = 3$  und  $n_2 = 2$ . Wie viele Permutationen mit Wiederholung mit denselben Daten gibt es? In diesem Beispiel sind es 10, und zwar

$aaabb, aabab, aabba, abaab, ababa, abbaa, baaab, baaba, babaa, bbaaa.$

Warum 10? Wir können so argumentieren: Lassen Sie uns zunächst so tun, als ob die drei  $a$  alle unterscheidbar wären, und die zwei  $b$  auch, d.h.  $aaabb$  durch  $a_1a_2a_3b_1b_2$  ersetzen. Wir wissen schon, dass die Permutationen (ohne Wiederholung!) dieser

Elemente genau  $5! = 120$  sind. Aber jetzt erinnern wir uns, dass in Wirklichkeit  $a_1 = a_2 = a_3 = a$ . Alle Permutationen vom Typ  $a_1a_2a_3b_1b_2$ ,  $a_2a_1a_3b_1b_2$ ,  $a_1a_3a_2b_1b_2$ , ... (also, an den letzten beiden Stellen steht immer das “Wort”  $b_1b_2$ ) ergeben also die gleiche Permutation mit Wiederholung  $aaab_1b_2$ . Wie viele sind es? Genau  $3! = 6$ . Sobald die verschiedenen  $a$  identifiziert wurden, können wir fortfahren und die verschiedenen  $b$  identifizieren, also  $b_1 = b_2 = b$ . Dann werden die Permutationen (mit Wiederholung)  $aaab_1b_2$  und  $aaab_2b_1$  die gleiche Permutation (mit Wiederholung)  $aaabb$  geben. Wie viele solche Permutationen ( $aaab_1b_2$  und  $aaab_2b_1$ ) gibt? Genau  $2! = 2$ . Dieses Beispiel sollte ausreichen, um den Beweis der folgenden Aussage zu verstehen:

### Satz 1.4.3

Sei  $x_1, \dots, x_k$  verschiedene Elemente, die eine Permutation mit Wiederholung bilden, wobei  $x_1$  für  $n_1$ -mal,  $x_2$  für  $n_2$ -mal, ...,  $x_k$  für  $n_k$ -mal wiederholt wird; sei  $n = n_1 + \dots + n_k$ . Dann ist die Anzahl der Permutationen mit Wiederholung dieser Elemente genau

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

### Übung 1.4.4

Beweisen Sie Satz 1.4.3



### Definition 1.4.4

Es seien  $n, k \in \mathbb{N}$ , wobei  $k \leq n$ . Dann ist der

**Binomialkoeffizient**  $\binom{n}{k}$  (liest “ $n$  über  $k$ ”, oder “ $k$  aus  $n$ ”) definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Im Allgemeinen, gegeben  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  und  $n = n_1 + \dots + n_k$ , ist der **Multimonialkoeffizient** definiert als

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} := \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}.$$

Jetzt können Sie die Fragen 1(b) und 2 auf Seite 39 leicht beantworten. Ich behaupfe, dass wir auch die Fragen 3 und 4 beantworten können, aber um dies zu sehen, müssen wir ein wenig arbeiten, um dieses Problem in ein Problem zu übersetzen, das wir lösen können (siehe “Fragen und Vertiefungen 1.4.1”).

Betrachten wir zuerst Frage 3: Wie viele natürliche Zahlenlösungen gibt es für die Gleichung

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10?$$

Ein Beispiel dieser Lösung ist  $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (3 2 1 1 3)$ , die unterschiedlich ist von  $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (2 3 1 1 3)$ , oder  $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (0 3 2 4 1)$ . Wir können diese Lösungen mit einer Folge von 2 verschiedenen Elementen darstellen, einem weißen und einem schwarzen Kreis, wie folgt: die Lösung  $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (3 2 1 1 3)$  wird mit der Reihe

$$\bullet \bullet \bullet \circ \bullet \bullet \circ \bullet \circ \bullet \circ \bullet \bullet \bullet$$

Die Gesamtzahl der schwarzen Kreise beträgt also 10, und diese werden durch die 4 (= 5-1) weißen Kreise in 5 "Gruppen" (die Anzahl der Variablen) unterteilt. Als zweites Beispiel  $(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5) = (0 3 2 4 1)$  haben wir

$$\circ \bullet \bullet \bullet \circ \bullet \bullet \circ \bullet \bullet \bullet \bullet \circ \bullet$$

Überzeugen Sie sich jetzt davon: Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 10\}$$

und der Anordnungen mit 10 schwarzen Kreisen, und 4 (= Anzahl der Variablen -1) weißen Kreisen. Es ist jetzt einfach zu sehen, dass die Anzahl der Lösungen

$$\frac{(10+4)!}{10! 4!} = \binom{14}{10}$$

ist.

Im Allgemeinen haben wir die folgende

#### Proposition 1.4.4

*Die Anzahl der Lösungen natürlicher Zahlen der Gleichung*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

*oder, mit anderen Worten, die Mächtigkeit der Menge*

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N} \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n\},$$

*ist gegeben durch*

$$\binom{n+k-1}{n}$$

Zu diesem Zeitpunkt sollte der allgemeine Beweis für diese Aussage klar sein. Wenn dies nicht der Fall ist, führen Sie die folgende Übung aus

#### Übung 1.4.5

Beweisen Sie Proposition 1.4.4



Beantworten wir nun die wichtige Frage Nummer 4 auf [39]:  
*Gegeben eine Menge  $X$  mit  $|X| = n \in \mathbb{N}$ , wie viele Teilmengen mit  $k$  Elementen gibt es? Und was ist die Mächtigkeit der Potenzmenge von  $X$ ?*

Wie zuvor müssen wir dieses Problem übersetzen und eine explizite Bijektion zwischen der Menge von Teilmengen der Mächtigkeit  $k$  und einer Menge geben, von der wir wissen, wie man die Mächtigkeit berechnen kann. Um die Elemente der Teilmenge zu identifizieren, können wir dies tun: Wir ordnen dem Element von  $X$  einen schwarzen Kreis zu, wenn dies ein Element von  $Y$  ist, und einen weißen Kreis, wenn das Element von  $X$  nicht in  $Y$  ist.

Lassen Sie uns zunächst diese Strategie anhand eines Beispiels erläutern. Es sei  $X = \{a, b, c, d\}$ , und es sei  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge. Für  $Y = \{a, b\}$ , haben wir

$$\begin{array}{c} \{a, b\} \\ \bullet \quad \bullet \quad \circ \quad \circ \end{array}$$

Ebenso haben wir

$$\begin{array}{cccc} \emptyset & \{a\} & \{c\} & \{a, b, c\} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ & \bullet \quad \circ \quad \circ \quad \circ & \circ \quad \circ \quad \bullet \quad \circ & \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \end{array}$$

Dann, im Allgemeinen, können wir eine Teilmenge  $Y$  von  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (also  $|X| = n$ ) mit einer Reihe von  $n$  Kreisen (wobei der erste Kreis dem Element  $x_1$  entspricht, der zweite Kreis dem Element  $x_2$ , usw.) mit der folgenden Regel identifizieren: Wenn  $x_i$  zu  $Y$  gehört, dann ist der Kreis schwarz, sonst weiß, für jedes  $i = 1, \dots, n$ . Wir sollten davon überzeugt werden, oder –besser– genau beweisen, dass diese Zuordnung eine Bijektion zwischen der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  von  $X$  und der Menge  $R$  aller Reihen mit  $n$  Kreisen, entweder schwarz oder weiß, ist. Was ist dann  $|\mathcal{P}(X)| = |R|$ ? Wir bemerken, dass wir für das erste Element der Reihe zwei Möglichkeiten (schwarz oder weiß) haben, für das zweite noch zwei, für das dritte noch zwei.... Also, da die Reihen in  $R$  aus  $n$  Elementen bestehen, ist die Mächtigkeit von  $R$  genau  $2^n$ .

### Satz 1.4.5

*Es sei  $X$  eine Menge mit  $n$  Elementen. Dann:*

- (a) *die Mächtigkeit der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  ist gegeben durch  $2^n$ ;*
- (b) *die Anzahl der Teilmengen von  $X$  mit  $k$  Elementen ist  $\binom{n}{k}$  für  $k \leq n$  und Null für  $k > n$ .*

### Übung 1.4.6

Beweisen Sie Satz 1.4.5. (Das obige Argument beweist *fast* die gesamte Behauptung in (a), und Sie haben alle Elemente, um (b) zu beweisen.) ♠

Der letzte Satz dieses Kapitels ist sehr wichtig und gibt uns eine Formel, um die Koeffizienten des Polynoms  $(a+b)^n$  zu finden. Wir erklären sie zuerst mit einem Beispiel.

Nehmen wir an, dass wir das Polynom  $(a+b)^4$  explizit berechnen möchten. Wir erwarten ein Polynom des Typs:

$$\sum_{k=0}^4 \alpha_k a^k b^{n-k}.$$

(Warum?) Die Frage ist: was sind die Koeffizienten  $\alpha_k$ ? Wir schreiben  $(a+b)^4$  als

$$(a_{(1)} + b_{(1)}) \cdot (a_{(2)} + b_{(2)}) \cdot (a_{(3)} + b_{(3)}) \cdot (a_{(4)} + b_{(4)})$$

Die Indizes in Klammern geben nur an, zu welchem Faktor  $a$  und  $b$  gehören. Also ist auf jeden Fall  $a_{(i)} = a$  für jedes  $i = 1, \dots, 4$ , und ähnlich für  $b$ . Wie viele Faktoren der Gestalt  $a^2b^2$  haben wir dann? Wir erhalten:

$$a_{(1)}a_{(2)}b_{(3)}b_{(4)}, \quad a_{(1)}a_{(3)}b_{(2)}b_{(4)}, \quad a_{(1)}a_{(4)}b_{(2)}b_{(3)}, \quad a_{(2)}a_{(3)}b_{(1)}b_{(4)}, \quad a_{(2)}a_{(4)}b_{(1)}b_{(3)}, \quad a_{(3)}a_{(4)}b_{(1)}b_{(2)}$$

Bemerken Sie, dass: die Indizes von den  $a$  bestimmen die von den  $b$ , und dass die *Mengen* (nicht Anordnungen, warum?) der Indizes der  $a$  bestimmen den zugehörigen Faktor. Mit anderen Worten haben wir, dass (lesen Sie hier “ $\leftrightarrow$ ” als “wird bestimmt durch”)

$$a_{(1)}a_{(2)}b_{(3)}b_{(4)} \leftrightarrow \{1, 2\} \quad a_{(1)}a_{(3)}b_{(2)}b_{(4)} \leftrightarrow \{1, 3\} \quad a_{(1)}a_{(4)}b_{(2)}b_{(3)} \leftrightarrow \{1, 4\} \dots$$

(und wird  $a_{(1)}a_{(2)}b_{(3)}b_{(4)}$  nicht durch die *Anordnung* (1 2 3 4) bestimmt, warum?) Dann, da  $a_{(i)} = a$  und  $b_{(i)} = b$  für alle  $i = 1, \dots, 4$ , Satz 1.4.5 (b) impliziert, dass der Koeffizient von  $a^2b^2$  genau  $\binom{4}{2} = 6$  ist. Im Allgemeinen haben wir

### Satz 1.4.6

**(Binomischer Lehrsatz)** Als Polynome in  $a$  und  $b$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

### Fragen 1.4.1

Da die obige Gleichheit als Polynom in  $a$  und  $b$  gilt, gilt sie für alle Werte von  $a$  und  $b$ . Erhalten Sie neue Eigenschaften der Binomialkoeffizienten für besondere Werte von  $a$  und  $b$ ? Zum Beispiel, was erhalten Sie, für  $a = 1$  und  $b = 1$ ? Und für  $a = 1$  und  $b = -1$ ? Für andere Werte?

### Übung 1.4.7 (i)

Beweisen Sie rigoros und direkt (also, ohne Induktion) Satz 1.4.6

(Sie müssen insbesondere alle “Warum?” hier oben erklären, und die Argumentation verallgemeinern).

(ii) Finden und beweisen Sie eine Formel für  $(x_1 + \cdots + x_h)^n$ , für alle  $h, n \in \mathbb{N}$ .



### Übung 1.4.8

Vergessen wir für einen Moment die Definition des Binomials  $\binom{n}{k}$ , die wir in Definition 1.4.4 gegeben haben, und definieren das Symbol  $\binom{n}{k}$  als die Anzahl der Teilmengen von  $X$  der Mächtigkeit  $k$ , wobei  $|X| = n$ . (Glücklicherweise macht diese neue Definition dank des Theorems 1.4.5 Sinn). Mit dieser neuen Definition (und nicht mit der expliziten Formel für das Binomial!!) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften: Es seien  $k, n \in \mathbb{N}$ , dann

- (i) für alle  $k \leq n$ ,  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ;
- (ii)  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ ;
- (iii) für  $k \geq 1$  ist  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$  (Denken Sie an die Definition der Addition in Abschnitt 1.3.3...);
- (iv)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .



### Übung 1.4.9

Verwenden Sie die explizite Definition des Binomials (Definition 1.4.4), um die Eigenschaften (i),(ii), (iii) und (iv) der vorherigen Übung zu beweisen.



### Übung 1.4.10

Wiederholen Sie Übung 1.4.7 mit Induktionsbeweisen.



### Bemerkung 1.4.1

Welches bevorzugen Sie zwischen Übung 1.4.8 und 1.4.9? (Vorausgesetzt, es gibt einen Favoriten ...) Ich persönlich würde Übung 1.4.8 vorziehen. Meiner Meinung nach sollte ein Beweis der Aussage eine *Bedeutung* verleihen und die Formeln in (i) – (iv) in Beziehung setzen, um Eigenschaften festzulegen. Er verdeutlicht den Grund viel mehr als einen Induktionsbeweis. Ich würde sagen, dass die Beweise in Übung 1.4.8 (vorausgesetzt, sie sind korrekt :-)) „eleganter“ sind und Sie sich mit Formeln und Berichten nicht „die Hände schmutzig machen“ (obwohl, irgendwann in Ihrem mathematischen Leben, müssen Sie sich mit langen, langen Konten die Hände schmutzig machen, in denen am Ende immer ein falsches „+“ oder „–“ Zeichen steht ...).



**Übung 1.4.11**

Wenn es immer noch nicht “klar” war, muss Mathematik Spaß machen! Viel Spaß beim Verstehen, was Pascalsches Dreieck ist und welche Eigenschaften es hat (z.B. hier), und wenn Sie wirklich übertreiben möchten, auch was das Sierpinski-Dreieck ist.



...und Frage 5 (c)? :-)

**Übung 1.4.12**

In dieser Übung werden wir Frage 5 (c) beantworten. (Das ist wahrscheinlich die schwerste Frage auf Seite 39.)

Wir definieren zuerst das folgende Konzept: Die **Stirling-Zahl zweiter Art**  $S(n, k)$  gibt die Anzahl der Partitionen mit  $k$  Elementen einer Menge mit  $n$  Elementen.<sup>11</sup> Im vorherigen Beispiel, ist  $\mathcal{P} = \{\{a\}, \{b, c\}\}$  eine Partition von  $X$  mit zwei Elementen, und  $S(3, 2)$  ist drei, weil die Partitionen von  $X$  mit zwei Elementen sind

$$\{\{a\}, \{b, c\}\}, \quad \{\{b\}, \{a, c\}\}, \quad \{\{c\}, \{a, b\}\}.$$

(Bemerken Sie, dass  $S(n, k)$  unabhängig ist, von der gewählten Menge  $X$  mit  $n$  Elementen...d.h.,  $S(n, k)$  hängt nur von  $n$  und  $k$  ab.)

Im Folgenden nehmen wir an, dass  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $k > 0$  und  $n > 0$ .

Beweisen Sie direkt (also, ohne Induktion), dass

- (a)  $S(n, k) = 0$  falls  $k > n$ , und  $S(n, n) = S(n, 1) = 1$ ;
- (b)  $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$ ;
- (c)  $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$ ;
- (d) ...und endlich... die Anzahl aller surjektiven Funktionen  $f: X \rightarrow Y$ , wobei  $|X| = n$  und  $|Y| = k$ , gegeben ist durch  $k! S(n, k)$ .




---

<sup>11</sup>Es gibt eine direkte Formel, um diese Zahlen zu berechnen, aber wir werden sie nicht einführen, da sie kompliziert ist und nicht zum Verständnis ihrer Eigenschaften beiträgt. (Siehe auch Bemerkung 1.4.1 wo jedoch in diesem Fall die direkte Definition der Binomialkoeffizienten einfacher ist).

## 1.5 Die ganzen und rationalen Zahlen

### 1.5.1 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

In diesem Abschnitt werden wir die Menge der natürlichen Zahlen erweitern. Diese Erweiterung ergibt sich aus der Notwendigkeit, eine größere Anzahl von Gleichungen zu lösen. Beispielsweise hat die Gleichung  $a + x = b$ , wobei  $a, b \in \mathbb{N}$ , eine Lösung  $x \in \mathbb{N}$ , nur wenn  $a \leq b$ , da die Differenz  $b - a$  definiert ist, nur wenn  $a \leq b$ . Eine erste Idee, um die Menge der ganzen Zahlen einzuführen, besteht darin, ihre Elemente als formale Differenz von Elementen von  $\mathbb{N}$  zu identifizieren. Zum Beispiel, das Element “ $-3$ ” könnte als  $1 - 4$  definiert werden, oder  $2 - 5$ , oder  $3 - 6\dots$  Diese “Definition” stellt sofort ein Problem dar: Wie zu sehen ist, gibt es unendlich viele Zahlenpaare, deren “formale Differenz” dieselbe Zahl darstellt. Darüber hinaus ist für Paare  $n - m$ , mit  $n < m$ , das Symbol der Differenz – nur formal und schafft Verwirrung. Um diese beiden Probleme auf einmal zu lösen, führen wir die folgende Konstruktion ein. Es sei  $\mathcal{R}$  die folgende Relation auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ :

$$((n, m), (n', m')) \in \mathcal{R} : \iff n + m' = m + n'$$

(anstatt zu sagen, dass  $n - m = n' - m'!$ ). Es ist nicht zu schwer zu beweisen<sup>12</sup>, dass  $\mathcal{R}$  eine Äquivalenzrelation ist (siehe Definition 1.2.7). Dann um zu sagen, dass alle Paare  $(1, 4)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(3, 6)\dots$  dieselbe Zahl “darstellen”, verwenden wir den folgenden “Trick”:

#### Definition 1.5.1

Die Menge  $\mathbb{Z}$  der ganzen Zahlen ist definiert als  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$ , die Menge der Äquivalenzklassen von  $\mathcal{R}$ .

Da  $\mathcal{R}$  eine Äquivalenzrelation ist, im Folgenden, falls  $((n, m), (n', m')) \in \mathcal{R}$ , wir schreiben  $(n, m) \approx (n', m')$ .

In dieser Quotientenmenge möchten wir die üblichen Operationen von Addition und Produkt einführen. Wieso? Versuchen wir, die folgende Definition zu geben:

$$\begin{aligned} [(m, n)] + [(m', n')] &:= [(m + m', n + n')] \\ [(m, n)] \cdot [(m', n')] &:= [(m \cdot m' + n \cdot n', n \cdot m' + m \cdot n')] \end{aligned}$$

(Warum sind die Addition und Multiplikation so definiert?) Bemerken Sie, dass die Operationen  $+$  und  $\cdot$  auf der linken Seite sind genau was wir definieren wollen, und auf der rechten Seite wurden sie schon in Abschnitt 1.3.3 definiert. Was ist ein mögliches Problem? Das Problem ist, dass wir Elemente der Äquivalenzklasse

---

<sup>12</sup>Bemerken Sie, dass um die Transitivität zu beweisen, man zuerst nachprüfen muss, dass  $a + b = a' + b \implies a = a'$ , für alle  $a, a', b \in \mathbb{N}$ . Diese “Kürzbarkeit” gilt auf  $\mathbb{N}$ , aber man sollte sie rigoros beweisen...

*ausgewählt* haben, um die Summen- und Produktoperation zu definieren, aber diese Operationen –die auf den \*Äquivalenzklassen\* definiert sind– sollten *unabhängig* von den gewählten Elementen sein (da es kein “besonderes Element” in einer Äquivalenzklasse gibt), oder, mit anderen Worten:

### Übung 1.5.1

Es seien  $(m_1, n_1) \approx (m_2, n_2)$  und  $(m'_1, n'_1) \approx (m'_2, n'_2)$ . Dann für alle  $m_i, n_i, m'_i, n'_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, 2$ , sind

- $(m_1 + m'_1, n_1 + n'_1) \approx (m_2 + m'_2, n_2 + n'_2)$ , und
- $(m_1 \cdot m'_1 + n_1 \cdot n'_1, n_1 \cdot m'_1 + m_1 \cdot n'_1) \approx (m_2 \cdot m'_2 + n_2 \cdot n'_2, n_2 \cdot m'_2 + m_2 \cdot n'_2)$ .

Überzeugen Sie sich selbst, dass diese beiden Eigenschaften für die Definition von Summe und Produkt auf der Quotientenmenge notwendig sind. ♠

Wir führen eine häufigere Notation von ganzen Zahlen ein. Zuerst beobachten<sup>13</sup> wir Folgendes:

- Falls  $m > n$  ist  $(m, n)$  äquivalent zu  $(m - n, 0)$ ;
- falls  $m < n$  ist  $(m, n)$  äquivalent zu  $(0, n - m)$ ;
- falls  $m = n$  ist  $(m, n)$  äquivalent zu  $(0, 0)$ .

Dann gibt es für jedes Element  $(m, n)$  ein äquivalentes Element der Gestalt

- $(m', 0)$  mit  $m' > 0$ , oder
- $(0, n')$  mit  $n' > 0$ , oder
- $(0, 0)$ ,

und alle (disjunkte) Äquivalenzklassen sind der Gestalt

- $[(m', 0)]$  mit  $m' > 0$ ,
- $[(0, n')]$  mit  $n' > 0$ , oder
- $[(0, 0)]$

Im ersten Fall bezeichnen wir die “Zahl”  $[(m', 0)]$  mit  $+m'$ , im zweiten Fall bezeichnen wir  $[(0, n')]$  mit  $-n'$ , und im dritten Fall mit 0. Mit dieser Notation können wir die natürlichen Zahlen mit einer Teilmenge der ganzen Zahlen identifizieren. Um das zu erreichen, brauchen wir eine injektive Funktion  $\iota: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ , die in diesem Fall als Inklusion betrachtet wird. Diese Funktion ist durch  $\iota(n) = [(n, 0)]$  gegeben, und im Folgenden werden wir  $\mathbb{N}$  mit  $\iota(\mathbb{N})$  identifizieren.

Wir sind bereit, Folgendes zu beweisen:

---

<sup>13</sup>Warum ist es so?

**Lemma 1.5.1**

Die Menge  $\mathbb{Z}$ , zusammen mit der Addition  $+$ , erfüllen folgende Eigenschaften:

- (i) Die Addition ist assoziativ.
- (i') Sie ist kommutativ.
- (ii) Sie hat ein neutrales Element, nämlich das Element 0, das  $0 + n = n + 0 = n$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$  erfüllt (hier könnte  $n$  auch  $-m$  bezeichnet werden, wobei  $m \in \mathbb{N}$ ).
- (iii) Für jedes  $n \in \mathbb{Z}$ , gibt es ein Element  $m \in \mathbb{Z}$ , das das inverse Element von  $n$  genannt wird und bezeichnet mit  $-n$ , sodass  $n + (-n) = 0$ .

*Beweis:* Eigenschaften (i) und (i') kommen aus der Assoziativität und Kommutativität der Addition auf  $\mathbb{N}$ , und die Details bleiben als leichte Übungsaufgabe dem Leser überlassen. Die Überprüfung von (ii) ist ebenfalls einfach und ergibt sich aus der Tatsache, dass 0 auch ein neutrales Element der Addition in  $\mathbb{N}$  ist (warum?). In der Tat, falls  $n \in \mathbb{N}$ , dann

$$0 + n = [(0, 0)] + [(n, 0)] = [(0 + n, 0 + 0)] = [(n, 0)] = n$$

(wobei in der dritten Gleichheit benutzt wird, dass 0 das neutrale Element für die Addition in  $\mathbb{N}$  ist). Darüber hinaus,

$$0 + (-n) = [(0, 0)] + [(0, n)] = [(0 + 0, 0 + n)] = [(0, n)] = -n.$$

Schließlich für (iii), falls  $n \in \mathbb{N}$ , haben wir

$$n + (-n) = [(n, 0)] + [(0, n)] = [(n, n)] = [(0, 0)] = 0,$$

also ist das inverse Element von  $n$  genau  $-n$ . Dies beweist auch, dass das inverse Element von  $-n$  genau  $n$  ist.  $\square$

**Bemerkung 1.5.1**

Wir bemerken, dass  $\mathbb{N}$ , zusammen mit der Addition  $+$ , Eigenschaften (i) und (ii) in Lemma 1.5.1 erfüllt. Eine Menge, mit einer assoziativen zweistelligen Verknüpfung, die aus einem neutralen Element besteht, heißt **monoid**. Falls die Verknüpfung auch kommutativ ist, dann heißt die Menge, zusammen mit der Verknüpfung, ein *kommutatives Monoid*. Dann ist  $(\mathbb{N}, +)$  ein **kommutatives Monoid**.

Der Grund, warum wir  $\mathbb{N}$  erweitern wollten, ist, dass außer 0 kein Element von  $\mathbb{N}$  eine Inverse hat. Die Existenz einer Inverse erlaubt uns die Gleichung

$$a + x = b$$

in  $x$  zu lösen, für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$ , d.h., dass für alle  $a, b \in \mathbb{Z}$ , die Lösung der obigen Gleichung  $b + (-a) \in \mathbb{Z}$  ist. (Warum?)  $\diamond$

Im Folgenden bezeichnen wir  $n + (-m)$  einfach mit  $n - m$ , für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$  (und bitte, gehen Sie zurück zur Übung 1.1.4).

Die nächste Definition ist von grundlegender Bedeutung.

**Definition 1.5.2**

Es sei  $G$  eine Menge und  $*: G \times G \rightarrow G$  eine zweistellige Verknüpfung. Dann ist das Paar  $(G, *)$  eine **Gruppe**, falls

(1)  $*$  assoziativ ist;

(2) es ein Element  $e \in G$  gibt, das **neutrales Element** genannt wird, das erfüllt

$$e * g = g * e = g \quad \text{für alle } g \in G;$$

(3) jedes Element  $g \in G$  ein **inverses Element** besitzt, das mit  $g^{-1}$  bezeichnet wird, nämlich ein Element, für das gilt

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e.$$

Falls die Verknüpfung kommutativ ist, dann wird  $(G, *)$  **kommutative Gruppe** genannt.

Wir können Lemma 1.5.1 einfach so umformulieren:

**Lemma 1.5.2**

$(\mathbb{Z}, +)$  ist eine kommutative Gruppe.

**Vertiefungen 1.5.1**

Dann, im obigen Prozess, haben wir ein kommutatives Monoid (in diesem Fall  $(\mathbb{N}, +)$ , siehe Bemerkung 1.5.1) zu einer kommutativen Gruppe (in diesem Fall  $(\mathbb{Z}, +)$ ) „befördert“. Dieser Prozess ist in der Mathematik gut bekannt, und die von einem Monoid erzeugte Gruppe heißt **Grothendieck-Gruppe**.  $\diamond$

**Übung 1.5.2**

Zu Beginn von Abschnitt 1.2.2 haben wir eine Menge mit zwei Elementen definiert,  $\{G, U\}$ , die wir mit  $\mathbb{Z}_2$  jetzt bezeichnen (der Name wird in anderen Vorlesungen erklärt). Dazu haben wir eine Summe  $+$  auf  $\mathbb{Z}_2$  definiert. Beweisen Sie, dass  $(\mathbb{Z}_2, +)$  eine Gruppe ist.  $\spadesuit$

**Übung 1.5.3**

Sind die folgenden Gruppen?

- $(\mathbb{N}, -)$
- $(\mathbb{Z}, -)$
- $(\mathbb{N}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$

- $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$



**Bemerkung 1.5.2**

Die Assoziativität der Verknüpfung erlaubt uns ein endliches Produkt  $g_1 * g_2 * \dots * g_k$  zu definieren, da –unabhängig davon, wie wir die Klammern verwenden– ist das Ergebnis dasselbe.  $\diamond$

---

**Vorlesung 4 -**

Die Eigenschaften (1) (2) und (3) in Definition 1.5.2 (und nicht die spezifische Definition der Verknüpfung \*) implizieren Folgendes:

**Lemma 1.5.3**

*In einer Gruppe  $(G, *)$  sind das neutrale Element und das inverse Element eines Gruppenelements eindeutig bestimmt.*

*Beweis:* Beweisen wir zuerst, dass das neutrale Element eindeutig bestimmt ist. Nehmen wir an, dass es zwei neutrale Elemente gibt:  $e_1$  und  $e_2$ . Dann

- Da  $e_1$  ein neutrales Element ist, haben wir  $e_1 * e_2 = e_2$ ;
- auf der anderen Seite, da  $e_2$  ein neutrales Element ist, haben wir  $e_1 * e_2 = e_1$ .

Von den zwei Gleichheiten erhalten wir, dass  $e_1 = e_2$  muss. Wir bezeichnen das einzige neutrale Element durch  $e$ .

Es sei jetzt  $g \in G$ , und  $g_1, g_2$  zwei inverse Elemente von  $g$ . Dann

$$g_1 = g_1 * e = g_1 * (g * g_2) = (g_1 * g) * g_2 = e * g_2 = g_2,$$

wobei: die erste Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass  $e$  das neutrale Element ist; die zweite aus der Tatsache, dass  $g_2$  eine Inverse von  $g$  ist; die dritte aus Assoziativität; die vierte gilt, weil  $g_1$  eine Inverse von  $g$  ist, und die letzte gilt, weil nochmal  $e$  das neutrale Element ist.  $\square$

Hier listen wir andere wichtige Eigenschaften auf, die sich direkt aus der Gruppendefinition ergeben.

**Lemma 1.5.4**

*Es sei  $(G, *)$  eine Gruppe. Dann*

1. Für jede  $a, b \in G$ , hat die Gleichung

$$a * x = b$$

die eindeutige Lösung  $x = a^{-1} * b$ ;

- 2. Für jedes  $a \in G$  ist  $(a^{-1})^{-1} = a$ ;
- 3. Für jede  $a, b \in G$ , ist  $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ ;
- 4. Das inverse Element des neutralen Element  $e$  ist  $e$ .

*Beweis:* 1. Da jedes Element  $a$  ein inverses Element hat, aus  $a * x = b$  erhalten wir, dass  $a^{-1} * a * x = a^{-1} * b$ , und die linke Seite ist genau  $x$  (hier haben wir keine Klammern für die Verknüpfung benutzt, da sie assoziativ ist).

- 2. Um zu beweisen, dass  $(a^{-1})^{-1} = a$ , es genügt die folgende Gleichheit für einige Sekunden zu beobachten:  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ , und Lemma 1.5.3 zu benutzen.
- 3. Wir bemerken, dass  $a * b * b^{-1} * a^{-1} = a * e * a^{-1} = a * a^{-1} = e$ , und ähnlich  $b^{-1} * a^{-1} * a * b = \dots = e$ . (Kleine Übung: Begründen Sie die verwendeten Gleichheiten und ergänzen die Punkte).
- 4. Nochmal, es genügt die folgende Gleichheit für einige Sekunden zu beobachten:  $e * e = e$  (und Lemma 1.5.3 zu benutzen).

□

Bitte benutzen Sie Übung 1.3.5 um die folgende Übung zu lösen:

**Übung 1.5.4** • Beweisen Sie, dass in  $\mathbb{Z}$  die Multiplikation distributiv über die Addition ist (siehe Definition 1.1.1), d.h.

$$m \cdot (n + p) = (m \cdot n) + (m \cdot p), \quad \text{für alle } m, n, p \in \mathbb{Z}.$$

- Beweisen Sie, dass  $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$  und dass  $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$ , für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

♠

Wie schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, dass auf  $\mathbb{Z}$  eine totale Ordnung gibt (siehe Definition 1.2.10):

Wir sagen, dass

$$[(m, n)] \leq [(m', n')] \quad \text{wenn } m + n' \leq n + m' \quad \text{für alle } m, n, m', n' \in \mathbb{N}.$$

**Übung 1.5.5**

Warum ist die Ordnung so definiert?

♠

### 1.5.2 Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Die Einführung der Menge von ganzen Zahlen hat es uns ermöglicht, alle Gleichungen vom Typ  $a+x = b$  zu lösen. Für die Gleichungen, die das Produkt betreffen, stehen wir jedoch vor dem gleichen Problem: Wir können nicht alle Gleichungen vom Typ  $a \cdot x = b$  lösen, d.h. wenn  $a$  und  $b$  in  $\mathbb{Z}$  gegeben sind, existiert  $x$  in  $\mathbb{Z}$  nicht immer so, dass  $a \cdot x = b$ . Wie zuvor kann dieses Problem gelöst werden, indem der numerische Satz, mit dem man arbeitet, erweitert wird.

Der Prozess folgt der Idee, die wir zuvor verwendet haben. Wir möchten rationale Zahlen als ‘‘Quotienten’’ von ganzen Zahlen definieren. Wir gehen also von den Paaren von ganzen Zahlen  $(p, q)$  aus, wobei  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} =: \mathbb{Z}_0$ , wobei zu berücksichtigen ist, dass –wenn  $p/q = p'/q'$ – dann das Paar  $(p, q)$  mit  $(p', q')$  identifiziert werden muss. Wir können jedoch nicht  $p/q = p'/q'$  schreiben, da die Division zwischen ganzen Zahlen nicht definiert wurde. Eine äquivalente Bedingung dazu ist jedoch, dass  $p \cdot q' = q \cdot p'$ , eine Bedingung, die jetzt Sinn macht. Also haben wir dies formal getan:

- Wir haben mit der Menge  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$  begonnen
- Wir haben eine Äquivalenzrelation  $\mathcal{R}$  auf  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$  eingeführt, in der

$$(p, q) \approx (p', q') : \iff p \cdot q' = q \cdot p'.$$

#### Definition 1.5.3

Die Menge der rationalen Zahlen ist die Quotientenmenge  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0)/\mathcal{R}$  und wird mit  $\mathbb{Q}$  bezeichnet.

Wir werden die Äquivalenzklasse von  $(p, q)$  mit  $[(p, q)]$  bezeichnen, oder einfacher mit  $\frac{p}{q}$ . Wie zuvor, definieren wir die Operationen der Addition und Multiplikation aus denen von  $\mathbb{Z}$ . Nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} &:= \frac{p \cdot q' + p' \cdot q}{q \cdot q'} \\ \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} &:= \frac{p \cdot p'}{q \cdot q'}\end{aligned}$$

Machen diese Definitionen Sinn?

#### Übung 1.5.6

Beweisen Sie, dass gegeben  $(p_1, q_1) \approx (p_2, q_2)$  und  $(p'_1, q'_1) \approx (p'_2, q'_2)$ , man hat

$$(p_1 q'_1 + p'_1 q_1, q_1 q'_1) \approx (p_2 q'_2 + p'_2 q_2, q_2 q'_2) \quad \text{und} \quad (p_1 p'_1, q_1 q'_1) \approx (p_2 p'_2, q_2 q'_2)$$

Überzeugen Sie sich selbst, dass diese beiden Eigenschaften für die Definition von Addition und Multiplikation auf der Quotientenmenge  $\mathbb{Q}$  notwendig sind. ♠

Um zu sehen, dass  $\mathbb{Q}$  eine Erweiterung von  $\mathbb{Z}$  ist, müssen wir eine injektive Funktion<sup>14</sup>  $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  finden, die wir als Inklusion von  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Q}$  betrachten werden. Die offensichtlichste Funktion ist  $\iota(n) = [(n, 1)]$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ .

Im Folgenden werden wir durch 0 die rationale Zahl  $[(0, p)]$  bezeichnen (bemerken Sie, dass  $[(0, p)] = [(0, q)]$ , für alle  $p, q \in \mathbb{Z}_0$ ; warum?) und durch 1 die Zahl  $[(1, 1)]$ . Der folgende Satz ist sehr wichtig, um die allgemeine Struktur von  $\mathbb{Q}$  zu erklären.

### Satz 1.5.5

*Es sei  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  die Menge der rationalen Zahlen, mit den Operationen von Addition und Multiplikation. Dann*

- (i)  $(\mathbb{Q}, +)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0;
- (ii)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 1;
- (iii) Die Multiplikation  $\cdot$  ist distributiv über der Addition  $+$ , d.h., dass

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad \text{für alle } a, b, c \in \mathbb{Q}.$$

Das inverse Element von  $a \in \mathbb{Q}$  bezüglich der Addition wird durch  $-a$  bezeichnet, und das inverse von  $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  bezüglich der Multiplikation durch  $a^{-1}$ .

### Übung 1.5.7

Beweisen Sie Satz 1.5.5. Bemerken Sie, dass diese Eigenschaften aus den ähnlichen Eigenschaften auf  $\mathbb{Z}$  kommen (siehe insbesondere Übung 1.5.4), und aus der Definition der Operationen auf  $\mathbb{Q}$ . ♠

Warum haben wir gesagt, dass “nur”  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  eine Gruppe ist, und nicht  $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ?

### Übung 1.5.8

Welche der folgenden sind Gruppen?

- $(\mathbb{Q}, \cdot)$  (Was ist  $0 \cdot a$ , für ein beliebiges  $a \in \mathbb{Q}$ ?)
- $(\mathbb{Q}, -)$
- $(\mathbb{Q}, :)$
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, :)$

---

<sup>14</sup>Das ist nicht ganz richtig; Es reicht nicht aus, eine injektive Funktion zu finden. Wir müssen eine Funktion finden, die die gerade definierten Additions- und Multiplikationsoperationen “bewahrt”, d.h.: eine  $\iota: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ , mit  $\iota(m) * \iota(n) = \iota(m * n)$ , wobei  $*$  die Addition oder die Multiplikation ist.



Schließlich können wir eine totale Ordnung auf  $\mathbb{Q}$  definieren. Wir sagen, dass

$$[(p, q)] \leq [(p', q')] \quad \text{wenn} \quad (pq' - p'q) \cdot (qq') \leq 0.$$

### Übung 1.5.9

Warum ist die Ordnung so definiert?



## 1.6 Zusätzliche Übungen

### Übung 1.6.1

Verneinen Sie die Aussagen von Beispiel 1.1.1.



### Übung 1.6.2

Verneinen Sie die nachfolgenden Aussagen:

- (a) *Alle Wege führen nach Rom.*
- (b) *Wenn die Katze fort ist, tanzen die Mäuse auf dem Tisch.*
- (c) *In jeder Küche gibt es zerbrochene Töpfe.*
- (d) *Alle denken nur darüber nach, wie man die Menschheit ändern könnte, doch niemand denkt daran, sich selbst zu ändern.*
- (e) *Es gibt mindestens eine gerade Zahl, die größer als 2 ist und sich nicht als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt.*
- (f) *Zu jedem Punkt  $P$  außerhalb einer Geraden  $g$  gibt es höchstens eine Gerade  $h$ , die durch  $P$  geht und zu  $g$  parallel ist.*



### Übung 1.6.3

Wir üben Beweis durch Widerspruch mit den folgenden Rätseln. Auf der Logikinsel gibt es zwei Arten von Menschen, und diese lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

**Ritter:** Sagen immer die Wahrheit.

**Schurken:** Lügen immer.

Jeder der Inselbewohner gehört genau einer dieser Gruppen an. Wenn man nun herausfinden möchte, welchem Typ ein Inselbewohner angehört, so stößt man auf **Logikrätsel**.

- (a) Wir sind nun auf der Logikinsel zu Besuch und treffen zwei Inselbewohner  $A$  und  $B$ .

$A$  sagt: “*Wir gehören dem gleichen Typ an*”.

$B$  sagt: “*A ist ein Schurke*”.

Beweisen Sie durch Widerspruch, dass  $B$  ein Ritter ist.

- (b) Im nächsten Szenario treffen wir nun drei Inselbewohner  $A, B$  und  $C$ .

$A$  sagt: “*B und C sind Schurken.*”.

$B$  sagt: “*A ist ein Schurke*”.

$C$  sagt: “*A ist ein Schurke oder B ist ein Schurke*”.

Beweisen Sie durch Widerspruch, dass  $C$  ein Ritter ist.



#### Übung 1.6.4

Es seien  $X$  und  $Y$  Mengen und  $A, B \subseteq X$  und  $C, D \subseteq Y$  Teilmengen von  $X$  bzw.  $Y$ . Desweitern sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches die Aussage widerlegt.

- (a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (b)  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- (c)  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
- (d)  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

Hier bezeichnet z.B.  $f^{-1}(C)$  das Urbild von  $C$  unter der Abbildung  $f$ , also

$$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}.$$

Überprüfen Sie ob die falschen Aussagen zu richtigen werden, wenn die Mengengleichheit durch die Mengeninklusion  $\subseteq$  oder  $\supseteq$  ersetzt wird.



#### Übung 1.6.5

Es seien  $X$  und  $Y$  Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen  $A \subseteq X$  gilt:

$$f^{-1}(f(A)) \supseteq A,$$

und dass  $f$  injektiv ist genau dann, wenn  $f^{-1}(f(A)) = A$ .

(b) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen  $B \subseteq Y$  gilt:

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B,$$

und dass  $f$  surjektiv ist genau dann, wenn  $f(f^{-1}(B)) = B$ .



### Übung 1.6.6

Gegeben sei eine Menge  $X$  und eine Teilmenge  $A \subseteq X$ . Die Abbildung  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  definiert durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

heißt dann die *charakteristische Funktion* oder *Indikatorkfunktion* der Menge  $A$ .

Es seien Teilmengen  $A, B \subseteq X$  gegeben. Zeigen Sie, dass für die Schnittmenge

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$$

gilt und für die Vereinigungsmenge

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$$

gilt.

Wie schreibt man die charakteristische Funktion  $\chi_{A \Delta B}$  der symmetrischen Differenz  $A \Delta B$  in Abhängigkeit von den charakteristischen Funktionen  $\chi_A$  und  $\chi_B$ ?



### Übung 1.6.7 (a)

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt.

*Bemerkung:* Die Induktion hilft uns nicht die obige Formel zu finden. Wir können nur beweisen, dass die Formel für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

In den folgenden Aufgaben beschreiben wir einen Ansatz, um die Formel aus der sogenannten Teleskopsumme abzuleiten.

- (b) Gegeben sei eine endliche Folge  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ , wir definieren ihre *Teleskopsumme* durch

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}).$$

Beweisen Sei durch Induktion, dass

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

gilt.

- (c) Sei  $a_k = k^3$ . Beweisen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1) = n^3$$

gilt, und schließen Sie daraus, dass

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt.



### Übung 1.6.8

Seien  $x_1, \dots, x_n$  positive reelle Zahlen,  $n \geq 2$ , so dass  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$  gilt. Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzip, dass

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$$

gilt. Außerdem  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$  gilt genau dann, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$  gilt.



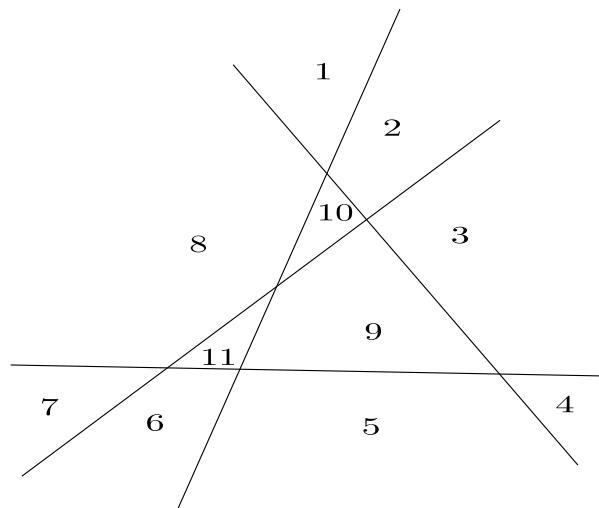
### Übung 1.6.9

Es seien  $n$  Geraden in  $\mathbb{R}^2$  gegeben, so dass je zwei dieser Geraden nicht parallel sind und so dass es keinen Punkt in  $\mathbb{R}^2$  gibt, der auf mehr als zwei dieser Geraden liegt. Diese Geraden teilen  $\mathbb{R}^2$  in verschiedene Teile (siehe Abbildung ??).

Es sei  $p(n)$  die Anzahl dieser Teile. Zeigen Sie, dass

- $p(n+1) = p(n) + (n+1)$ ,
- $p(n) = \frac{(n^2 + n + 2)}{2}$

gilt.

Figure 1.6.1: Vier Geraden teilen  $\mathbb{R}^2$  in elf Teile.**Übung 1.6.10**

Wir “beweisen” durch Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen  $n$  die Gleichheit

$$2 \cdot n = 0 \quad (*)$$

gilt.

- **Induktionsanfang:** Wenn  $n = 0$ , gilt die Gleichheit  $(*)$ , denn  $2 \cdot 0 = 0$ .
- **Induktionsschritt :** Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Nehmen Sie an, dass für jede natürliche Zahlen  $0 \leq k \leq n$  die Gleichheit

$$2 \cdot k = 0$$

gilt. Seien  $i$  and  $j$  natürliche Zahlen mit  $0 \leq i, j \leq n$ , so dass

$$i + j = n + 1$$

gilt. Dann folgt aus der Induktionshypothese, dass

$$2 \cdot (n + 1) = 2 \cdot (i + j) = 2 \cdot i + 2 \cdot j = 0 + 0 = 0$$

gilt. Damit gilt die Gleichung  $(*)$  auch für  $n + 1$ .

**Abschluss:** Aufgrund des starken Induktionsprinzip gilt

$$2 \cdot n = 0$$

für alle natürlichen Zahlen  $n$ . Wo liegt der Trugschluss?





---

---

## KAPITEL 2

---

DIE REELLEN ZAHLEN

## 2.1 Das abstrakte Konzept von angeordnetem Körper

Wir beginnen dieses Kapitel mit einem Konzept, das an sich schon sehr ausgereift ist und zu dem wir eigentlich schon langsam gekommen sind. Beginnen wir mit der folgenden

### Definition 2.1.1

Es sei  $K$  eine Menge mit mindestens zwei Elementen, zusammen mit den (zweistelligen) Verknüpfungen  $+$  (die *Addition* genannt wird) und  $\cdot$  (die *Multiplikation* genannt wird). Dann ist das Tripel  $(K, +, \cdot)$  ein **Körper**, falls

- (i)  $(K, +)$  eine kommutative Gruppe ist (mit neutralem Element 0).
- (ii)  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  eine kommutative Gruppe ist (mit neutralem Element 1).
- (iii) Die Multiplikation distributiv über der Addition ist, d.h.

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \quad \text{für alle } x, y, z \in K.$$

In der obigen Definition benötigen wir, dass  $|K| \geq 2$ , weil wir wollen, dass  $K \setminus \{0\}$  keine leere Menge ist.

Zusätzlich für alle  $x \in K$  bezeichnen wir mit  $-x$  das inverse Element von  $x$  bezüglich der Addition, und für alle  $x \in K \setminus \{0\}$  mit  $x^{-1}$  das inverse Element bezüglich der Multiplikation.

Wir bemerken dazu, dass die Assoziativität der Addition und Multiplikation uns erlaubt, die Summe und das Produkt von endlichen vielen Elementen zu definieren, und sie werden einfach mit  $x_1 + \dots + x_k$  und  $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$  bezeichnet (also, ohne Klammern). Dazu definieren wir

$$x^{-n} := (x^{-1})^n \quad \text{für alle } x \in K \setminus \{0\} \text{ und } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Bemerken Sie, dass Folgendes gilt:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \quad \text{und} \quad (x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n, \quad \text{für alle } x, y \in K \setminus \{0\} \text{ und } m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad m \neq n.$$

Wir definieren dann  $x^0$  als 1, für alles  $x \in K$  was mit den vorherigen Gleichheiten konsistent ist (warum?).

### Beispiel 2.1.1

- Satz 1.5.5 sagt uns, dass  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ein Körper ist.
- Wir wissen, dass  $(\mathbb{Z}, +)$  eine Gruppe ist (Lemma 1.5.1), dass die Multiplikation ein neutrales Element 1 hat, und dass die Multiplikation über der Addition

distributiv ist (Übung 1.5.4). Ist dann  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$  eine Gruppe? Nein! Das ist genau der Grund, warum wir  $\mathbb{Q}$  eingeführt haben. Bemerken Sie, dass die einzigen Elemente in  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , die invertierbar sind (d.h., die ein inverses Element besitzen), 1 und  $-1$  sind.



### Vertiefungen 2.1.1

Können wir sagen, dass  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$  die Grothendieck-Gruppe von  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist? (Siehe Vertiefungen 1.5.1).  $\diamond$

### Übung 2.1.1

Zu Beginn von Abschnitt 1.2.2 haben wir eine Menge mit zwei Elementen gegeben,  $\mathbb{Z}_2 = \{G, U\}$  und Sie sollten schon bewiesen haben, dass  $(\mathbb{Z}_2, +)$  eine Gruppe ist (Übung 1.5.2). Können Sie eine Multiplikation auf  $\mathbb{Z}_2$  definieren, damit  $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$  ein Körper ist?<sup>1</sup> Überzeugen Sie sich selbst, dass es sinnvoll ist, das Element  $G$  mit 0 und das Element  $U$  mit 1 zu bezeichnen.



Es ist zu beachten, dass hier die Menge  $K$  möglicherweise keine Menge von Zahlen (wie  $\mathbb{Q}$ ) sein könnte und daher die Operationen “Addition” und “Multiplikation” möglicherweise nicht mit der Addition und Multiplikation von Zahlen zusammenhängen. Es ist nur eine Notation.

Das folgende Lemma erklärt den Grund, warum wir  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  als Gruppe, und nicht  $(K, \cdot)$ , benötigen.

### Lemma 2.1.1

*Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein Körper. Dann ist  $0 \cdot x = 0$  für alle  $x \in K$ .*

Beachten Sie, dass diese Eigenschaft direkt aus den Axiomen des Körpers und nicht aus der “Intuition” über die uns bekannten Berechnungsregeln folgen muss. Wir werden viele weitere Beispiele für dieses Phänomen sehen (ob es Ihnen gefällt oder nicht ...)

*Beweis:* Da die Multiplikation eine Verknüpfung auf  $K$  ist, es muss ein  $y \in K$  existieren, sodass  $0 \cdot x = y$ . Wir müssen beweisen, dass  $y = 0$ , das neutrale Element der Addition. Wir bemerken, dass

$$y = 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = (0 \cdot x) + (0 \cdot x) = y + y$$

wobei die zweite Gleichung aus der Tatsache folgt, dass 0 das neutrale Element von  $+$  ist und die dritte aus Distributivität. Dann haben wir ein Element  $y$  gefunden, für das  $y = y + y$ . Wir beweisen, dass in einer (nicht unbedingt kommutativen)

---

<sup>1</sup>Die Antwort muss “Ja” sein, also müssen Sie die richtige Multiplikation finden, damit  $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$  ein Körper ist.

Gruppe  $(K, +)$  ein solches Element das neutrale Element 0 sein muss. In der Tat, hat  $y$  ein inverses Element  $-y$ , und deshalb

$$y = y + y \iff (-y) + y = (-y) + y + y \iff 0 = y.$$

(Warum gelten die obigen Äquivalenzen “ $\iff$ ”?) □

Es sollte jetzt klar sein, dass 0 kein inverses Element bezüglich der Multiplikation haben kann, da es kein  $x \in K$  geben kann, mit  $0 \cdot x = 1$ .

### Bemerkung 2.1.1

Bemerken Sie, dass, da  $(K, +)$  und  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  (kommutative) Gruppen sind, wir erhalten für jede solche Gruppe alle Eigenschaften in Lemma 1.5.3 und Lemma 1.5.4. ◊

### Übung 2.1.2

Es seien  $a, b, c \in K$ , Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$a * x + b = c ?$$

Wenn es Lösungen gibt, finden Sie alle. ♠

Für die Eigenschaften eines Körpers, die sowohl Addition als auch Multiplikation verwenden, haben wir neben Lemma 2.1.1 auch

### Lemma 2.1.2

*Es sei  $(K, +, *)$  ein Körper. Dann für jede  $a, b \in K$*

1. *Er ist nullteilerfrei, d.h.:  $a * b = 0 \iff a = 0$  oder  $b = 0$ .*
2.  *$a * (-b) = -(a * b) = (-a) * b =: -a * b$ .*

*Beweis:* 1. Falls man eine Äquivalenz “ $\iff$ ” beweisen muss, müssen wir die zwei Implikationen, “ $\Rightarrow$ ” und “ $\Leftarrow$ ”, beweisen.

Wir beginnen mit “ $\Leftarrow$ ”: wir nehmen an, dass  $a$  oder  $b$  gleich 0 sind. Dann Lemma 2.1.1 impliziert, dass  $a * b = 0$ .

Umgekehrt (wir beweisen jetzt “ $\Rightarrow$ ”), angenommen, dass  $a * b = 0$ , wir müssen beweisen, dass  $a = 0$  oder  $b = 0$ . Falls  $a = 0$  gilt die Behauptung. Also, können wir annehmen, dass  $a \neq 0$ . Da  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  eine Gruppe ist, besitzt  $a$  ein inverses Element bezüglich der Multiplikation,  $a^{-1}$ . Dann, aus  $a * b = 0$  erhalten wir (nämlich, wir multiplizieren die linke und rechte Seite durch  $a^{-1}$ )  $a^{-1} * a * b = a^{-1} * 0 = 0$ , wobei die letzte Gleichung aus Lemma 2.1.1 folgt. Aber die linke Seite ist genau  $b$  (warum?).

2. Wir beginnen zu beweisen, dass  $a * (-b) = -(a * b)$ , d.h., dass  $a * (-b)$  das inverse Element von  $a * b$  bezüglich der Addition ist. Durch Distributivität und Lemma 2.1.1 erhalten wir, dass

$$a * (-b) + a * b = a * (-b + b) = a * 0 = 0,$$

und Lemma 1.5.3 impliziert, dass  $-(a * b) = a * (-b)$  (warum? Welche Gruppe benutzen wir hier?  $(K, +)$  oder  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ?). In ganz analoger Weise wird gezeigt, dass  $(-a) * b = -(a * b)$  (Tatsächlich wird diese Gleichheit fast sofort von der vorherigen erhalten, warum?). Bemerken Sie, dass die letzte Gleichheit  $(-a) * b =: -a * b$  keine echte Gleichheit ist: das Symbol  $=:$  bedeutet, dass die rechte Seite (die noch nicht definiert wurde) ist per definitionem die linke Seite (also  $(-a) * b$  oder  $-(a * b)$  oder  $a * (-b)$ , die gleich sind.)

□

Jetzt führen wir das Konzept von “verträglicher” totaler Ordnung auf  $(K, +, \cdot)$  ein, d.h., eine totale Ordnung auf  $K$  die “verträglich” mit den Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  ist:

### Definition 2.1.2

Es sei  $\leq$  eine totale Ordnung auf einem Körper  $(K, +, \cdot)$ , und  $<$  die induzierte Ordnung:

$$a < b : \iff a \leq b \wedge a \neq b.$$

Dann ist  $<$  verträglich mit  $+$  und  $\cdot$ , falls für jedes  $a, b, c \in K$  gilt:

- (i)  $a < b \implies a + c < b + c$
- (ii) Für  $c > 0$ ,  $a < b \implies a \cdot c < b \cdot c$

Ein angeordneter Körper ist ein Körper  $(K, +, \cdot)$  zusammen mit einer totalen verträglichen Ordnung  $\leq$ , und heißt **angeordneter Körper**.

### Beispiel 2.1.2

Es ist eine gute, aber lange und langweilige Übung zu beweisen, dass der Körper  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  mit der Ordnung  $\leq$ , die am Ende des Abschnittes 1.5.2 definiert wurde, ein angeordneter Körper ist. Sie müssen diese Tatsache nicht genau beweisen. Machen Sie einfach nur eine Liste der Tatsachen, die bewiesen werden sollten (Sie sollten eigentlich von der Menge der natürlichen Zahlen mit den in Abschnitt 1.3.2 angegebenen Operationen und Ordnung ausgehen, und beweisen, dass diese Ordnung verträglich mit den Operationen auf  $\mathbb{N}$  ist. Dann...?).

♣

### Fragen 2.1.1

In Übung 2.1.1 sollten Sie schon bewiesen haben, dass  $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$  eine Körperstruktur besitzt. Kann es ein angeordneter Körper sein? Nämlich, kann man eine Ordnung

auf  $\mathbb{Z}_2$  finden, sodass die Ordnung verträglich mit  $+$  und  $\cdot$  ist? (Der Körper  $\mathbb{Z}_2$  hat nur zwei Elemente; also haben Sie nicht zu viele Möglichkeiten, eine Ordnung zu definieren!)  $\heartsuit$

Die folgenden Eigenschaften folgen aus (i) und (ii) in obiger Definition:

**Lemma 2.1.3**

Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein angeordneter Körper. Dann gelten, für beliebige  $a, b, c \in K$ :

1.  $a > 0 \iff -a < 0$
2.  $a > b \iff a - b > 0 \iff -b > -a$
3. Falls  $a > 0$  und  $b > 0$ , dann sind  $a + b > 0$  und  $a \cdot b > 0$
4. Falls  $a > b$  und  $c > d$ , dann ist  $a + c > b + d$
5. Falls  $a > b > 0$  und  $c > d > 0$ , dann ist  $a \cdot c > b \cdot d$
6. Falls  $a < b$  und  $c < 0$ , dann ist  $a \cdot c > b \cdot c$
7. Falls  $a \neq 0$ , dann ist  $a^2 > 0$ . Insbesondere ist  $1 > 0$
8. Die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat keine Lösung in  $K$
9.  $a > 0 \implies a^{-1} > 0$
10. Falls  $a > b > 0$ , dann ist  $b^{-1} > a^{-1}$

Abgesehen von den Ungleichungen in 7., 8., 9. und 10., halten die anderen auch mit  $\geq$ .

Beachten Sie, dass wir zum Beweis der aufgelisteten Eigenschaften nicht auf die ‘‘Intuition’’ zurückgreifen können, die sich aus den Jahren ergibt, in denen algebraische Berechnungen mit diesen Eigenschaften durchgeführt wurden. Wir dürfen sie nur aus (i) und (ii) in Definition 2.1.2 ableiten.

Beweis: 1.  $a > 0 \stackrel{(i)}{\iff} a - a > 0 + (-a) \iff 0 > -a$   
 2.  $a > b \stackrel{(i)}{\iff} a + (-b) > b + (-b) \iff a - b > 0 \stackrel{(i)}{\iff} -a + a - b > -a + 0 \iff -b > -a$

3. Übung für Sie.
4. Übung für Sie.
5. Übung für Sie.

6.  $c < 0 \xrightarrow{(i)} -c > 0$ , und  $a < b \xrightarrow{(ii)} a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$ . Lemma 2.1.2 (b) gibt uns, dass  $a \cdot (-c) = -(a \cdot c)$ , und  $b \cdot (-c) = -(b \cdot c)$ . Also, wir haben erhalten, dass  $-(a \cdot c) < -(b \cdot c)$ , und wir schließen, dass  $-(a \cdot c) < -(b \cdot c) \xrightarrow{2.} a \cdot c > b \cdot c$  (hier haben wir auch benutzt, dass  $-(-(a \cdot c)) = a \cdot c$  und  $-(-(b \cdot c)) = b \cdot c$ ; warum gelten sie?).

7. Übung für Sie.

8. Übung für Sie.

9. Angenommen, dass  $a > 0$ . Also, insbesondere,  $a \neq 0$  und  $a^{-1} \neq 0$ . Dann  $a^{-1} \neq 0 \xrightarrow{7.} (a^{-1})^2 > 0$ , und  $a > 0 \xrightarrow{(ii)} (a^{-1})^2 \cdot a > (a^{-1})^2 \cdot 0$ . Aber ist die letzte Ungleichheit genau  $a^{-1} > 0$  (warum?).

10. Übung für Sie.

□

#### Satz 2.1.4

**(Bernoullische Ungleichung)** Es sei  $(K, +, \cdot)$  ein angeordneter Körper und  $n$  eine natürliche Zahl. Dann gilt für jedes  $x \in K$  mit  $1+x \geq 0$  die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x .$$

*Beweis:* Wir beweisen die Ungleichung durch Induktion. Es sei  $P(n)$  das Prädikat  $"(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x"$ . Wir müssen beweisen, dass  $P(n)$  wahr ist, für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n = 0$  müssen wir nachprüfen, dass  $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$  (Induktionsanfang), das äquivalent zu  $1 \geq 1$  ist. Also ist  $P(0)$  wahr.

Angenommen  $P(n)$  ist wahr (Induktionshypothese, kursum "IH"). Wir müssen beweisen, dass  $P(n+1)$  gilt, also dass  $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$ . Dann

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \stackrel{\text{HI und } 1+x \geq 0}{\geq} (1+n \cdot x) \cdot (1+x) = 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 .$$

Jetzt beweisen wir, dass  $1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 \geq 1 + (n+1)x$ . Diese Ungleichung folgt aus Lemma 2.1.3. Eigentlich, aus Lemma 2.1.3 7., folgt, dass  $x^2 \geq 0$  für alle  $x \in K$ . Aus 3.,  $x^2 \geq 0 \implies n \cdot x^2 \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und endlich 4. impliziert, dass  $1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 \geq 1 + (n+1)x$ . Dann, durch Transitivität der Ordnung  $\geq$ , erhalten wir, dass  $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$  gilt, und wir können den Beweis schließen. □

**Vorlesung 5 -****Das Archimedische Axiom****Definition 2.1.3**

Ein angeordneter Körper  $K$  erfüllt das **Archimedische Axiom**, falls zu je zwei positiven Elementen  $a, b$ , eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $n \cdot a > b$ .

Dieses Axiom ist unabhängig von den Axiomen, die einen angeordneten Körper definieren, d.h. dass es angeordnete Körper gibt, die das Archimedische Axiom nicht erfüllen.

Die Folgerungen dieses Axioms sind die folgenden:

**Lemma 2.1.5**

*Falls ein angeordneter Körper  $K$  das Archimedische Axiom erfüllt, dann*

1. *Für alle  $\epsilon > 0$ , existiert  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{1}{n} < \epsilon$ ;*
2. *Es seien  $a, b \in K$ ,  $a > 1$ . Dann existiert ein  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $a^n > b$ ;*
3. *Es seien  $\epsilon, a \in K$ ,  $0 < a < 1$  und  $\epsilon > 0$ . Dann existiert  $n \in \mathbb{N}$  mit  $a^n < \epsilon$ .*

*Beweis:* Der Beweis hier unten ist nicht komplett: Sie müssen Lemma 2.1.3 benutzen, um alle Ungleichungen und Implikationen (“dann”, “da”,...) zu begründen.

1. Da  $K$  das Archimedische Axiom erfüllt, existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > \frac{1}{\epsilon}$  (hier  $a = 1$  und  $b = \frac{1}{\epsilon}$ ), und die Behauptung folgt aus Lemma 2.1.3.
2. Es sei  $x := a - 1 > 0$ . Dann impliziert das Archimedische Axiom, dass  $\exists n \in \mathbb{N}$  mit  $nx > b$ . Satz 2.1.4 gibt uns, dass  $a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > 1 + b > b$ .
3. Wir bemerken, dass  $\frac{1}{a} > 1$ ; dann impliziert die vorherige Ungleichung dieses Lemmas, dass  $(\frac{1}{a})^n > \frac{1}{\epsilon} > 0$ , also  $a^n > \epsilon$ .

□

### Der Absolutbetrag oder Betragsfunktion

Gegeben  $a \in K$ , setzen wir

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Dann ist  $|\cdot|$  eine Funktion, deren Zielmenge die nicht-negativen Elemente  $K_{\geq 0}$  von  $K$  sind.

#### Übung 2.1.3

Beweisen Sie, dass

- (i)  $|a| = |-a|$ , für alle  $a \in K$ ;
- (ii)  $|c| \leq d \iff (c \leq d \text{ und } -c \leq d)$ .



Das folgende Lemma ist auch wichtig.

#### Lemma 2.1.6

Für alle  $a, b \in K$  gilt:

- 1.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ ;
- 2. (**Dreiecksungleichung**):  $|a + b| \leq |a| + |b|$ ;
- 3.  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ .

*Beweis:* 1. Übung für Sie.

- 2. Wir bemerken, dass  $a \leq |a|$  und  $-a \leq |a|$ ; wir schreiben  $\pm a \leq |a|$ . Analog für  $b$  gilt  $\pm b \leq |b|$ . Dann impliziert Lemma 2.1.3, dass  $a + b \leq |a| + |b|$ , und  $-(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$ . Die letzten zwei Ungleichungen implizieren, dass  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (siehe Übung 2.1.3(ii)).
- 3. Wir schreiben  $a$  als  $a - b + b$ . Dann impliziert die Ungleichung 2. dieses Lemmas, dass  $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ , also  $|a| - |b| \leq |a - b|$  (i). Analog erhalten wir  $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$  (ii). Die Ungleichungen (i) und (ii) implizieren, dass  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  (siehe Übung 2.1.3(ii)).



### 2.1.1 Die Ordnungsvollständigkeit

Wie bereits erwähnt (siehe Beispiel 2.1.2), sind die rationalen Zahlen, mit den Additions- und Multiplikationsoperationen, ein Beispiel für einen geordneten Körper. Diese numerische Menge erfüllt jedoch keine grundlegende Eigenschaft, die sie wesentlich von reellen Zahlen (die wir in Kürze einführen werden) unterscheidet: die Vollständigkeitseigenschaft. Um diese Eigenschaft besser zu verstehen, beginnen wir mit dem folgenden wichtigen Beispiel:

#### Lemma 2.1.7

*Es gibt keine rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$ , sodass  $x^2 = 2$*

*Beweis:* Wir werden dieses Lemma durch Widerspruch beweisen. Angenommen, es gibt eine rationale Zahl  $x = [(p, q)] = \frac{p}{q}$  mit  $x^2 = 2$ ; dann erfüllen die ganzen Zahlen  $p$  und  $q$  Folgendes:

$$[(p, q)]^2 = [(p^2, q^2)] = [(2, 1)] \quad \text{und deshalb} \quad p^2 = 2q^2.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (OBdA) können wir annehmen, dass  $p$  und  $q$  teilerfremd sind. (In der Tat, wenn sie nicht teilerfremd sind, dann  $\exists n \in \mathbb{Z}$ , sodass  $p = n \cdot p'$  und  $q = n \cdot q'$ , wobei  $p'$  und  $q'$  teilerfremd sind. Dann ist es leicht nachzuprüfen, dass  $[(p, q)] = [(p', q')]$ .)

Aus  $p^2 = 2q^2$  folgt, dass  $p^2$  eine gerade Zahl ist. Dann ist die Frage: ist  $p$  selbst gerade? Die Antwort ist „Ja“, da wenn  $p$  nicht gerade wäre,  $p = (2k + 1)$ , dann wäre auch  $p^2$  ungerade (weil  $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ). Es sei  $k \in \mathbb{Z}$ , sodass  $p = 2k$ . Dann  $p^2 = 2q^2 \iff 4k^2 = 2q^2 \iff q^2 = 2k^2$ . Da  $q^2$  gerade ist, lässt uns dieselbe Argumentation wie oben schließen, dass  $q$  gerade ist. Aber das ist ein Widerspruch, da wir angenommen haben, dass  $p$  und  $q$  teilerfremd sind (und wir haben bewiesen, dass  $p^2 = 2q^2$  impliziert, dass sie beide gerade sind).  $\square$

Wenn wir also auf einer Geraden mit Ursprung  $O$  alle Punkte darstellen würden, deren Abstand von  $O$  rational ist, gäbe es immer noch viele „Löcher“, wie das durch  $\sqrt{2}$  dargestellte „Loch“. Um eine Eigenschaft zu veranschaulichen, die rationale Zahlen nicht erfüllen und die eng mit der Existenz der oben erwähnten Löcher zusammenhängt, müssen wir das Konzept von *Supremum* und *Infimum* einführen.

Wir möchten uns daran erinnern (siehe Definition 1.2.11), dass gegeben eine Menge  $X$  mit einer Ordnung  $\preceq$ , und eine Teilmenge  $S \subseteq X$  mit induzierter Ordnung, ein Element  $x \in X$  **obere (bzw. untere) Schranke** von  $S$  heißt, falls

$$y \preceq x \quad \text{für alle } y \in S \quad (\text{bzw. } x \preceq y \quad \text{für alle } y \in S).$$

Falls eine obere (bzw. untere) Schranke existiert, dann sagen wir, dass  $S$  nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist.

Darüber hinaus (siehe Definition 1.2.12), ist ein **Maximum** (bzw. **Minimum**) eine obere (bzw. untere) Schranke, die der Teilmenge  $S$  gehört. Wenn es existiert, schreiben wir  $s = \max S$  (bzw.  $s = \min S$ ).

**Beispiel 2.1.3**

Gegeben  $S_1 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$ , dann ist  $S_1$  nach oben beschränkt, aber besitzt  $S_1$  kein Maximum (es sollte 2 sein, aber  $2 \notin S_1$ ). Darüber hinaus, ist die Menge  $O$  aller oberen Schranken gegeben durch  $\{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq 2\}$ , und wir bemerken, dass  $O$  von unten beschränkt ist und ein Minimum 2 besitzt.

Gegeben  $S_2 := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 2\}$ , dann ist auch  $S_2$  nach oben beschränkt, und die Menge aller oberen Schranken ist gegeben durch  $O$ . Aber  $S_2$  besitzt ein Maximum, das 2 ist, das genau das Minimum von  $O$  ist. ♣

**Übung 2.1.4**

Beweisen Sie, dass die Menge aller oberen Schranken einer nach oben beschränkten Menge, nach unten beschränkt ist. ♠

Dieses Beispiel (und die Übung) schlägt die folgende Frage vor: Stimmt es, dass selbst wenn eine nach oben beschränkte Menge kein Maximum hat (zum Beispiel  $S_1$ ), die Menge ihrer oberen Schranken (die Menge  $O$ ) ein Minimum hat? Die Antwort dieser Frage ist nein, und um besser zu verstehen was passiert, müssen wir das Konzept von Supremum und Infimum einführen.

**Definition 2.1.4**

Es sei  $S \subseteq X$  eine nicht leere Menge, und  $\preceq$  eine Ordnung auf  $X$ . Ein Element  $s \in X$  (wenn existiert) heißt **Supremum** von  $S$ , geschrieben  $s = \sup S$ , falls es das kleinste der oberen Schranken ist, d.h., falls

- (i)  $y \preceq s$  für alle  $y \in S$  ( $s$  ist eine obere Schranke);
- (ii) Falls  $s' \prec s$ , dann ist  $s'$  keine obere Schranke ( $s$  ist das kleinste der oberen Schranken).

Mit anderen Worten: Für alle  $s' \prec s$ , es existiert  $y \in S$ , mit  $s' \prec y$  ( $s'$  ist keine obere Schranke).

Ganz analog, ein **Infimum** von  $S$ , geschrieben  $s = \inf S$ , ist (wenn existiert) die größte untere Schranke von  $S$ .

**Beispiel 2.1.4**

Es sei  $(a, b)_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}$ , und  $(a, b]_{\mathbb{Q}} := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x \leq b\}$ , wobei  $a, b \in \mathbb{Q}$  und  $a < b$ . Dann  $\sup(a, b)_{\mathbb{Q}} = b$ , aber  $\max(a, b)_{\mathbb{Q}}$  existiert nicht, und  $\sup(a, b]_{\mathbb{Q}} = \max(a, b]_{\mathbb{Q}} = b$ . Warum ist das so? ♣

**Übung 2.1.5**

Beweisen Sie, dass falls  $S$  ein Maximum (bzw. Minimum)  $s$  besitzt, dann besitzt  $S$  ein Supremum (bzw. Infimum), und  $s = \sup S$  (bzw.  $s = \inf S$ ). ♠

**Übung 2.1.6**

Beweisen Sie, dass das Supremum (bzw. Infimum), wenn es existiert, eindeutig bestimmt ist. ♠

**Übung 2.1.7**

Beweisen Sie, dass falls  $A$  und  $B$  nicht leere Teilmengen von  $X$  sind, mit  $A \subseteq B$ , und falls sie Suprema und Infima besitzen, dann ist

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$



Nun können wir beweisen, dass –als Folgerung aus Lemma 2.1.7– die Menge  $\mathbb{Q}$  Teilmengen hat, die kein Supremum (oder Infimum) besetzen.

**Lemma 2.1.8**

*Die Teilmenge  $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  von  $\mathbb{Q}$  besitzt kein Supremum.*

*Beweis:* Nehmen wir an, dass  $S$  ein Supremum  $s \in \mathbb{Q}$  besitzt. Wir müssen einen Widerspruch erhalten. Dieses Supremum  $s$  muss erfüllen:  $s^2 = 2$ , oder  $s^2 > 2$  oder  $s^2 < 2$ . Aus Lemma 2.1.7 erhalten wir, dass  $s^2$  nicht gleich 2 sein kann.

- Angenommen, dass  $s^2 > 2$ . Dann können wir  $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$  finden, sodass  $2 < (s - \epsilon)^2 < s^2$  und  $s - \epsilon > 0$  (warum?). Da  $s - \epsilon > 0$  ist, durch Definition 2.1.4 (ii) muss man ein  $x \in S$  finden, sodass  $x^2 > (s - \epsilon)^2$ . Aber wir haben angenommen, dass  $(s - \epsilon)^2 > 2$ , also ist  $x^2 > 2$ , das ein Widerspruch ist, weil  $x \in S$ .
- Angenommen, dass  $s^2 < 2$ . Dann kann man ein  $\epsilon > 0, \epsilon \in \mathbb{Q}$ , finden, sodass  $(s + \epsilon)^2 < 2$  (warum?). Dann wäre  $s + \epsilon \in S$  und  $s < s + \epsilon$ , und dies widerspricht der Tatsache, dass  $s$  das Supremum ist.



Diese Beispiele und Gegenbeispiele führen uns zu der folgenden wichtigen Eigenschaft eines Körpers:

**Definition 2.1.5** • Es sei  $X$  eine nichtleere Menge mit Ordnung  $\preceq$ . Dann ist die Ordnung **ordnungsvollständig**, falls jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum hat. Diese Eigenschaft wird als **Supremumseigenschaft** bekannt.

- Ein angeordneter Körper  $(K, +, \cdot, \preceq)$  heißt **ordnungsvollständig**, falls die Ordnung  $\preceq$  ordnungsvollständig ist.

Lemma 2.1.8 dann impliziert, dass  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$  nicht ordnungsvollständig ist, da die Menge  $S$  nach oben beschränkt ist (warum?), aber besitzt kein Supremum. Da  $\mathbb{Q}$  diese Vollständigkeitseigenschaft nicht hat, möchten wir einen geordneten Körper einführen, der  $\mathbb{Q}$  irgendwie als “Teilkörper” enthält, aber der ordnungsvollständig ist.

Wir stellen zunächst den folgenden Satz auf:

**Satz 2.1.9**

*Es gibt einen ordnungsvollständigen angeordneten Körper, der bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt ist.*

Wir erklären zuerst, was “bis auf Isomorphismen” bedeutet. Wie wir in dieser und vielen anderen Vorlesungen sehr oft sehen werden, ist ein Isomorphismus zwischen zwei Mengen, die eine bestimmte Struktur haben, eine Bijektion, die in gewisser Weise die gegebene Struktur bewahrt. In diesem Fall ist ein Isomorphismus zwischen angeordneten Körpern,  $(K_1, +, \cdot, \preceq)$  und  $(K_2, +, \cdot, \preceq)$ , eine Bijektion zwischen  $K_1$  und  $K_2$ ,  $f: K_1 \rightarrow K_2$ , sodass

- $f(a+b) = f(a)+f(b)$  und  $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ , für alle  $a, b \in K_1$  (Die Bijektion bewahrt die Additions- und Multiplikationsoperationen);
- falls  $a \prec b$ , dann ist  $f(a) \prec f(b)$  (Die Bijektion bewahrt die Ordnung).

Also, bedeutet “bis auf Isomorphismen”, dass falls es zwei ordnungsvollständige angeordnete Körper gibt, man darunter immer einen Isomorphismus wie oben finden kann.

**Definition 2.1.6**

Der (einige) ordnungsvollständige, angeordnete Körper ist der Körper der reellen Zahlen, der mit  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  bezeichnet wird.

Wenn Sie Satz 2.1.9 glauben, ist diese Definition sinnvoll. Aber es kann sicherlich nicht gesagt werden, dass es uns eine Vorstellung davon gibt, was die Menge der reellen Zahlen ist ... Es gibt jedoch mehrere mögliche “Modelle” der reellen Zahlen, d.h. mehrere ordnungsvollständige, angeordnete Körper, die –wegen Satz 2.1.9– alle isomorph sind. (Dies ist ein Zeichen dafür, dass es sich um ein tiefgreifendes und schwieriges Konzept handelt, das von Mathematikern wie Cauchy, Cantor, Dedekind ... von Jahrhundert zu Jahrhundert weiterentwickelt wurde.) Mit dem bisher erworbenen Wissen scheint keiner dieser Wege zufriedenstellend zu sein. Es gibt explizite Modelle, die jedoch das Verständnis tieferer Konzepte erfordern (die wir später sehen werden), wie Cauchy-Folgen (die wir in Zukunft definieren werden) oder Dedekinder Schnitte. Wir führen kurz ein Modell der reellen Zahlen vielleicht weniger elegant, aber konkreter ein: als Dezimalzahlen. Sobald alle Axiome eines ordnungsvollständigen, angeordneten Körpers zumindest teilweise verifiziert wurden, haben wir einen Beweis der Existenz eines solchen Körpers in Satz 2.1.9! Wir beweisen die Eindeutigkeit nicht; aber, angenommen die Eindeutigkeit, sagt uns der obige Satz, dass die Dezimalzahlen ein Modell der reellen Zahlen sind, und dass alle Modelle eigentlich äquivalent wären.

## 2.2 Reelle Zahlen als Dezimalzahlen

Wie bereits erwähnt, enthält dieser Abschnitt nur die Idee, reelle Zahlen als Dezimalzahlen zu erstellen. Die Genauigkeit, die erforderlich ist, um diese Konzepte zu verstehen, erfordert eine bessere Kenntnis einiger Analysekonzepte, die wir langsam sehen werden. Hier werden nur einige Beweise ausführlich erklärt, und sie können immer noch schwierig sein. (Die einfacheren Beweise bleiben als Übung übrig.) Keine Sorge, wir werden später auf diese Konzepte zurückkommen.

Wir beginnen mit einer rationalen Zahl  $[(p, q)] = \frac{p}{q}$ . Nehmen wir an, dass  $p$  und  $q$  dazu positiv sind. Dann können wir ganze Zahlen  $p_0$  und  $r_0$  finden, mit  $p = p_0q + r_0$ , wobei  $0 \leq r_0 < q$  ( $r_0$  ist der Rest der Division durch  $q$ ). Wir können dieses Verfahren fortsetzen und finden  $\alpha_1 \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq r_1 < q$ , sodass  $10r_0 = \alpha_1q + r_1$ ; dann  $\alpha_2 \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq r_2 < q$ , sodass  $10r_1 = \alpha_2q + r_2$ , usw.

### Übung 2.2.1

Prüfen Sie nach, dass  $0 \leq \alpha_i \leq 9$  für alle  $i \geq 1$ .



Dann können wir eine rationale Zahl als Dezimalzahl vorstellen, das heißt, als die Aneinanderreihung:

$$\frac{p}{q} = p_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$$

### Übung 2.2.2

Prüfen Sie nach, dass die so erhaltenen Dezimalzahlen jedoch alle periodisch sind, d.h. es gibt einen “Ziffernblock”, der sich auf unbestimmte Zeit wiederholt. Zum Beispiel,

$$\frac{1}{3} = 0.3333\dots = 0.\overline{3}, \quad \frac{4}{7} = 0.\overline{571428}, \quad \text{usw.}$$



Es kann auch bewiesen werden, dass es keine Periode 9 geben kann. Obwohl mit diesem Verfahren die Dezimalzahlen mit Periode 9 nicht erhalten werden können, könnten sie als formale Summen von Dezimalzahlen erhalten werden. Es ist daher praktisch, eine dezimale Zahl des Typs  $p_0.\alpha_1\dots\alpha_k999$  mit einer des Typs  $p_0.\alpha_1\dots(\alpha_k + 1)$  zu identifizieren.

Wir haben dann eine Funktion von der Menge der positiven rationalen Zahlen bis zu der der positiven periodischen Dezimalzahlen definiert. Sie können diese Definition leicht auf negative rationale Zahlen erweitern (wie?). Umgekehrt ist es möglich, für jede periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl zu definieren.

### Definition 2.2.1

Eine **reelle Zahl** ist eine (nicht unbedingt periodische) Dezimalzahl

$$p_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$$

wobei  $p_0 \in \mathbb{Z}$  und  $\alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  für alle  $i \in \mathbb{N}_{>0}$ . Die Menge der reellen Zahlen wird durch  $\mathbb{R}$  bezeichnet.

Wir identifizieren dazu eine dezimale Zahl des Typs  $p_0.\alpha_1\dots\alpha_k999$  mit einer des Typs  $p_0.\alpha_1\dots(\alpha_k + 1)$ .

Bisher haben wir keine algebraischen Operationen definiert; dazu müssen wir zunächst eine totale Ordnung auf diese Menge einführen.

Es seien  $a = p.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$  und  $b = q.\beta_1\beta_2\beta_3\dots$  zwei reelle Zahlen.

- Natürlich ist  $a = b$  genau dann, wenn  $p = q$  und  $\alpha_i = \beta_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}_{>0}$ .
- Falls  $p, q$  positiv sind, dann ist  $a > b$  genau dann, wenn entweder  $p > q$ , oder es existiert  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ , sodass  $p = q$  und  $\alpha_i = \beta_i$  für alle  $i = 1, \dots, k$  und  $\alpha_{k+1} > \beta_{k+1}$ . Zum Beispiel, ist  $2.34454\dots > 2.34453\dots$
- Falls  $p < 0$  und  $q > 0$ , dann ist  $b > a$ .
- Falls  $p, q$  negativ sind, dann ist  $a > b$  genau dann, wenn  $-b > -a$ .

Es kann bewiesen werden, dass  $\leq$  eine totale Ordnung ist. Es ist also sinnvoll, über die oberen und unteren Schranken, Maximum, Minimum, Supremum und Infimum zu sprechen.

### 2.2.1 Die Operationen auf der Menge der Dezimalzahlen

Bisher haben wir keine algebraische Struktur eingeführt. Tatsächlich liegen die größten Schwierigkeiten in den Definitionen der Operationen und im Beweis der Ordnungsvollständigkeit. Wir möchten daher zumindest diese Beweise erwähnen.

Zuerst definieren wir was eine Folge ist.

#### Definition 2.2.2

Eine **Folge**, die mit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet wird, ist eine Abbildung, deren Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen ist.

Also ist  $a_n$  genau das Bild von  $n \in \mathbb{N}$ .

Im Folgenden werden wir eine Folge mit einem Symbol  $a$  bezeichnen, d.h.,  $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Wir sagen, dass eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **definitiv konstant** ist, falls ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $a_j = a$  für alle  $j \geq N$ .

**Beispiel 2.2.1**

Zum Beispiel, falls die Zielmenge die Menge der natürlichen Zahlen ist, und falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine nach oben beschränkte Folge ist, d.h. dass es ein  $M \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $a_n \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die *monotone steigend ist*, d.h.  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann muss  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definitiv konstant sein. ♣

Nun nehmen wir als Zielmenge die Menge der Dezimalzahlen. Dann ist

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0 \cdot \alpha_{01} \alpha_{02} \alpha_{03} \dots \\ a_1 &= p_1 \cdot \alpha_{11} \alpha_{12} \alpha_{13} \dots \\ a_2 &= p_2 \cdot \alpha_{21} \alpha_{22} \alpha_{23} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

eine Folge. Wir bemerken, dass eine solche Folge zu den Folgen, aus denen die obigen Spalten bestehen, führt, d.h. zu den Folgen  $s_0 := (p_0, p_1, p_2, \dots)$  (Spalte 0),  $s_1 := (\alpha_{01}, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots)$  (Spalte 1),  $\dots$ , und im Allgemeinen  $s_k := (\alpha_{0k}, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots) = (a_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $k \geq 1$  (Spalte  $k$ ).

**Definition 2.2.3**

Wir sagen, dass die Folge der Dezimalzahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **stabilisiert** ist, falls alle Folgen  $s_0, s_1, s_2, \dots$  der Spalten definitiv konstant sind, d.h.:

- es gibt ein  $N_0 \in \mathbb{N}$  und  $p \in \mathbb{Z}$ , sodass  $p_j = p$  für alle  $j \geq N_0$ , und
- für jedes  $k \geq 1$ , es gibt  $N_k$  (die Notation  $N_k$  heißt, dass  $N$  von  $k$  abhängt) und  $\beta_k$ , sodass  $\alpha_{jk} = \beta_k$  für alle  $j \geq N_k$ .

In diesem Fall, definieren wir die Dezimalzahl  $a := p.\beta_1\beta_2\beta_3\dots$ , und schreiben

$$a_n \rightrightarrows a$$

Also sieht eine stabilisierte Folge so aus:

$$\begin{aligned} a_0 &= p_0 \cdot \alpha_{01} \alpha_{02} \dots \\ a_1 &= p_1 \cdot \alpha_{11} \alpha_{12} \dots \\ a_2 &= p_2 \cdot \alpha_{21} \beta_2 \dots \\ a_3 &= p \cdot \alpha_{31} \beta_2 \dots \\ a_4 &= p \cdot \beta_1 \beta_2 \dots \\ a_5 &= p \cdot \beta_1 \beta_2 \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das folgende Lemma ist von grundlegender Bedeutung und wird, wenn auch etwas anders, in zukünftigen Lektionen erneut diskutiert werden.

**Lemma 2.2.1**

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von nicht-negativen Dezimalzahlen, die

- nach oben beschränkt ist, d.h., es ein  $M \in \mathbb{Z}$  gibt, sodass  $a_n \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und
- monoton steigend ist, d.h.,  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  stabilisiert, d.h., es gibt eine Dezimalzahl  $a$ , sodass  $a_n \rightrightarrows a$ . Dazu gilt  $a_n \leq a \leq M$ .

*Beweis:* Wir werden nur die Idee des Beweises geben, dass  $(a_n)$  stabilisiert ist. Wir beginnen mit der Folge der ersten Spalte,  $s_0 := (p_0, p_1, p_2, \dots)$ . Da diese Folge aus ganzen Zahlen besteht, da sie nach oben beschränkt sind (weil  $a_n \leq M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ) und da  $s_0$  monoton steigend ist, dann muss  $s_0$  definitiv konstant sein (siehe Beispiel 2.2.1). Es sei  $p$  diese Konstante und  $N_0$  die Zahl, sodass  $p_j = p$  für alle  $j \geq N_0$ . Jetzt bemerken wir, dass die Folge  $s_1 := (\alpha_{01}, \alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots)$  der ersten Spalte nicht unbedingt monoton steigend ist (z.B. ist  $1.9 < 2.1 < 2.2 < \dots$ ). Aber, da für alle  $n \geq N_0$ , die Spalte  $s_0 = (p_n)$  konstant ist, impliziert die Ordnung auf den Dezimalzahlen, dass  $s_1$  “definitiv monoton steigend ist”, d.h.,  $\alpha_{n1} \leq \alpha_{n+11}$  für alle  $n \geq N_0$ . Aber  $\alpha_{jk} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  für alle  $j, k \in \mathbb{N}$ . Also, da  $s_1$  definitiv monoton steigend ist, müssen wir haben, dass  $s_1$  definitiv konstant ist. Es sei  $\beta_1$  diese Konstante, und  $N_1$  die Zahl, sodass  $\alpha_{n1} = \beta_1$  für alle  $n \geq N_1$ .

Dann können wir die Argumentation für die Folge  $s_1$  wiederholen, und schließen, dass  $s_2$  definitiv monoton steigend ist (nämlich, monoton steigend für alle  $n \geq N_1$ ), und deshalb definitiv konstant; es sei  $\beta_2$  diese Konstante.

Das Wiederholen dieser Argumentation (oder genauer gesagt, Induktion sollte verwendet werden) beweist, dass es für alle  $j$  ein  $\beta_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  gibt, sodass  $s_j$  definitiv konstant ist, und die Konstante genau  $\beta_j$  ist. Dann haben wir bewiesen, dass  $a_n \rightrightarrows a := p.\beta_1\beta_2\beta_3\dots$  □

Mit der Hilfe dieses Lemmas können wir nun die Addition und Multiplikation auf der Menge der Dezimalzahlen einführen.

Wir beginnen mit nicht-negativen Dezimalzahlen Zahlen  $a = p.\alpha_1\alpha_2\dots$  und  $b = q.\beta_1\beta_2\dots$ . Aus diesen zwei Dezimalzahlen bilden wir zwei Folgen:

$$a^{(n)} := p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n00\dots \quad \text{und} \quad b^{(n)} := q.\beta_1\beta_2\dots\beta_n00\dots$$

Wir bemerken, dass  $a^{(n)}$  und  $b^{(n)}$  rationale Zahlen sind, und dass die Folgen  $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton steigend sind. Dazu gilt  $a^{(n)} \leq a < p+1$  und  $b^{(n)} \leq b < q+1$  für alle  $n$ ; also, sie sind nach oben beschränkt. Dann sagt uns Lemma 2.2.1, dass

$(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  stabilisiert sind, und in der Tat, gilt es genau, dass  $a^{(n)} \rightrightarrows a$  und  $b^{(n)} \rightrightarrows b$ .

Nun bemerken wir, dass die Folgen  $(a^{(n)} + b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(a^{(n)} \cdot b^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  auch monoton steigend und nach oben beschränkt sind (warum?). Dann impliziert Lemma 2.2.1, dass es Dezimalzahlen  $s$  und  $p$  gibt, sodass  $a^{(n)} + b^{(n)} \rightrightarrows s$  und  $a^{(n)} \cdot b^{(n)} \rightrightarrows p$ .

Mit der obigen Notation definieren wir  $a + b$  als  $s$  und  $a \cdot b$  als  $p$ . Mit einem ähnlichen Verfahren können wir die Differenz und den Quotienten von zwei Dezimalzahlen definieren.

### Übung 2.2.3

Bisher haben wir nur die Summe und Produkt zwischen zwei nicht-negativen reellen Zahlen definiert. Benutzen Sie die Betragsfunktion, um die Summe und Produkt im Allgemeinen zu definieren. ♠

Es ist nun nicht so schwer, aber eine lange und übergenaue Übung den folgenden Satz zu beweisen:

### Satz 2.2.2

*Die Menge der Dezimalzahlen, mit der Ordnung und den Operationen von Addition und Multiplikation hier definiert, ist ein angeordneter Körper.*

## 2.2.2 Die Ordnungsvollständigkeit

Wir möchten nun eine Idee geben, wie man beweist, dass der Körper  $\mathbb{R}$  mit Ordnung  $\leq$  ordnungsvollständig ist. Wie gesagt, wird dieses Konzept später in der Vorlesung nochmal erklärt.

### Satz 2.2.3

*Es sei  $A$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Falls  $A$  nach oben beschränkt ist, dann besitzt  $A$  ein Supremum.*

*Beweis:* Die Idee ist, eine monoton steigende Folge  $\{x_n\}$  zu bilden, damit  $x_n \rightrightarrows \bar{x}$  für ein  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ , und die Konstruktion von  $\{x_n\}$  zu benutzen um zu beweisen, dass  $\bar{x} = \sup A$ .

Da  $A$  nach oben beschränkt ist, gibt es  $y_0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $a \leq y_0$  für alle  $a \in A$ . Es sei  $x_0 \in A$ . Schneiden wir das Intervall  $[x_0, y_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq x \leq y_0\}$  in zwei Hälften und erhalten die Intervalle  $[x_0, c]$  und  $[c, y_0]$ , wobei  $c = \frac{x_0+y_0}{2}$ . Falls  $[c, y_0]$  kein Element von  $A$  enthält, dann wählen wir das Intervall  $[x_0, c]$ , sonst wählen wir  $[c, y_0]$ . Wir bezeichnen das neue gewählte Intervall mit  $[x_1, y_1]$ . Dann wiederholen wir dasselbe Verfahren und finden eine Folge von Intervallen  $[x_n, y_n]$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton steigend und nach oben beschränkt (in der Tat, ist  $x_n \leq y_0$  für alle  $n$ ); dann gibt uns Lemma 2.2.1, dass es ein  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x_n \rightrightarrows \bar{x}$ .

- $[x_n, y_n] \cap A \neq \emptyset$  und  $y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n}$ .
- $y_n \geq x$  für alle  $x \in A$ .

Der Punkt ist, dass die Konstruktion von  $\bar{x}$  und die letzten zwei Eigenschaften, implizieren, dass  $\bar{x}$  das Supremum von  $A$  ist. Wir werden die Details in einer zukünftigen Vorlesung sehen.  $\square$

Wir können diesen Abschnitt mit der folgenden Bemerkung schließen:

Sätze 2.2.2 und 2.2.3 sagen uns, dass die Menge der Dezimalzahlen, mit den eingeführten Operationen von Addition und Multiplikation und mit der Ordnung  $\leq$ , ein ordnungsvollständiger angeordneter Körper ist. Satz 2.1.9 sagt uns, dass bis auf Isomorphismen ein solcher Körper eindeutig bestimmt ist. Dann werden wir sagen, dass die reellen Zahlen die Dezimalzahlen *sind* (weil alle anderen Modelle von reellen Zahlen isomorph zu diesem Modell sind).

Wir haben auch die reellen Zahlen “gebildet” als eine “Erweiterung” der rationalen Zahlen oder, genauer gesagt, die rationalen Zahlen sind ein *Teilkörper*<sup>2</sup> der reellen Zahlen.

#### Definition 2.2.4

Die Elemente der Menge  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  werden **irrationale Zahlen** genannt.

#### Bemerkung 2.2.1

Denken Sie jedoch nicht, dass irrationale Zahlen nur Lösungen einiger Gleichungen des Typs sind

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad \text{mit } a_i \in \mathbb{Q}, \text{ für alle } i = 0, \dots, n.$$

Wenn eine Gleichung dieses Typs reelle Lösungen zulässt, werden diese reelle Zahlen *algebraisch* (auf rationalen Zahlen) genannt. Es gibt aber auch reelle Zahlen, die nicht algebraisch sind, und die *transzendent* genannt werden (sie sind in der Tat “viel mehr” als algebraische Zahlen, siehe Übung 2.5.2). Zum Beispiel,  $\pi$  ist transzendent (diese Tatsache ist nicht trivial zu beweisen).  $\diamond$

#### Übung 2.2.4

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr, und welche ist falsch, und warum ist es so (also: wenn Sie denken, dass die Behauptung wahr ist, müssen Sie sie beweisen; wenn falsch, müssen Sie ein Gegenbeispiel finden):

1. Die Summe von zwei rationalen Zahlen ist rational;
2. Die Summe von zwei irrationalen Zahlen ist irrational;

---

<sup>2</sup>Ein Teilkörper  $K'$  eines Körpers  $(K, +, \cdot)$  ist eine Teilmenge von  $K$ , der ein Körper bezüglich der Einschränkungen der Operationen  $+$  und  $\cdot$  auf  $K'$  ist.

3. Die Summe einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl ist rational;
4. Das Produkt einer rationalen Zahl und einer irrationalen Zahl ist rational;
5. Das Produkt von zwei irrationalen Zahlen ist irrational.



## 2.3 Weitere Eigenschaften und Definitionen von $\mathbb{R}$

### 2.3.1 Das Archimedische Axiom und die Dichte von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

#### Lemma 2.3.1

Der Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen erfüllt das Archimedische Axiom (siehe Definition 2.1.3): zu je zwei positiven reellen Zahlen  $a, b$  existiert eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot a > b$ .

In der nächsten Übung müssen Sie beweisen, dass diese Tatsache eine Konsequenz der Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ist:

**Übung 2.3.1** • Beweisen Sie, dass die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  die folgende Tatsache impliziert:

(\*) Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  existiert  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $n > x$ .

(Hinweis: Widerspruchsbeweis. Nehmen Sie an, dass es ein  $x \in \mathbb{R}$  existiert, mit  $n \leq x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann wäre die Menge  $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x\}$  nach oben beschränkt. Es sei  $S \in \mathbb{R}$  das Supremum, dann wäre  $S - 1$  kein Supremum, und... ).

- Beweisen Sie, dass (\*) äquivalent zum Archimedischen Axiom ist.



Die Gaußklammernfunktion  $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  assoziiert jeder reellen Zahl die nächstliegende nicht größere ganze Zahl. Also, falls  $a = p.\alpha_1\alpha_2\dots$  und  $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , dann ist  $\lfloor a \rfloor = p$ ; falls  $p < 0$  dann ist  $\lfloor a \rfloor = p - 1$ . Zum Beispiel,  $\lfloor 3.547\dots \rfloor = 3$ , und  $\lfloor -3.547\dots \rfloor = -4$ . Mit dieser Funktion kann man einfach das Folgende beweisen:

#### Übung 2.3.2

Beweisen Sie nochmal Lemma 2.3.1 mit der Hilfe der Gaußklammernfunktion (mit  $n = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor + 1$ ).



Lemma 2.1.5 gibt uns einige Konsequenzen dieser Tatsache.

Nun möchten wir eine wichtige Eigenschaft von  $\mathbb{Q}$  erklären.

**Lemma 2.3.2**

Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ , d.h. zu je zwei  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$ , gibt es ein  $r \in \mathbb{Q}$ , mit  $x < r < y$ .

*Beweis:* Wir stellen eine rationale Zahl mit  $\frac{p}{q}$  dar, wobei  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ . Dann müssen wir  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$  finden, sodass  $x < \frac{p}{q} < y$  gilt. Aus Lemma 2.1.3 folgt, dass diese Ungleichheiten äquivalent zu  $qx < p < qy$  sind.

Da  $x < y$  haben wir  $y - x > 0$ . Dann Lemma 2.1.5 1. sagt uns, dass es ein  $q \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $\frac{1}{q} < y - x$ . Aus dieser Ungleichheit erhalten wir, dass  $1 < qy - qx \iff 1 + qx < qy$ . Dann haben wir  $q \in \mathbb{N}$  gefunden, sodass

$$qx < qx + 1 < qy \quad (2.3.1)$$

Wir können leider  $p$  als  $qx + 1$  nicht definieren, da  $qx + 1$  im Allgemeinen keine ganze Zahl ist. Aber wir können die Gaußklammern benutzen, um eine ganze Zahl zu finden, die “ziemlich nahe” der Zahl  $qx + 1$  ist, und zwar können wir mit  $p := \lfloor qx + 1 \rfloor = \lfloor qx \rfloor + 1$  versuchen. Zuerst bemerken wir, dass  $qx < \lfloor qx \rfloor + 1 \leq qx + 1$ . Also, aus (2.3.1), erhalten wir genau, dass  $qx < \lfloor qx \rfloor + 1 < qx + 1$ .  $\square$

**Übung 2.3.3** (i) Beweisen Sie, dass die rationalen Zahlen dicht in  $\mathbb{Q}$  sind, d.h. zu je zwei  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $x < y$ , es ein  $r \in \mathbb{Q}$  gibt, mit  $x < r < y$ .

(ii) Beweisen Sie, dass die irrationalen Zahlen dicht in  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sind, d.h. zu je zwei  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $x < y$ , es ein  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  gibt, mit  $x < r < y$ . (*Hinweis:* es könnte sein, dass Sie Übung 2.2.4 und das vorherige Lemma benutzen sollten...).

(iii) Beweisen Sie, dass die irrationalen Zahlen dicht in  $\mathbb{Q}$  sind, zu je zwei  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $x < y$ , es ein  $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  gibt, mit  $x < r < y$ . (*Hinweis:* es seien  $x, y \in \mathbb{Q}$ , und nehmen wir  $\frac{x}{\sqrt{2}}$  und  $\frac{y}{\sqrt{2}}$ ; dann, nach Lemma 2.3.2, es ein  $q \in \mathbb{Q}$  gibt, mit

$$\frac{x}{\sqrt{2}} < q < \frac{y}{\sqrt{2}},$$

und dann...? )



### 2.3.2 Potenzen und (Quadrat)wurzeln

Lemma 2.1.8 sagt uns, dass die Menge  $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  kein Supremum hat. Falls wir die Menge  $S' := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$  betrachten, die Supremumseigenschaft, die von  $\mathbb{R}$  erfüllt ist, impliziert, dass  $S'$  ein Supremum  $s \in \mathbb{R}$  besitzt. Dann kann man den Beweis des Lemmas 2.1.8 adaptieren, um zu beweisen, dass  $s^2$  weder  $s^2 < 2$  noch  $s^2 > 2$  erfüllen kann. Dann muss das Supremum  $s$  von  $S'$  erfüllen:  $s^2 = 2$ .

**Übung 2.3.4**

Wiederholen Sie den gleichen Vorgang, um zu beweisen, dass für jede  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  das Supremum  $s$  der Teilmenge  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a\}$  die Gleichheit  $s^2 = a$  erfüllt, und  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . ♠

Wir bemerken auch, dass das Supremum eindeutig bestimmt ist (siehe Übung 2.1.6). Dann Übung 2.3.4 und die Eindeutigkeit des Supremums sagen uns, dass die folgende Definition Sinn macht:

**Definition 2.3.1**

Die **Quadratwurzel** einer nicht-negativen Zahl  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist das Supremum  $s$  der Menge  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < a\}$ , erfüllt  $s^2 = a$ , und wird mit  $\sqrt{a}$ , oder  $\sqrt[3]{a}$  oder  $a^{\frac{1}{2}}$  bezeichnet.

Ganz analog, für alle  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , wird die  **$n$ -te Wurzel** von  $a$  als das Supremum der Teilmenge  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^n < a\}$  definiert, und wird mit  $\sqrt[n]{a}$  oder  $a^{\frac{1}{n}}$  bezeichnet. Wir setzen  $a^0 := 1$ .

Es sei  $r := \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Dann möchten wir die Potenz  $a^r$  definieren.

- Wir beginnen mit dem Fall, in dem  $p > 0$  und  $q > 0$ . Dann setzen wir  $a^r = a^{\frac{p}{q}} := (a^{\frac{1}{q}})^p$ . Wir bemerken, dass diese Definition Sinn macht, für alle  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .
- Falls  $r < 0$  schreiben wir  $r$  als  $-\frac{p}{q}$ , wobei  $p \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und definieren  $a^r = a^{-\frac{p}{q}}$  als  $(a^{-1})^{\frac{p}{q}}$ . Wir bemerken, dass diese Definition nur Sinn macht, falls  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Wir bemerken dass, im Prinzip, man nachprüfen sollte, dass die obigen Definitionen unabhängig von dem gewählten Element der Äquivalenzklasse von  $(p, q)$  sind. (Denken Sie daran, dass die Elemente von  $\mathbb{Q}$  als Äquivalenzklassen definiert wurden, nämlich  $\frac{p}{q} = [(p, q)]\dots$ ) Wir überlassen diese Überprüfung dem geduldigen Studierenden.)

Endlich bemerken wir, dass mit den obigen Definitionen Folgendes gilt:

$$a^{r+s} = a^r a^s, \quad a^{rs} = (a^r)^s, \quad (a \cdot b)^r = (a^r) \cdot (b^r), \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } r, s \in \mathbb{Q}.$$

## 2.4 Mächtigkeit und Abzählbarkeit

Sobald das Konzept einer Menge eingeführt wurde, stellt sich die folgende Frage: Wann haben sie zwei Mengen  $A$  und  $B$  “die gleiche Anzahl von Elementen”? Anführungszeichen werden verwendet, da es nicht immer sinnvoll ist, über die “Anzahl der Elemente einer Menge” zu sprechen.

Tatsächlich haben wir das Konzept der **Mächtigkeit**, oder **Kardinalität**, bereits eingeführt (Definitionen 1.3.1 und 1.3.2): Zwei Mengen haben dieselbe Mächtigkeit, wenn beide leer sind oder wenn zwischen ihnen eine Bijektion besteht. Dieses Konzept ist eine Verallgemeinerung dessen, was wir tun, um die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge zu zählen: Wir finden eine natürliche Zahl  $n$  und eine Bijektion zwischen  $\{1, 2, \dots, n\}$  und der gegebenen Menge, die daher  $n$  Elemente hat.<sup>3</sup> Aber was ist, wenn die Mengen unendlich sind? Man könnte immer noch denken, dass man, wenn die Anzahl der Elemente von  $A$  unendlich ist, diese Elemente immer noch „zählen“ kann, d.h. eine Funktion von  $\mathbb{N}$  nach  $A$ , die daher bijektiv sein sollte. Dies ist jedoch nicht immer möglich, wie wir gleich sehen werden. Beginnen wir also mit einer Definition.

#### Definition 2.4.1

Eine Menge  $A$  heißt **abzählbar**, falls sie entweder endlich ist ( $A$  enthält endlich viele Elemente) oder falls  $A$  die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen hat.

Die Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen wird durch  $\aleph_0$  bezeichnet (liest „Aleph Null“, wobei „Aleph“ der erste Buchstabe im hebräischen Alphabet ist).

#### Beispiel 2.4.1

Abgesehen von der Menge der natürlichen Zahlen sind zwei unendliche Mengen, die abzählbar sind, die Mengen der geraden Zahlen  $2\mathbb{N}$  und die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ . Im ersten Fall, eine Bijektion  $f$  zwischen  $\mathbb{N}$  und  $2\mathbb{N}$  ist gegeben durch  $f(n) = 2n$ . Im zweiten Fall können wir die Bijektion so darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} : & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ \mathbb{Z} : & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 \dots \end{array}$$

Sie sollten nicht länger überrascht sein, wenn Sie feststellen, dass zwischen einer Menge  $A$  und einer Teilmenge  $B \subsetneq A$  eine Bijektion besteht (oder ist es richtig, immer noch ein wenig verwirrt zu sein?) ♣

Nun werden wir den folgenden Satz beweisen, dessen Beweis das **erste Cantorsche Diagonalargument** verwendet.

---

<sup>3</sup>Die Definition, die ich gegeben habe, „eine Menge mit einer endlichen Anzahl von Elementen zu zählen“, scheint mühsam, aber genau das tun wir. Mir wurde klar, wie schwierig es ist, einem Kind das Zählen beizubringen. Wenn ich es mit meinem Sohn tat, benutzte er oft nicht-injektive oder nicht-surjektive Funktionen ... aber um auf den Fehler hinzuweisen, konnte ich diese Worte sicherlich nicht verwenden! Es müssen einfache Begriffe gefunden werden, um zu erklären, was eine injektive und surjektive Funktion ist, und es ist schwieriger als wir denken...

**Satz 2.4.1**

Es sei  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine abzählbare Familie von abzählbaren Mengen. Dann ist die Vereinigung  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  abzählbar.

*Beweis:* Da jede Menge  $A_n$  nach Voraussetzung abzählbar ist, können wir ihre Elemente mit natürlichen Zahlen auflisten, d.h.

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots\}.$$

Dann können wir eine Tabelle erstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 : & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ A_2 : & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ A_3 : & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ A_4 : & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \end{array}$$

und die Elemente, wie in Abbildung 2.4.1 zählen. Natürlich, falls zwei Elemente gleich sind (also, falls  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$  für  $i \neq j$ ), kann man das zweite gleiche Element aussetzen. Diese Methode heißt ‘‘Cantorsches Diagonalargument’’.

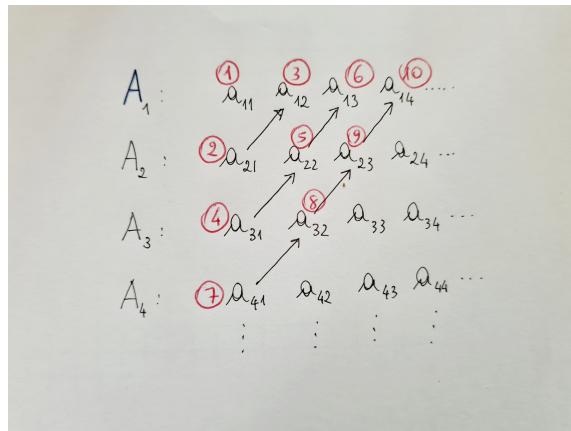


Figure 2.4.1: Erstes Cantorsches Diagonalargument

□

Also, wann immer man die Elemente einer Menge in einer Tabelle mit zwei Einträgen auflisten kann, ist die Menge abzählbar. Durch Induktion kann dieses Argument auf Tabellen mit  $n$  Einträgen verallgemeinert werden, wie im Beweis dieses Satzes.

**Satz 2.4.2**

*Das Kartesische Produkt von endlich vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

*Beweis:* Wir beweisen die Behauptung durch Induktion. Es seien  $A_1, \dots, A_m$  die abzählbaren Mengen. Falls  $m = 1$  ist die Behauptung wahr nach Voraussetzung ( $A_1$  ist nach Voraussetzung abzählbar). Nehmen wir an, dass  $A_1 \times \dots \times A_{m-1}$  abzählbar ist. Dann können wir ihre Elemente als  $\{(a_1, a_2, a_3, \dots)\}$  auflisten. Es sei  $\{b_1, b_2, b_3, \dots\}$  die Menge  $A_m$ . Dann, mit dem Cantorschen Diagonalargument, kann man die Elemente von  $A_1 \times \dots \times A_{m-1} \times A_m = (A_1 \times \dots \times A_{m-1}) \times A_m$  in einer Tabelle mit zwei Einträgen darstellen:

$$\begin{array}{cccc} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & \dots \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & \dots \\ (a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & \dots \\ (a_4, b_1) & (a_4, b_2) & (a_4, b_3) & \dots \end{array}$$

Wir können nun das Cantorsche Argument benutzen, um zu beweisen, dass die Elemente in dieser Tabelle abzählbar sind.  $\square$

Als Folge dieses Arguments haben wir das Folgende:

**Korollar 2.4.3**

*Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

*Beweis:* Wir beweisen zuerst, dass  $\mathbb{Q}_{>0}$  abzählbar ist. Aus Satz 2.4.2 wissen wir, dass die Menge  $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$  abzählbar ist. Die Elemente in  $\mathbb{Q}_{>0}$  können als Äquivalenzklassen in  $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$  dargestellt werden (siehe Definition 1.5.3). In jeder Äquivalenzklasse  $[(p, q)]$  gibt es ein eindeutiges Element  $(p, q)$ , sodass  $p$  und  $q$  teilerfremd sind. Also kann  $\mathbb{Q}_{>0}$  als Teilmenge von  $\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0}$  betrachtet werden. Eine solche Teilmenge muss dann abzählbar sein; diese Tatsache benötigt einen Beweis, aber kann direkt aus dem Diagonalargument gesehen werden, wobei wir in der Zählung die Elemente  $(p, q)$  weglassen, wenn  $p$  und  $q$  nicht teilerfremd sind (siehe Bild 2.4.2). Nun verwenden wir dasselbe Argument, das wir benutzt haben um zu beweisen, dass  $\mathbb{Z}$  abzählbar ist, um zu zeigen, dass  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist (Wenn Sie nicht sofort verstehen, wie dieses adaptierte Argument funktioniert, klären Sie bitte die Details.)  $\square$

An diesem Punkt scheint das erste Diagonalargument zu beweisen, dass “alle Mengen abzählbar sind”. Und doch ist es nicht so! Tatsächlich verwendete Cantor eine ähnliche Methode, die als **zweites Cantorsches Diagonalargument** bezeichnet wird, um Folgendes zu demonstrieren:

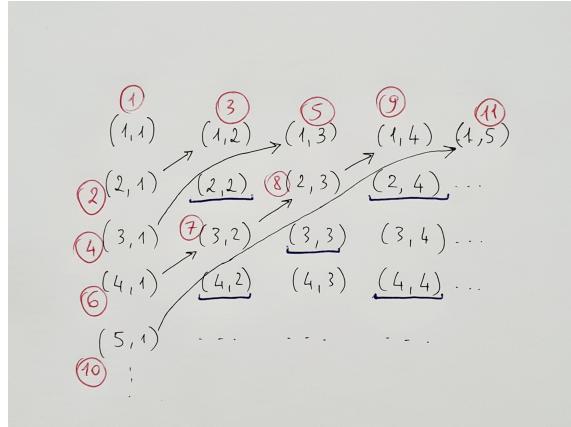


Figure 2.4.2:  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar. (Die unterstrichenen Elemente werden nicht gezählt.)

#### Satz 2.4.4

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist nicht abzählbar.

*Beweis:* Wir beweisen diesen Satz durch Widerspruch. Dann nehmen wir an, dass  $\mathbb{R}$  abzählbar ist. Wie oben erwähnt, ist eine Teilmenge einer abzählbaren Menge selbst abzählbar; also wäre auch  $\mathbb{R}_{>0}$  abzählbar. Es seien  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  ihre Elemente. Da für alle  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i$  eine Dezimalzahl ist, finden wir  $p_i \in \mathbb{N}$  und  $\alpha_{ij}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_i = p_i \cdot \alpha_{i1} \alpha_{i2} \alpha_{i3} \dots$ . Es sei  $b$  eine Dezimalzahl der Gestalt  $b = p \cdot \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots$ , wobei  $p = 1$ ,  $\beta_i = 3$  falls  $\alpha_{ii} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ , und  $\beta_i = 7$  falls  $\alpha_{ii} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Mit dieser Methode ist  $b \neq a_i$ , für alle  $i \in \mathbb{N}$ , also kann die Liste der Elemente  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  nicht die ganze Menge der positiven reellen Zahlen sein, und wir bekommen einen Widerspruch.  $\square$

#### Übung 2.4.1

Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen die gleichen Mächtigkeiten haben:

$$\mathbb{R}, (0, 1), (0, 1], (a, b), (a, b], (a, +\infty), (-\infty, b)$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ .



Es ist schwerer zu beweisen, dass in der Tat  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^n$  die gleiche Mächtigkeit haben, für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Um größere Mächtigkeiten zu erhalten, kann der folgende Satz von Cantor verwendet werden.

The image shows handwritten mathematical notes on a light gray background. It includes four lines of text, each starting with a symbol like  $\alpha$  or  $b$ , followed by a decimal point and several digits. Some digits are circled in red ink.

- $\alpha_1 : 2.\textcircled{3}540091\dots$
- $\alpha_2 : 1.\textcircled{2}018713\dots$
- $\alpha_3 : 26.\textcircled{9}9\textcircled{1}837\dots$
- $\alpha_4 : 5.82\textcircled{9}945\dots$

Below these lines, there is a single line of text:  $b = 1.7773\dots$

**Satz 2.4.5**

Es sei  $X$  eine Menge. Dann ist  $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ , wobei  $\mathcal{P}(X)$  die Potenzmenge von  $X$  ist.

**Übung 2.4.2**

Beweisen Sie Satz 2.4.5. Diese Übung ist schwer und kommt mit Hinweisen:

- Falls  $X$  endlich ist, was ist  $|\mathcal{P}(X)|$ ? Können Sie vielleicht Induktion benutzen, um zu beweisen, dass  $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ ?
- Nehmen wir an, dass  $X$  unendlich und nichtleer ist. Dann finden Sie eine injektive Abbildung von  $X$  nach  $\mathcal{P}(X)$  um zu beweisen, dass  $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$  (siehe Definition 1.3.2).
- Sie müssen nun beweisen, dass  $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$ . Durch Widerspruch: nehmen Sie an, dass es eine bijektive Abbildung  $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  gibt. Es sei  $Y$  die Teilmenge  $\{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ .
  - Beweisen Sie, dass  $Y$  nichtleer ist (bemerken Sie, dass  $\emptyset \in \mathcal{P}(X) \dots$ );
  - Da  $f$  surjektiv ist, und  $Y \in \mathcal{P}(X)$ , es sollte  $x_0 \in X$  geben, sodass  $f(x_0) = Y$ . Aber dann....?



## 2.5 Zusätzliche Übungen

### Übung 2.5.1

Zeigen Sie, dass die Zahlen  $\sqrt{3}$  und  $\sqrt{5}$  irrationale Zahlen sind.



**Übung 2.5.2** (a) Zeigen Sie, dass die Menge der irrationalen Zahlen nicht abzählbar ist.

- (b) Eine reelle Zahl  $x$  heißt *algebraisch*, wenn es rationale Zahlen  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, a_n \neq 0$ , gibt mit:

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Eine reelle Zahl, die nicht algebraisch ist, heißt *transzendent*.

Alle rationalen Zahlen sind algebraisch (warum?), aber es gibt auch irrationale Zahlen, die algebraisch sind, wie zum Beispiel  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{7}$  (Warum sind sie algebraisch?). Die Zahl  $\pi$  ist ein klassisches Beispiel für eine irrationale transzendenten Zahl.

Zeigen Sie, dass die Menge der reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist.

- (c) Zeigen Sie, dass die Menge der irrationalen transzententen Zahlen nicht abzählbar ist.



### Übung 2.5.3

Sei  $A \subset \mathbb{Q}$  eine nach oben beschränkte Menge mit Supremum  $\sup(A)$ . Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

1.  $\sup(A)$  ist rational.
2.  $\sup(A)$  ist irrational.
3. Wenn  $\sup(A)$  rational ist, dann ist es auch ein Maximum von  $A$ .

Rechtfertigen Sie Ihre Antworten.



### Übung 2.5.4

Welche der folgenden Menge hat Minimum 3?

1.  $\{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = 3\}$
2.  $\left\{3 + \frac{2}{n+1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$
3.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq 27\}$



**Übung 2.5.5**

Bestimmen Sie das Supremum bzw. das Infimum (sofern sie existieren) der folgenden Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , und geben Sie an, ob dies ein Maximum bzw. ein Minimum der jeweiligen Teilmenge ist.

1.  $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$
2.  $\{x \in \mathbb{R} \mid x|x| < x^2\} \cup [-1, 1)$
3.  $\{0\}$
4.  $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x^2 < 4\}.$

**Übung 2.5.6**

Definieren Sie eine Bijektion zwischen den Intervallen  $(0, 1)$  und  $[0, 1]$ .





---

---

## KAPITEL 3

---

DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Wir haben schon bemerkt, dass in einem angeordneten Körper, die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  keine Lösung hat (siehe Lemma 2.1.3 8.). Wie bisher müssen wir dann den Körper der reellen Zahlen auf dem der sogenannten komplexen Zahlen erweitern, um diese Gleichung lösen zu können. Wir beobachten daher, dass es in dieser Erweiterung nicht möglich sein wird, eine totale Ordnung zu definieren, die mit ihrer algebraischen Struktur verträglich ist, da in diesem Körper die Gleichung  $x^2 + 1$  Lösungen haben wird.

### 3.1 Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Wir beginnen mit der Menge  $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  der geordneten Paaren von reellen Zahlen, in der wir die folgenden Operationen einführen:

- *Addition:*  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ , für alle  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ ;
- *Multiplikation:*  $(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$ , für alle  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ .

Falls  $(a, b)$  als ein Vektor betrachtet wird, wobei  $a$  und  $b$  die Komponenten sind, dann sind, per definitionem der Addition, die Komponenten der Summe genau die Summen der Komponenten. Aber warum ist die Multiplikation so definiert, und nicht als  $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ ? Die Antwort hängt genau mit der Existenz von Lösungen der Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  zusammen, wie wir bald sehen werden. Zuerst bemerken wir die folgenden Eigenschaften: für alle  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  gilt

- $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$  (da 0 das neutrale Element in der Gruppe  $(\mathbb{R}, +)$  ist);
- $(a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0)$  (da  $-a$  das inverse Element von  $a$  in  $(\mathbb{R}, +)$  ist, und ähnlich für  $b$ );
- $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$  (da 1 das neutrale Element in der Gruppe  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist);
- $(a, b) \cdot \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$ , falls  $(a, b) \neq (0, 0)$  (Die Überprüfung bleibt dem Leser überlassen).

Sowohl die Kommutativität und Assoziativität der Addition und Multiplikation, als auch die Distributivität der Multiplikation über der Addition, kommen von denen in  $\mathbb{R}$ . Falls Sie noch Zweifel haben, bitte

#### Übung 3.1.1

Beweisen Sie, dass die Addition und Multiplikation, die wir auf  $\mathbb{R}^2$  hier oben definiert haben, kommutativ und assoziativ sind, und dass die Multiplikation distributiv über der Addition ist.



Mit der Hilfe dieser Übung und der vorherigen Bemerkungen haben wir den folgenden Satz schon bewiesen:

**Satz 3.1.1**

Die Menge  $\mathbb{R}^2$ , mit der obigen Addition und Multiplikation, ist ein Körper und wird mit  $\mathbb{C}$  bezeichnet.

**Fragen 3.1.1**

Es sei  $\mathbb{R}^2$  mit der Addition  $+$ , die wir schon definiert haben, und mit einer “neuen” Multiplikation:

$$(a, b) \circ (c, d) := (a \cdot c, b \cdot d).$$

Ist  $(\mathbb{R}^2, +, \circ)$  ein Körper?

♡

Wir bezeichnen mit

- $0_{\mathbb{C}} := (0, 0)$  das neutrale Element der Addition,
- $1_{\mathbb{C}} := (1, 0)$  das neutrale Element der Multiplikation,
- $-(a, b) := (-a, -b)$  das inverse Element der Addition, und
- $(a, b)^{-1} := \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$  das inverse Element der Multiplikation, wobei  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

Wir bemerken dazu, dass  $\mathbb{R}$  als *Teilkörper* (siehe Fußnote auf Seite 81) von  $\mathbb{C}$  betrachtet werden kann: In der Tat bemerken wir, dass

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0)$$

und

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a \cdot b, 0).$$

Diese Gleichheiten implizieren, dass die Menge  $(\mathbb{R} \times \{0\}, +, \cdot)$  ein Teilkörper von  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist. Dazu behält die Funktion  $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\iota(a) := (a, 0)$ , die Addition und Multiplikation bei, nämlich  $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$  und  $\iota(a \cdot b) = \iota(a) \cdot \iota(b)$ , für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ . Das heißt, dass *als Körper*,  $\mathbb{R}$  mit  $\iota(\mathbb{R})$  identifiziert werden kann (oder mit anderen Worten, definiert  $\iota$  einen Isomorphismus zwischen  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  und  $(\mathbb{R} \times \{0\}, +, \cdot)$ , wobei der letzte ein Teilkörper von  $\mathbb{C}$  ist. Also kann  $\mathbb{R}$  als Teilkörper von  $\mathbb{C}$  betrachtet werden (bemerken Sie, dass  $\iota$  bijektiv ist)).

**Fragen 3.1.2**

Ist  $(\{0\} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$  ein Teilkörper von  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ? Also, könnten wir  $a \in \mathbb{R}$  auch mit  $(0, a)$  identifizieren, um eine zweite Identifizierung von  $\mathbb{R}$  als Teilkörper von  $\mathbb{C}$  zu erhalten?

♡

### Vertiefungen 3.1.1

Sie werden häufig auf Funktionen mit Eigenschaften stoßen, wie sie von  $\iota$  erfüllt werden. Die mathematische Bedeutung ist die folgende: Es seien  $G_1$  und  $G_2$  (nichtleere) Mengen mit jeweiligen Verknüpfungen  $\circ_1$  und  $\circ_2$ . Nehmen wir an, dass diese Verknüpfungen der Mengen  $G_1$  und  $G_2$  eine spezifische Struktur geben (z. B.  $(G_i, \circ_i)$  ist eine Gruppe, ein Monoid, falls jede  $G_i$  zwei Verknüpfungen besitzt, ein Körper, usw.). Es sei  $\alpha: G_1 \rightarrow G_2$  eine Funktion. Da die Definitionsmenge und Zielmenge eine mathematische Struktur haben, möchten wir, dass die Funktion  $\alpha$  *verträglich* mit der Struktur ist. Was heißt das? Das heißt genau:

$$\alpha(g \circ_1 h) = \alpha(g) \circ_2 \alpha(h). \quad (3.1.1)$$

Warum wird eine solche Eigenschaft erforderlich? Angenommen, zum Beispiel, die Funktion  $\alpha$  ist injektiv, und wir wollen  $G_1$  mit ihrer Struktur, also mit  $\circ_1$ , mit einer Teilmenge von  $G_2$  identifizieren, wobei *die Verknüpfung auf  $\alpha(G_1)$  durch die Beschränkung von  $\circ_2$  auf  $\alpha(G_1)$  gegeben ist*. Die Tatsache, dass wir die Verknüpfung  $\circ_2$  von  $G_2$  verwenden möchten, um  $G_1$  mit ihrer Struktur mit einer Teilmenge von  $G_2$  mit (der Einschränkung) der Verknüpfung  $\circ_2$  zu identifizieren, sagt uns genau, dass, wenn wir vorher  $g \circ_1 h$  betrachten, und es dann als Element von  $G_2$  sehen ( $\alpha(g \circ_1 h)$ ), wir dasselbe erhalten sollten, wenn wir zuerst  $g$  und  $h$  als Elemente von  $G_2$  sehen und dann die Verknüpfung von  $G_2$  verwenden ( $\alpha(g) \circ_2 \alpha(h)$ ). Mit mathematischen Symbolen, ist diese Eigenschaft genau (3.1.1).

Im Allgemeinen (also, ohne Injektivität von  $\alpha$ ) ist (3.1.1) genug zu beweisen, dass, zum Beispiel, falls  $(G_i, \circ_i)$  Gruppen sind mit jeweiligen neutralen Elementen  $e_i$ , für  $i = 1, 2$ , dann ist

$$\alpha(e_1) = e_2 \quad \text{und} \quad \alpha(g)^{-1} = \alpha(g^{-1}), \quad \text{für alle } g \in G_1.$$

◇

Der Grund, warum wir die Multiplikation wie oben (und *nicht* als, zum Beispiel,  $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$ ) definiert haben, ist genau, weil jetzt die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  eine Lösung in  $\mathbb{C}$  hat. In der Tat bemerken wir, dass

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -(1, 0).$$

Da wir das Element  $(1, 0)$  mit  $1 \in \mathbb{R}$  identifiziert haben, sagen uns die obigen Gleichheiten, dass  $(0, 1)^2 = -1$  oder, mit anderen Worten, dass  $(0, 1)^2 + 1 = 0$ . Dieses Element ist sehr wichtig und hat daher das Recht auf einen Namen.

#### Definition 3.1.1

Das Element  $(0, 1)$  heißt **imaginäre Einheit**, und wird mit dem Symbol  $i$  bezeichnet.

Wie schon erwähnt, haben wir eine reelle Zahl  $a$  mit dem Paar  $(a, 0)$  identifiziert. Ähnlich ist  $ai$  genau  $(a, 0) \cdot (0, 1) = (0, a)$ . Also erhalten wir

$$a + i b = (a, 0) + (0, b) = (a, b), \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Mit dieser Identifikation werden dann die Addition und Multiplikation sehr einfach zu betrachten, da, für beliebige  $a_i \in \mathbb{R}$  und  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , ist es leicht zu sehen, dass

$$(a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2), \text{ und}$$

$$\begin{aligned} (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) = \\ &= a_1 \cdot a_2 + i a_1 \cdot b_2 + i a_2 \cdot b_1 + i^2 b_1 \cdot b_2. \end{aligned}$$

Daher können wir eine komplexe Zahl  $(a, b)$  mit  $a + i b$  bezeichnen und die Additions- und Multiplikationsoperationen durchführen, indem wir  $a + i b$  als Polynom (ersten Grades) in reellen Koeffizienten behandeln, wobei  $i^2$  berücksichtigt wird  $-1$ .

### Definition 3.1.2

Für eine beliebige komplexe Zahl  $z = a + i b$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ , heißt

- $a$  der **Realteil** von  $z$ , und wird mit  $\operatorname{Re} z$  bezeichnet, und
- $b$  der **Imaginärteil** von  $z$ , und wird mit  $\operatorname{Im} z$  bezeichnet.

Und noch eine

### Definition 3.1.3

Die Abbildung von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  gegeben durch  $z = a + i b \mapsto \bar{z} = a - i b$  heißt **komplexe Konjugation**. Die Zahl  $\bar{z}$  heißt der **komplex konjugierte** von  $z$ .

Die komplexe Konjugation ist ein *Körperautomorphismus*. Was bedeutet dieses Wort? Sie ist ein Automorphismus von  $\mathbb{C}$  (eine Bijektion von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ ) die mit der Körperstruktur verträglich ist (siehe Vertiefungen 3.1.1), d.h.

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \text{ und} \tag{3.1.2}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}. \tag{3.1.3}$$

Dazu gilt

$$\overline{(\bar{z})} = z. \tag{3.1.4}$$

### Übung 3.1.2

Beweisen Sie, dass die komplexe Konjugation verträglich mit der Körperstruktur von  $\mathbb{C}$  ist. ♠

**Definition 3.1.4**

Gegeben eine komplexe Zahl  $z = x + iy$ , ist der **Betrag**  $|z|$  von  $z$  die reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

**Bemerkung 3.1.1**

Wenn man die komplexe Zahl  $x+iy$  als Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  in der Euklidischen Ebene betrachtet, dann ist der Betrag von  $z$  genau der Abstand vom Ursprung. (Dies ist eine Folge des Satzes von Pythagoras, siehe Abbildung 3.1.1).

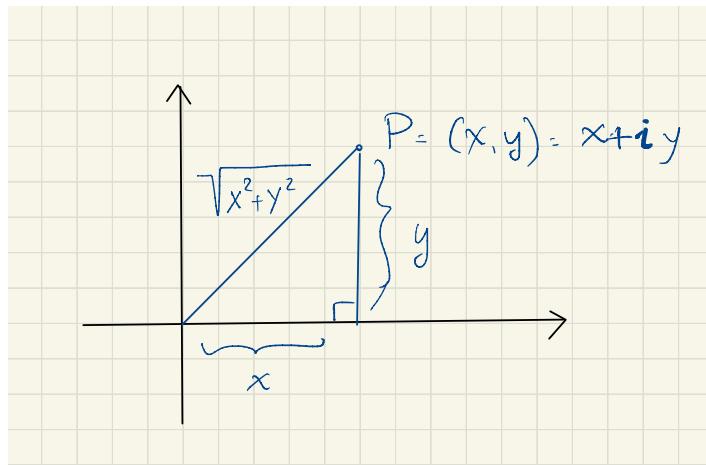


Figure 3.1.1

Wir bemerken dazu, dass für eine beliebige komplexe Zahl  $z$ , ist  $|z| \geq 0$ , und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $z = 0$ .  $\diamond$

Wir bemerken dazu, dass

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2. \quad (3.1.5)$$

In der Tat haben wir

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + i(yx - xy) - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

**Lemma 3.1.2**

Für beliebige komplexe Zahlen  $z, w \in \mathbb{C}$  gelten die folgenden:

$$1. \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2};$$

$$2. \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i};$$

3.  $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$  (wobei  $\mathbb{R}$  als Teilkörper von  $\mathbb{C}$  betrachtet wird);
4. falls  $z \neq 0$ , ist  $z^{-1}$  genau  $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ;
5.  $|\bar{z}| = |z|$ ;
6.  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$  und  $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ ;
7.  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ ;
8. (Dreiecksungleichung)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .
9.  $||z| - |w|| \leq |z + w|$ .

*Beweis:* Die (Un)Gleichheiten in 1., 2., 3., 5. und 6. sind leicht zu beweisen, und ihre Überprüfung bleibt dem Leser überlassen.

Um 4. zu beweisen, bemerken wir, dass das Multiplizieren beider Seiten von  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$  (siehe (3.1.5)) mit  $z^{-1}$  ergibt  $\bar{z} = |z|^2 z^{-1}$ . Da  $z \neq 0$ , ist  $|z|^2 \neq 0$ , und daher können wir beide Seiten mit  $(|z|^2)^{-1}$  multiplizieren und erhalten, dass  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

Wir beweisen nun 7. mit der Hilfe von (3.1.5). Wir haben dann, dass

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{z \cdot w}) = (z \cdot w) \cdot (\bar{z} \cdot \bar{w}) = (z \cdot \bar{z}) \cdot (w \cdot \bar{w}) = |z|^2 |w|^2,$$

wobei die zweite Gleichung aus (3.1.3) kommt. Die Gleichheit in 7. ist dann eine Folgerung der Tatsache, dass  $|z| \geq 0$  für alle komplexen Zahlen  $z$ .

Nun beweisen wir die Dreiecksungleichung. Zuerst bemerken wir, dass (3.1.3), (3.1.4) und 1. in diesem Lemma implizieren, dass

$$z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} = z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot \bar{w} = 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) \leq 2|z \cdot \bar{w}|,$$

wobei die letzte Gleichung aus 6. aus diesem Lemma kommt. Mit der Hilfe der obigen Gleichheit, für die Dreiecksungleichung, genügt es dann zu bemerken, dass

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &\stackrel{(3.1.5)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \stackrel{(3.1.2)}{=} (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} \\ &\stackrel{(3.1.5)}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) \stackrel{6.}{\leq} |z|^2 + |w|^2 + 2|z \cdot \bar{w}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}| \stackrel{5.}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

Nun genügt es zu bemerken, dass falls  $a, b \in \mathbb{R}$  nichtnegativ sind, dann  $a \leq b \iff a^2 \leq b^2$  (Warum gilt diese Äquivalenz? Siehe Lemma 2.1.3...und warum impliziert diese Tatsache die Dreiecksungleichung?).

9. Übung für Sie.  $\square$

**Übung 3.1.3**

Beweisen Sie, dass für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist

$$\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}.$$

**Übung 3.1.4**

Visualisieren Sie die Ungleichungen in 8. und 9. von Lemma 3.1.2 mit Hilfe der Abbildung 3.1.2

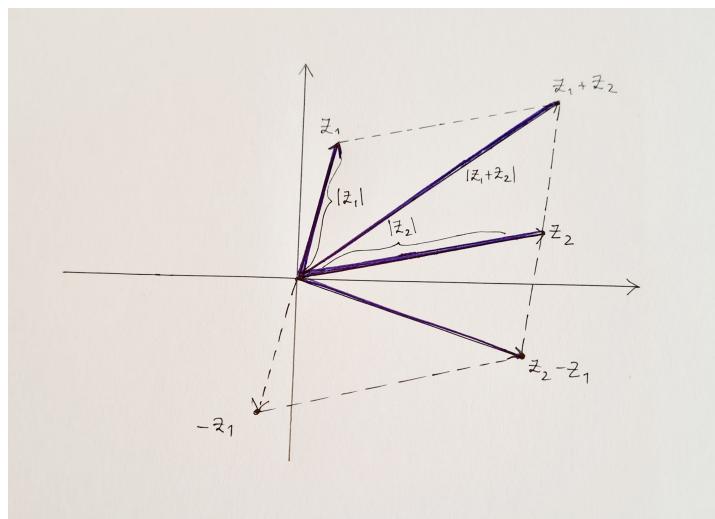


Figure 3.1.2

## 3.2 Die Polarform der komplexen Zahlen

Es ist bekannt (oder leicht zu beweisen), dass ein Punkt in der kartesischen Ebene, der nicht der Ursprung  $(0, 0)$  ist, entweder durch seine Abszisse und Ordinate  $(x, y)$  oder durch seine Polarkoordinaten  $(r, \theta)$  bestimmt wird:

- Für jedes  $P = (x, y)$  definieren wir als  $r$  den Abstand von  $P$  vom Ursprung und nennen diesen Abstand den *Betrag* oder den *Radius*;
- Der Winkel  $\theta$  ist genau der Winkel, den die Halb-Gerade  $\ell$  durch den Ursprung und  $P$ , und die Halbachse der positiven Abszisse bildet (siehe Abbildung).

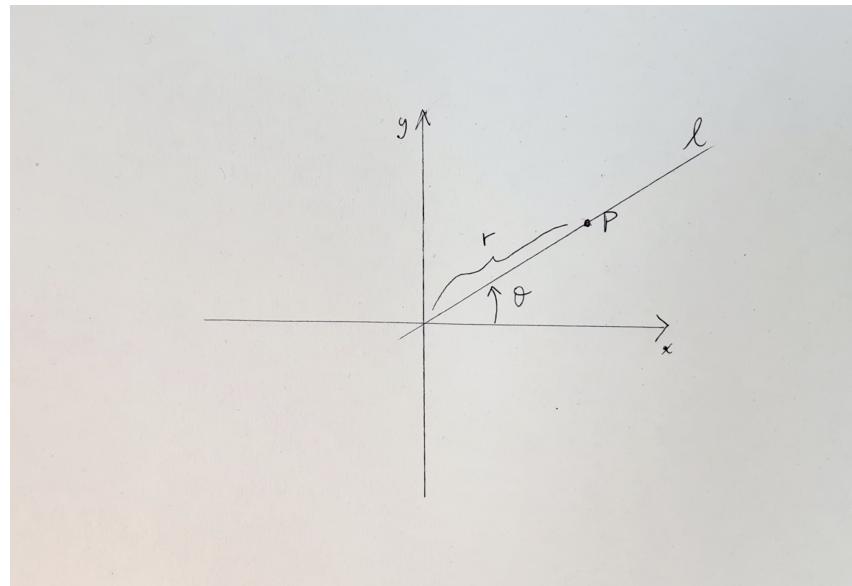
**Bemerkung 3.2.1** (a) Wir bemerken, dass der Winkel  $\theta$  nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  bestimmt, da die Winkel  $\theta + 2\pi k$ , für  $k \in \mathbb{Z}$ , den gleichen

Punkt  $P$  beschreiben. Da dies verwirrend sein kann, ist es in einigen Situationen nützlich, den Winkel auf Werte im Intervall  $[0, 2\pi)$  oder  $(-\pi, \pi]$  zu beschränken.

- (b) Gegeben zwei Punkte in Polarkoordinaten,  $(r_1, \theta_1)$  und  $(r_2, \theta_2)$ , wann stellen sie denselben Punkt in der Ebene dar? Genau dann, wenn

$$r_1 = r_2, \quad \text{und } \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \text{sodass } \theta_1 = \theta_2 + 2\pi k.$$

◇



Die Formeln zum Umschalten von polar zu kartesischen Koordinaten lauten wie folgt:

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

und vice versa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Da wir eine komplexe Zahl  $(x, y)$  mit  $x + iy$  bezeichnet haben, erhalten wir die Polarform einer komplexen Zahl:

$$x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Das Produkt und der Quotient zweier komplexer Zahlen lassen sich sehr einfach veranschaulichen, wenn wir die Zahlen in Polarkoordinaten ausdrücken. In der Tat, gegeben zwei nicht-nulle komplexe Zahlen in Polarkoordinaten,  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  und  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , wir erhalten

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der bekannten Formel:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 \pm \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \sin(\theta_1 \pm \theta_2) &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2. \end{aligned}$$

Also: *der Betrag eines Produktes zweier komplexer Zahlen ist das Produkt der Beträge, und der Winkel ist die Summe der Winkel.*

### Übung 3.2.1

Aus (3.2.1), prüfen Sie nach, dass gegeben  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$ , ist

$$z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) = r^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta),$$

und dass, gegeben  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  und  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ , ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$



Formel (3.2.1) kann durch Induktion verallgemeinert werden (wie?): Gegeben (nichtnulle) komplexe Zahlen  $z_j = r_j(\cos \theta_j + i \sin \theta_j)$ , für  $j = 1, \dots, n$ , ihr Produkt ist durch die folgende Formel

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n))$$

gegeben. Falls  $z_j = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  für alle  $j = 1, \dots, n$ , dann erhalten wir die **Formel von de Moivre**

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \tag{3.2.2}$$

Jetzt wollen wir (ohne Beweis) eine grundlegende Eigenschaft komplexer Zahlen angeben, die die Bedeutung und Notwendigkeit der Einführung dieser Erweiterung reeller Zahlen verdeutlicht. Beginnen wir zunächst mit einer Definition. Sei  $P(z)$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit komplexen Koeffizienten, das heißtt, dass  $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ , mit  $a_i \in \mathbb{C}$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Sei  $z_0$  seine Nullstelle, das heißtt  $P(z_0) = 0$ . Mit Hilfe der Polynomdivision kann es bewiesen werden, dass es

ein Polynom  $Q_1(z)$  gibt, sodass  $P(z) = (z - z_0)Q_1(z)$ . Es kann dann sein, dass  $z_0$  auch eine Nullstelle von  $Q_1$  ist. Dann, nach Wiederholung des vorherigen Verfahrens, erhalten wir ein Polynom  $Q(z)$ , mit  $Q(z_0) \neq 0$ , sodass

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z).$$

Bemerken Sie, dass  $Q(z)$  konstant sein könnte (falls  $P(z) = a(z - z_0)^n$ ), und dass  $0 < k \leq n$ . Die natürliche Zahl  $k$  heißt **Vielfachheit** der Nullstelle  $z_0$ .

### Satz 3.2.1

(*Fundamentalsatz der Algebra*)

*Es sei  $P(z)$  ein nicht konstantes Polynom vom Grad  $n$  mit komplexen Koeffizienten*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1.$$

*Dann hat  $P(z)$  eine komplexe Nullstelle, d. h. es gibt eine komplexe Zahl  $z_0$ , so dass  $P(z_0) = 0$  gilt. Genauer gilt, dass die Anzahl der Nullstellen, wenn sie mit den richtigen Vielfachheiten gezählt werden, insgesamt gleich  $n$  ist.*

Der letzte Satz in der Aussage des Satzes 3.2.1 bedeutet, dass eine Nullstelle der Vielfachheit  $k$ , genau  $k$ -mal gezählt werden muss. Der Beweis dieses grundlegenden Ergebnisses erfordert Methoden, die uns nicht zur Verfügung stehen, und wird in zukünftigen Vorlesungen behandelt. Wir wollen diese Aussage nur im Einzelfall beweisen.

### Proposition 3.2.2

*Es sei  $w_0 \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Dann hat das Polynom  $P(z) := z^n - w_0$  genau  $n$  Nullstellen, wenn sie mit ihrer Vielfachheit gezählt werden. Insbesondere, falls  $w_0 \neq 0$  und  $w_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , sind die Nullstellen gegeben durch*

$$z_j = r^{\frac{1}{n}}(\cos \theta_j + i \sin \theta_j), \quad \text{wobei } \theta_j = \frac{\theta + 2\pi j}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.2.3)$$

*Beweis:* Falls  $w_0 = 0$ , dann ist 0 eine Nullstelle mit Vielfachheit  $n$ . Nehmen wir an, dass  $w_0 \neq 0$  und  $w_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Da die Nullstellen in diesem Fall nicht Null sind, suchen wir eine komplexe Zahl  $0 \neq z = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , sodass  $z^n = w_0$ . Mit der Hilfe der Formel von de Moivre und Bemerkung 3.2.1 (b), erhalten wir, dass

$$R^n = r \quad \text{und} \quad n\varphi = \theta + 2\pi k, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$

Die erste Gleichung gibt uns, dass  $R = r^{\frac{1}{n}}$  gilt. Die zweite Gleichung sagt uns, dass  $\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$ , für  $k \in \mathbb{Z}$ . Es sei, für alle  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$z_j := r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi j}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2\pi j}{n} \right) \right).$$

Wir müssen beweisen, dass die verschiedenen Werte der  $z_j$ s genau die sind, die durch  $j = 0, 1, \dots, n - 1$  gegeben sind, selbst wenn  $j$  über die gesamte Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  läuft. In dieser Hinsicht reicht es aus, zu beachten, dass gegeben  $j \in \mathbb{Z}$  es ein  $j' \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$  gibt, sodass  $j = nm + j'$ , für ein  $m \in \mathbb{Z}$  (warum ist das so?), und dass

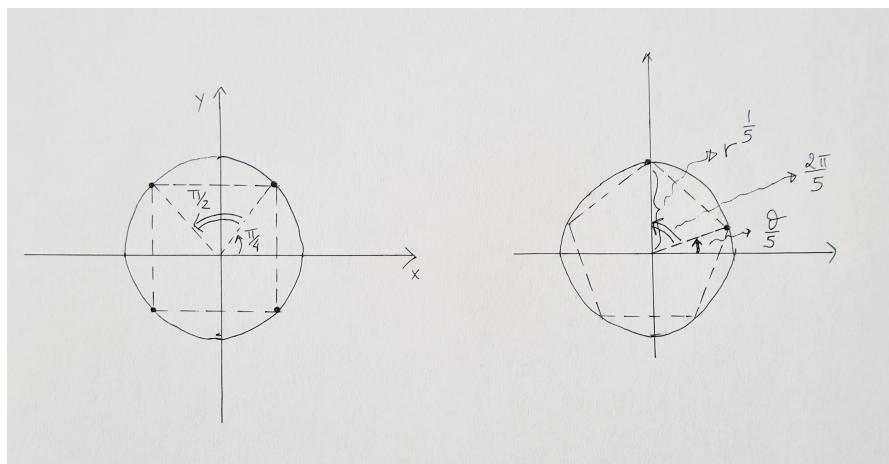
$$\begin{aligned} z_j &= r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi j}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2\pi j}{n} \right) \right) \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi (nm + j')}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2\pi (nm + j')}{n} \right) \right) \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left( \cos \left( \frac{\theta + 2\pi j'}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\theta + 2\pi j'}{n} \right) \right) = z_{j'}. \end{aligned}$$

□

Aus der Form der  $n$ -ten Wurzeln einer komplexen Zahl  $w$ , die durch (3.2.3) gegeben ist, ist leicht zu erkennen, dass sie, wenn sie auf der Ebene dargestellt werden, die Eckpunkte eines regelmäßigen Polygons von  $n$  Seiten bilden. Zum Beispiel sei  $n = 4$  und  $w = -1$ . Da eines der möglichen Argumente von  $w$   $\pi$  ist, sind die Lösungen der Gleichung  $z^4 = w$  gegeben durch

$$z_j = \cos \left( \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

Also bekommen wir ein Quadrat. Im Allgemeinen, falls  $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , dann sind Lösungen von  $z^n = w$  die Eckpunkte eines Polygons, die auf einem Kreis von Radius  $r^{\frac{1}{n}}$  und Zentrum des Ursprungs liegen (siehe Bild unten).



**Übung 3.2.2**

Es sei  $P(z) = az^2 + bz + c$ , wobei  $a, b, c \in \mathbb{C}$  und  $a \neq 0$ . Finden Sie alle Lösungen der Gleichung  $P(z) = 0$ .

(*Hinweis:* Beginnen Sie mit der Bemerkung, dass  $az^2 + bz + c = 0$  genau dann, wenn  $z^2 + \beta z + \gamma = 0$ , wobei  $\beta = \frac{b}{a}$  und  $\gamma = \frac{c}{a}$ . Dann schreiben Sie  $z^2 + \beta z + \gamma$  als  $z^2 + 2\frac{\beta}{2}z + (\frac{\beta}{4})^2 + \gamma - (\frac{\beta}{4})^2$ . Und dann? Sie haben ein “Quadrat fast ergänzt”...) ♠

**Übung 3.2.3**

Es sei  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ , mit  $a_j \in \mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$ .

- Beweisen Sie, dass falls  $z_0$  eine Nullstelle von  $P(z)$  ist (also  $P(z_0) = 0$ ), dann ist auch  $\overline{z_0}$  eine Nullstelle von  $P(z)$ .
- Beweisen Sie, dass falls  $n$  ungerade ist, besitzt  $P(z)$  mindestens eine reelle Nullstelle.



**Übung 3.2.4** • Es sei  $z_0$  eine komplexe Zahl, sodass  $|z_0| = 1$ . Geben Sie eine geometrische Beschreibung der Funktion  $D: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D(z) := z_0 \cdot z$ .

- Beweisen Sie, dass die Wurzeln der Gleichung  $z^n = 1$  eine kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation in  $\mathbb{C}$  bilden.



### 3.3 Zusätzliche Übungen

**Übung 3.3.1** 1. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene alle Punkte  $z = (r, \theta)$ , so dass:

- $r = 3$
- $\theta = \frac{\pi}{3}$
- $\operatorname{Re}(z) \geq -1$  und  $\operatorname{Im}(z) < 3$
- $\operatorname{Re}(z^2) > k$  ( $k \in \mathbb{R}$ )
- $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = k$  ( $k \in \mathbb{R}$ )

2. Es seien  $a$  und  $b$  zwei verschiedene Punkte in der komplexen Ebene. Skizzieren Sie in der komplexen Ebene alle Punkte  $z$ , so dass

$$|z - a| = |z - b|$$

gilt. Geben Sie eine geometrische Beschreibung dieser Punktmenge an.



#### Übung 3.3.2

Es seien  $z$  und  $w$  zwei verschiedene komplexe Zahlen, die beide verschieden von Null sind. Zeigen Sie, dass die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten  $0, z$  und  $w$  gleich

$$\frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{z}w)|$$

ist.



#### Übung 3.3.3

Drücken Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischen Koordinaten aus:

1.  $(1 + i)^{20}$
2.  $(1 - i)^{11}$



#### Übung 3.3.4

Stellen Sie die Lösungen der Gleichung  $z^6 = -1$  in der komplexen Ebenen dar.



#### Übung 3.3.5

Zeigen Sie, dass die Gleichung einer Geraden in der komplexen Ebenen in der folgenden Form

$$az + \bar{a}\bar{z} + c = 0 \text{ mit } a \in \mathbb{C} \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden kann.



**Übung 3.3.6**

Zeigen Sie, dass die Gleichung eines Kreises in der komplexen Ebenen in der folgenden Form

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = 0 \text{ mit } a, b \in \mathbb{C} \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden kann.

**Übung 3.3.7**

Untersuchen Sie die Auswirkung der Transformation  $z \rightarrow 1/z$ , die die komplexe Ebene ohne den Ursprung auf sich selbst abbildet. Beweisen Sie, dass das Bild einer Geraden unter dieser Transformation eine Gerade oder ein Kreis ist und dass das Bild eines Kreises unter dieser Transformation eine Gerade oder ein Kreis ist.

**Übung 3.3.8** 1. Die lexikographische Ordnung  $\leq_{\text{lex}}$  auf  $\mathbb{C}$  wird wie folgt definiert.

Seien  $z = a + ib$  und  $w = c + id$  komplexe Zahlen, dann setzt man  $z <_{\text{lex}} w$ , wenn:

$$a < c \text{ oder } (a = c \text{ und } b < d).$$

Zeigen Sie, dass die lexikographische Ordnung mit der algebraischen Struktur des Körpers der komplexen Zahlen nicht verträglich ist.

## 2. Zeigen Sie, dass es keine totale Ordnung gibt, die mit der algebraischen Struktur des Körpers der komplexen Zahlen verträglich ist.



*Die Lösung kubischer Gleichungen (Scipione dal Ferro (1515), Girolamo Cardano (1545)). Jede Gleichung dritten Grades*

$$y^3 + by^2 + cy + d = 0$$

kann als

$$x^3 + px + q = 0 \tag{3.3.1}$$

geschrieben werden, indem man  $y$  durch  $x - b/3$  ersetzt. Wir suchen nach  $u$  und  $v$ , so dass eine Lösung der Gleichung [3.3.1] die Form  $u + v$  hat. Unter der Annahme dass  $u + v$  eine Lösung der Gleichung [3.3.1] ist, können wir zeigen, dass  $u$  und  $v$  die Gleichungen

$$uv = -\frac{p}{3} \text{ und } u^3 + v^3 = -q$$

erfüllen. Wenn wir die erste Gleichung kubieren, finden wir heraus, dass  $u^3$  und  $v^3$  Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 + qz - p^3/27 = 0$$

sind. Mit anderen Worten:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{und} \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Wir schließen daraus, dass

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (3.3.2)$$

Die Gleichung 3.3.2 stellt neun Zahlen dar, weil jede Kubikwurzel drei Werte hat. Aber diejenigen, die Gleichung 3.3.1 lösen, sind nur drei, weil  $uv = -p/3$  gelten muss. Wenn  $u_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) die Werte der ersten Kubikwurzel sind, sind die Lösungen der Gleichung 3.3.1

$$x_k = u_k - \frac{p}{3u_k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

### Übung 3.3.9

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:

1.  $x^3 - 3x - 4 = 0$

2.  $x^3 - 9x + 10 = 0$



---

---

## KAPITEL 4

---

FOLGEN

## 4.1 Folgen: Allgemeine Eigenschaften

### Definition 4.1.1

Eine **Folge** komplexer (bzw. reeller) Zahlen ist eine Funktion, deren Definitionsmenge die Menge der natürlichen Zahlen ist, und deren Zielmenge die Menge komplexer (bzw. reeller) Zahlen ist, d.h.  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  (bzw.  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

Das Bild  $a(n)$  wird durch  $a_n$  bezeichnet und die Folge  $a$  wird oft durch  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet. Aber beachten Sie, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht als eine Menge betrachtet werden sollte, weil die Ordnung der Elemente bezüglich  $n \in \mathbb{N}$  eine wichtige Rolle spielt. Diese Tatsache wird deutlich, wenn der Grenzwert oder Limes der Folge berücksichtigt wird.

### 4.1.1 Das Konzept von Grenzwert und Konvergenter Folgen

Der Begriff des Grenzwertes ist in seiner Gesamtheit sehr schwer zu verstehen, da er irgendwie den Begriff der Unendlichkeit enthält, der seiner Definition nach in seiner Gesamtheit unserem Intellekt entgeht. Einer der Gründe, warum es schwierig war, reelle Zahlen einzuführen, war genau, weil sie untrennbar mit dem Konzept des Grenzwertes verbunden sind, das wir noch nicht eingeführt hatten und konnten. Der Grenzwert ist daher zusammen mit dem der reellen Zahl eines der ersten “wahren Konzepte der Analyse”, die in der sogenannten Infinitesimalrechnung von grundlegender Bedeutung sind. Es hat Jahre gedauert, um Definitionen zu haben, die heute allgemein als “präzise” akzeptiert werden, und die Geschichte ihrer Einführung ist sehr lang und definitiv nicht einfach. Was wir hier sehen, sind die “sauberer” Konzepte, das Endprodukt langer Diskussionen, die wir hier nicht aufnehmen können.

Beginnen wir mit dem Konzept des Grenzwertes.

### Definition 4.1.2

Eine Folge  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **konvergent**, falls es eine  $l \in \mathbb{C}$  gibt, sodass

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon), \text{ sodass } |a_n - l| < \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0. \quad (4.1.1)$$

Der Wert  $l$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , und wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow l.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**.

Eine Folge, die nach Null konvergiert ( $l = 0$ ) heißt **Nullfolge**.

**Bemerkung 4.1.1**

Wir bemerken, dass um die Konvergenz nachzuprüfen, es genügt (4.1.1) zu beweisen für *kleine Werte* von  $\epsilon$ . In der Tat, angenommen, zum Beispiel, dass (4.1.1) für alle  $\epsilon \leq 1$  gilt; dann erhalten wir für alle anderen Werte  $\epsilon' > 1$

$$|a_n - l| < \epsilon < \epsilon' \quad \text{für alle } n \geq n_0(\epsilon).$$

Also kann man  $n_0(\epsilon')$  als  $n_0(\epsilon)$  definieren, und dann gilt (4.1.1) auch für  $\epsilon > 1$ .  $\diamond$

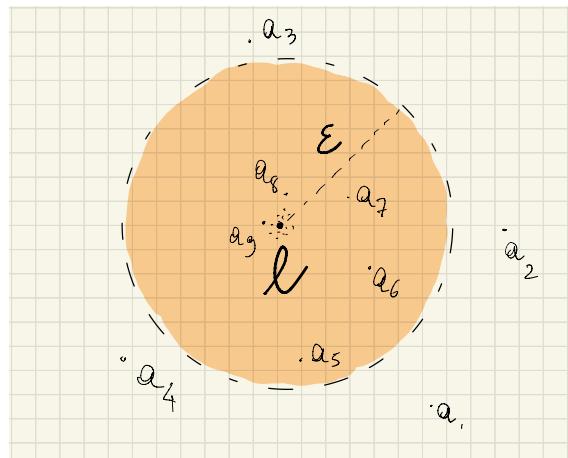
Bevor wir einige Beispiele sehen, versuchen wir, die geometrische Bedeutung dieser Definition zu verstehen. Um dies zu verstehen, ist es unbedingt erforderlich, das Konzept von (offener) *Umgebung* einzuführen. Wir beobachten in dieser Hinsicht, dass gegeben  $l \in \mathbb{C}$  und  $\epsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\epsilon > 0$ , die Punkte, deren Abstand von  $l$  kleiner als  $\epsilon$  ist, durch diese Menge beschrieben werden:

$$D_\epsilon(l) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - l| < \epsilon\} \subseteq \mathbb{C} \quad (4.1.2)$$

(Warum ist es so?). Diese Menge ist daher die Menge von Punkten *innerhalb* einer Kreislinie des  $\epsilon$ -Radius, also eine *offene Kreisscheibe*. Die oben angegebene Definition des Grenzwertes  $l$  bedeutet Folgendes:

*Egal wie klein die Umgebung von  $l$  ist ( $\forall \epsilon > 0$ ), ab einem bestimmten Punkt ( $\forall n \geq n_0$ , wobei  $n_0$  von  $\epsilon$  abhängt, also  $n_0 = n_0(\epsilon)$ ) befinden sich alle Werte von  $a$  in dieser Umgebung ( $|a_n - l| < \epsilon$ ).*

Also, abgesehen von einer endlichen Anzahl von Werten von  $a$ , “ab einem bestimmten Punkt”, liegen alle Werte von  $a$  nahe bei  $l$ , so nah wie wir wollen.



**Bemerkung 4.1.2**

Falls die Folge nur reelle Werte hat, dann ist  $D_\epsilon(l)$  ein offenes Intervall, d.h.

$$D_\epsilon(l) = \{x \in \mathbb{R} \mid l - \epsilon < x < l + \epsilon\} = (l - \epsilon, l + \epsilon).$$

◊

**Beispiel 4.1.1**

Hier sehen wir Beispiele von konvergenten und divergenten Folgen.

1. Die (reelle) Folge  $a_n := (-1)^n$  ist divergent.

In der Tat, bemerken wir, dass  $a_n = 1$ , falls  $n$  gerade ist, und  $a_n = -1$ , falls  $n$  ungerade ist. Da  $|a_n - a_{n+1}| = 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , das heißt, dass die Werte von  $a_n$  nicht “näher und näher kommen”. Präziser gesagt: wenn es einen Grenzwert geben würde, für jedes  $\epsilon > 0$  sollten wir ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$  finden, sodass  $|a_n - l| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Aber das ist ein Widerspruch, weil  $|a_n - a_{n+1}| = 2$ , und, wenn  $(a_n)$  konvergent wäre, sollten wir haben  $|a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - l| + |a_{n+1} - l| \leq 2\epsilon$ , für alle  $n \geq n_0(\epsilon)$ . (Also kann diese Gleichung nicht gelten, falls  $\epsilon < 1$ ). Warum gelten die vorherigen Ungleichungen?

2. Die (reelle) Folge  $a_n := \frac{1}{n}$ , definiert für alle  $n \geq 1$ , konvergiert gegen 0.

Wir müssen beweisen, dass wir für jedes  $\epsilon > 0$  eine  $n_0 = n_0(\epsilon)$  finden können, sodass  $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ . Da  $\frac{1}{n} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$ , und ist  $\frac{1}{n} < \epsilon$  genau dann, wenn  $n > \frac{1}{\epsilon}$  (welches Lemma lässt uns sagen, dass die zwei Ungleichungen äquivalent sind?). Dann können wir  $n_0(\epsilon)$  als  $\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$  wählen.

3. Die (reelle) Folge  $a_n := n$  divergiert, aber in diesem Fall sagt man, dass sie gegen  $+\infty$  divergiert (siehe Definition 4.1.3).

♣

**Bemerkung 4.1.3**

In Kapitel 2 haben wir stabilisierte Folgen definiert (siehe Definition 2.2.3). Es ist einfach zu sehen, dass, falls  $a_n \rightarrow a$ , dann ist  $a$  der Grenzwert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . ◊

Bevor wir die Ergebnisse auf Folgen mit reellen Werten spezialisieren, sehen wir uns einige Eigenschaften an, die im Allgemeinen gelten, auch wenn die Folge komplexe Werte aufweist.

**Lemma 4.1.1**

Es sei  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Folge, die nach  $l \in \mathbb{C}$  konvergiert. Dann, für alle  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$ , sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$|l| - \epsilon < |a_n| < |l| + \epsilon. \quad (4.1.3)$$

*Beweis:* Wir bemerken, dass, nach der Konvergenz der Folge und Lemma 3.1.2 9., erhalten wir, dass für alle  $\epsilon > 0$ , es ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_0$

$$||a_n| - |l|| < |a_n - l| < \epsilon$$

Die Behauptung folgt aus Übung 2.1.3 (ii). □

### Übung 4.1.1

Finden Sie einen geometrischen Beweis der Ungleichung (4.1.3), d.h. finden Sie eine Abbildung, die (4.1.3) erklärt. ♠

### Proposition 4.1.2

Es sei  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Folge.

- (i) Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.
- (ii) Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, dann ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, d.h. dass ein  $R \in \mathbb{R}$ ,  $R > 0$  existiert, sodass  $|a_n| < R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii) Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $l \neq 0$  konvergiert, dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n \neq 0$  für alle  $n > N$ .

Man kann Eigenschaft (ii) so interpretieren: es gibt eine offene Kreisscheibe  $D_R(0)$  mit Zentrum 0 und Radius  $R$ , die alle Werte von  $a$  enthält.

*Beweis:* (i) Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte  $l_1$  und  $l_2$  gibt. Dann müssen wir einen Widerspruch finden. Wir bemerken, dass  $d := |l_1 - l_2|$  positiv ist, weil  $l_1 \neq l_2$ . Darüber hinaus, da  $l_1$  und  $l_2$  Grenzwerte von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind, sollten wir erhalten, dass

- $\forall \epsilon > 0, \exists n_1 = n_1(\epsilon)$ , sodass  $|a_n - l_1| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_1$ , und gleichzeitig
- $\forall \epsilon > 0, \exists n_2 = n_2(\epsilon)$ , sodass  $|a_n - l_2| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_2$ .

Aber dann, für alle  $\epsilon > 0$ , gegeben  $N(\epsilon) := \max\{n_1(\epsilon), n_2(\epsilon)\}$ , wäre

$$d = |l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\epsilon.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, da  $d$  eine feste positive reelle Zahl ist, während  $\epsilon$  eine reelle Zahl ist, die so klein genommen werden kann, wie wir möchten. Präziser gesagt, erhalten wir einen Widerspruch, jedes Mal  $\epsilon < \frac{d}{2}$  (zum Beispiel für  $\epsilon = \frac{d}{3}$ ), weil in diesem Fall wäre

$$d < 2\epsilon < d.$$

- (ii) Für  $\epsilon = 1$ , impliziert Lemma 4.1.1, dass es ein  $n_0$  gibt, sodass für alle  $n \geq n_0$  ist

$$|a_n| < |l| + 1.$$

Wir sind fast fertig, denn die restlichen Werte von  $a_n$  sind endlich! An diesem Punkt besteht der Trick darin, genau  $R$  als  $\max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |l| + 1\}$  zu nehmen und wir erhalten

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, |l| + 1\} = R, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (iii) Es sei  $\epsilon > 0$ , sodass  $\epsilon < |l|$  (zum Beispiel,  $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ ). Aus Lemma 4.1.1 erhalten wir, dass  $|a_n| > |l| - \epsilon > 0$  für alle  $n \geq n_0(\epsilon)$ , und deshalb ist  $a_n \neq 0$ , für alle  $n \geq n_0$ .

□

Im Beispiel 4.1.1 haben wir (nur) ein Beispiel berechnet, und es könnte im Allgemeinen schwierig sein, einen Grenzwert zu finden. Im Folgenden führen wir algebraische Regeln ein, die uns helfen werden, die Berechnung der Grenzwerte durchzuführen.

### Proposition 4.1.3

*Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen, mit  $a_n \rightarrow l$  und  $b_n \rightarrow l'$ . Dann gelten*

1.  $a_n + b_n \rightarrow l + l'$ ;
2.  $\lambda a_n \rightarrow \lambda l$ , für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
3.  $a_n \cdot b_n \rightarrow l \cdot l'$ ;
4. Falls  $l' \neq 0$ , existiert ein  $N$ , sodass die Folge  $\frac{a_n}{b_n}$  wohldefiniert ist für alle  $n \geq N$ , und gegen  $\frac{l}{l'}$  konvergiert.

*Beweis:* 1. Wir müssen beweisen, dass für alle  $\epsilon > 0$ , es ein  $N_0 = N_0(\epsilon)$  gibt, sodass  $|a_n + b_n - (l + l')| < \epsilon$  für alle  $n \geq N_0$ . Da  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergieren, können wir  $n_0 = n_0(\epsilon)$  und  $n'_0 = n'_0(\epsilon)$  finden, sodass

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad \text{und} \quad |b_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n'_0.$$

(Bemerken Sie, dass in der Definition des Grenzwertes,  $\epsilon$  durch  $\frac{\epsilon}{2}$ , oder  $\frac{\epsilon}{3}, \dots$ , ersetzt werden kann; eine beliebige positive Zahl kann als  $\epsilon$ , und auch als  $\frac{\epsilon}{2}$ , oder  $\frac{\epsilon}{3}, \dots$ , geschrieben werden.) Dann ist, für alle  $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ ,  $|a_n - l| + |b_n - l'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ , und

$$|a_n + b_n - (l + l')| \leq |a_n - l| + |b_n - l'| < \epsilon$$

für alle  $\epsilon > 0$ , und alle  $n \geq \max\{n_0, n'_0\} =: N_0$ .

2. **Übung** für Sie.

3. Wir bemerken zunächst, dass

$$|a_n b_n - l l'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - l l'| = |a_n(b_n - l')| + |l'(a_n - l)|.$$

Da  $(a_n)$  konvergiert, gibt uns Proposition 4.1.2 2., dass ein  $R > 0$  existiert, sodass  $|a_n| < R$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann sei  $L := \max\{R, |l'|\} > 0$ . Wir erhalten, dass

$$|a_n(b_n - l')| + |l'(a_n - l)| = |a_n||b_n - l'| + |l'||a_n - l| \leq L(|b_n - l'| + |a_n - l|).$$

Dann, für alle  $\epsilon > 0$ , gibt es eine  $n_0 = n_0(\epsilon)$  und eine  $n'_0 = n'_0(\epsilon)$ , sodass

$$|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2L} \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad \text{und} \quad |b_n - l'| < \frac{\epsilon}{2L} \quad \text{für alle } n \geq n'_0.$$

(Lesen Sie die Bemerkung hier oben im Beweis von 1.) Wir können schließen, dass für alle  $\epsilon > 0$  und alle  $n \geq \max\{n_0(\epsilon), n'_0(\epsilon)\} =: N_0(\epsilon)$  wir erhalten

$$|a_n b_n - l l'| \leq L(|b_n - l'| + |a_n - l|) < \epsilon,$$

und zwar, dass  $a_n b_n \rightarrow l l'$ .

4. Proposition 4.1.2 (iii) sagt uns, dass die Folge  $\frac{a_n}{b_n}$  wohldefiniert ist, für alle  $n > N$ . Um die zweite Behauptung zu beweisen, durch diese Proposition, Teil (iii), genügt es zu beweisen, dass  $\frac{1}{b_n}$  gegen  $\frac{1}{l'}$  konvergiert.

Wir bemerken zuerst, dass nach der Konvergenz und aus Lemma 4.1.1 folgt, dass für alle  $\epsilon > 0$  (und  $\epsilon$  klein, siehe Bemerkung 4.1.1), es eine  $n_0 = n_0(\epsilon)$  gibt, sodass  $|b_n - l'| < \epsilon$  und  $|b_n| > |l'| - \epsilon$ . Nehmen wir an, dass  $\epsilon < \frac{|l'|}{2}$  (das macht Sinn, weil  $l' \neq 0$  nach Voraussetzung). Wir werden in einem Moment sehen, dass diese Annahme nicht einschränkend ist. Dann haben wir, dass  $|b_n| > |l'| - \epsilon > \frac{|l'|}{2}$  ist, und

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{l'} \right| = \left| \frac{b_n - l'}{b_n l'} \right| < \frac{2\epsilon}{|l'|^2}.$$

Dann haben wir bewiesen, dass es für alle  $\epsilon < \frac{|l'|}{2}$ , ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$  gibt, sodass die obige Ungleichheit gilt. Ist das genug? Ja. Die kurze Erläuterung ist, dass die Funktion von  $\epsilon$ , die durch  $\frac{2\epsilon}{|l'|^2}$  definiert wird, so klein wie möglich gemacht werden kann, und Bemerkung 4.1.1 sagt uns, dass kleine Werte von dieser Funktion genug sind. Die längere Erklärung ist die folgende: Es sei  $\epsilon := \frac{\epsilon' |l'|^2}{2}$ . Dann ist die Bedingung  $\epsilon < \frac{|l'|}{2}$  äquivalent zu  $\epsilon' < \frac{1}{|l'|}$ . Mit dem obigen

Verfahren haben wir bewiesen, dass für alle  $\epsilon' < \frac{1}{|l'|}$ , es ein  $n_0 = n_0(\epsilon')$  gibt (das ist genau  $n_0(\epsilon)$ ), sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{l'} \right| < \epsilon'.$$

Bemerkung 4.1.1 sagt uns, dass die Bedingung  $\epsilon' < \frac{1}{|l'|}$  nicht einschränkend ist.  $\square$

### 4.1.2 Reelle Folgen

In diesem Abschnitt lernen wir Eigenschaften von Folgen mit reellen Werten. Also, sei  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Zuerst bemerken wir, dass

$$|a_n - l| < \epsilon \text{ ist äquivalent zu } -\epsilon < a_n - l < \epsilon.$$

(Warum ist das so?)

#### Lemma 4.1.4

*Es seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  zwei reelle Folgen, die gegen  $l$  (bzw.  $l'$ ) konvergieren. Nehmen wir an, dass  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \geq N$ , für ein  $N \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $l \leq l'$ .*

*Beweis:* Wir beweisen dieses Lemma durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass  $l > l'$ . Es sei  $\epsilon$ , sodass  $0 < \epsilon < \frac{l-l'}{2}$ . Dann ist  $l' + \epsilon < l - \epsilon$ , und durch Konvergenz hätten wir, dass  $b_n < l' + \epsilon < l - \epsilon < a_n$ , für alle  $n \geq \max\{N, n_0(\epsilon), n'_0(\epsilon)\}$ . Aber das ist ein Widerspruch, weil wir angenommen haben, dass für alle  $n \geq N$ ,  $a_n \leq b_n$  ist.  $\square$

#### Bemerkung 4.1.4

Bemerken Sie, dass es nicht wahr ist, dass  $a_n < b_n$  impliziert, dass  $l < l'$ ! Zum Beispiel, es seien  $a_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $b_n = \frac{1}{n+1}$ . Dann gilt  $a_n < b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber die Grenzwerte sind  $l = l' = 0$ .  $\diamond$

Noch ein Lemma für reelle Folgen:

#### Lemma 4.1.5

*Es sei  $(a_n)$  eine reelle Folge, die nach  $l > 0$  konvergiert. Dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq N$ , gilt  $a_n > 0$ .*

*Beweis: Übung*  $\square$

Für reelle Folgen kann das folgende Konzept eingeführt werden:

### Definition 4.1.3

Eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt **bestimmt divergent** gegen  $+\infty$  (bzw. gegen  $-\infty$ ), falls

für alle  $N \in \mathbb{R}$ ,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n > N$  (bzw.  $a_n < N$ ), für alle  $n \geq n_0$ .

Wir schreiben  $a_n \rightarrow \infty$  (bzw.  $a_n \rightarrow -\infty$ ) oder  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$   
(bzw.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ ).

Das impliziert, dass, falls  $a_n \rightarrow \infty$ , für  $n$  groß genug, die Werte  $a_n$  beliebig groß sind (und falls  $a_n \rightarrow -\infty$ , für  $n$  groß genug, alle Werte von  $-a_n = |a_n|$  beliebig groß sind). Zum Beispiel ist es einfach nachzuprüfen, dass die Folgen  $\{n\}, \{n^2\}$  bestimmt divergent gegen  $+\infty$  sind.

### Übung 4.1.2

Beweisen Sie, dass falls  $a_n \rightarrow +\infty$ , oder  $a_n \rightarrow -\infty$ , dann  $\exists N \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n \neq 0$  für alle  $n \geq N$ , und dass die Folge  $\frac{1}{a_n}$ , die definiert für alle  $n \geq N$  ist, eine Nullfolge ist, d.h.  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ . ♠

### Satz 4.1.6 (i) (Einschließungssatz)

Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reelle Folgen, mit  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle  $n \geq N$ , für ein  $N \in \mathbb{N}$ . Falls  $a_n \rightarrow l$  und  $c_n \rightarrow l$ , dann ist auch  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, und gilt  $b_n \rightarrow l$ .

(ii) Es seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reelle Folgen, mit  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \geq N$ , für ein  $N \in \mathbb{N}$ . Dann, falls  $a_n \rightarrow +\infty$ , wir haben  $b_n \rightarrow +\infty$ , und falls  $b_n \rightarrow -\infty$ , wir haben  $a_n \rightarrow -\infty$ .

*Beweis:* (i) Da  $a_n \rightarrow l$  und  $c_n \rightarrow l$ , für alle  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0(\epsilon)$  und  $n'_0(\epsilon)$ , sodass für alle  $n \geq \max\{n_0(\epsilon), n'_0(\epsilon)\}$  gelten sowohl  $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$  als auch  $l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$ . Da, nach Voraussetzung,  $a_n \leq b_n \leq c_n$  für alle  $n \geq N$ , wir erhalten, dass für jedes  $\epsilon > 0$  und jedes  $n \geq \max\{n_0(\epsilon), n'_0(\epsilon), N\}$  gelten

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon,$$

und zwar, dass  $b_n \rightarrow l$ .

(ii) **Übung** für Sie. □

**Bemerkung 4.1.5**

Bemerken Sie, dass, falls in  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , eine oder beide  $\leq$  mit  $<$  ersetzt werden, würde die Behauptung des Einschnürungssatzes noch gelten.  $\diamond$

**Beispiel 4.1.2****Wichtige Beispiele:**

1. Es sei  $a \in \mathbb{R}$  eine positive reelle Zahl und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge  $a_n := \sqrt[n]{a}$ . Dann

$$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1.$$

Es gibt drei Fälle:

- Falls  $a = 1$ , dann ist die Behauptung trivial;
- Falls  $a > 1$ : Wir können  $\sqrt[n]{a}$  als  $1 + x_n$  schreiben, wobei  $x_n > 0$  ist<sup>1</sup>. Wir müssen zeigen, dass  $x_n \rightarrow 0$ . Es genügt die Bernoullische Ungleichung (Satz 2.1.4) und den Einschnürungssatz zu benutzen. In der Tat, Satz 2.1.4 gibt uns, dass  $a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n$ , also  $x_n \leq \frac{a-1}{n}$ . Da  $\frac{a-1}{n} \rightarrow 0$  (warum?) und dazu  $0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}$ , der Einschnürungssatz impliziert, dass  $x_n \rightarrow 0$ .
- Falls  $a < 1$ : wir definieren einfach  $b$  als  $\frac{1}{a}$ , die größer als 1 ist. Nach (ii) erhalten wir, dass  $\sqrt[n]{b} \rightarrow 1$ . Da  $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ , Proposition 4.1.3 gibt uns, dass  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ .

2. Die Folge  $\{\sqrt[n]{n}\}$  konvergiert, und präziser gesagt,

$$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

Um diesen Grenzwert zu beweisen schreiben wir  $\sqrt[n]{n}$  als  $1 + x_n$ , mit  $x_n > 0$  (Warum können wir  $\sqrt[n]{n}$  so schreiben?). Dann implizieren der Binomische Lehrsatz (Satz 1.4.6) und die Tatsache, dass  $x_n > 0$  ist, dass

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_n^k \geq \binom{n}{2} x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Dann, für alle  $n > 1$  gilt  $0 < x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ , und der Einschnürungssatz impliziert, dass  $x_n \rightarrow 0$ , und deshalb  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

3. (**Geometrische Folge**) Es sei  $q \in \mathbb{R}$  und  $\{q^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  die sogenannte geometrische Folge. Dann

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |q| < 1 \\ 1 & \text{falls } q = 1 \\ +\infty & \text{falls } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{falls } q \leq -1. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> Warum? Man sollte zuerst beweisen, dass  $x > 1$  genau dann, wenn  $x^n > 1$ ; und dann...?

Wir beweisen nur, dass  $q^n \rightarrow 0$  falls  $0 < q < 1$ . Die anderen Fälle sind eine **Übung** für Sie. Wir schreiben  $q$  als  $\frac{1}{1+p}$  mit  $p > 0$ . Dann impliziert die Bernoullische Ungleichung (Satz 2.1.4), dass

$$0 < q^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np} < \frac{1}{np}$$

und da  $\frac{1}{np} \rightarrow 0$ , erhalten wir aus dem Einschnürungssatz, dass  $q^n \rightarrow 0$ .



Eine wichtige Klasse von Folgen ist gegeben durch die Folgenden:

#### Definition 4.1.4

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen. Dann heißt sie

- **monoton wachsend** oder **steigend**, falls  $a_n \leq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ;
- **monoton fallend**, falls  $a_n \geq a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Die Wichtigkeit dieser Klasse von Folgen liegt im folgenden Ergebnis:

#### Satz 4.1.7

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle monoton wachsende oder monoton fallende Folge.

- (i) Dann ist  $(a_n)$  beschränkt genau dann, wenn sie konvergiert. In diesem Fall, es sei  $l$  der Grenzwert. Dann ist

$$l = \begin{cases} \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } (a_n) \text{ monoton wachsend ist und} \\ \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } (a_n) \text{ monoton fallend ist.} \end{cases}$$

- (ii) Falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht beschränkt ist, dann  $a_n \rightarrow +\infty$ , falls sie monoton wachsend ist und  $a_n \rightarrow -\infty$ , falls sie monoton fallend ist.

Wir bemerken zuerst, dass, falls  $(a_n)$  beschränkt ist, ist die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ein wesentlicher Bestandteil des Beweises dieses Satzes.

*Beweis:* (i) Wir haben schon bewiesen, dass eine konvergente Folge immer beschränkt ist (siehe Proposition 4.1.2 (ii)). Die überraschendste Tatsache ist also, dass falls eine monoton wachsende Folge beschränkt ist, sie konvergiert. (Die Voraussetzung, dass  $(a_n)$  monoton wachsend oder fallend ist, ist essenziell, weil im Allgemeinen beschränkte Folgen nicht konvergent sind, siehe z. B. Beispiel 4.1.1 1.).

Es sei dann  $(a_n)$  eine monoton wachsende, beschränkte Folge. Wir müssen beweisen, dass sie konvergiert und dass der Grenzwert genau  $\sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\} =: l$  ist. Per definitionem von Supremum haben wir, dass

- (a)  $a_n \leq l$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und
- (b) für alle  $\epsilon > 0$ , es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass  $l - \epsilon < a_{n_0}$ .

Da nach Voraussetzung  $(a_n)$  monoton wachsend ist, erhalten wir aus (a) und (b), dass für alle  $\epsilon > 0$ , es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, sodass für alle  $n \geq n_0$  gilt

$$l - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq l,$$

und zwar, dass  $a_n \rightarrow l$ .

Für monoton fallende Folgen genügt es zu bemerken, dass  $(a_n)$  monoton fallend ist genau dann, wenn  $(-a_n)$  monoton wachsend ist und dass  $\inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{-a_n, n \in \mathbb{N}\}$  (Warum ist es so?).

### (ii) Übung.

□

## Eulersche Zahl

Der folgende Satz erlaubt uns eine wichtige (irrationale, transzendente) Zahl zu definieren, und zwar die **Eulersche Zahl**.

### Satz 4.1.8

Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  definiert als

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ist konvergent. Der Grenzwert wird **Eulersche Zahl** genannt und mit "e" bezeichnet.

Wie so oft in der Mathematik, berechtigt uns das Ergebnis eines Satzes zu einer neuen Definition. In diesem Fall ist der durch diese Folge definierte Grenzwert (der dank des Satzes existiert und endlich ist) die wichtige Eulersche Zahl  $e$ . Wie wir später sehen werden, ist dies nicht die einzige Möglichkeit, diese Zahl einzuführen (siehe Beispiel 6.2.1). Es wurde von Bernoulli im 17. Jahrhundert auf diese Weise eingeführt. Seine Irrationalität wurde von Euler im 18. Jahrhundert demonstriert, und einige Jahre später bewies Hermite seine Transzendenz. Wie wir später sehen werden, ist diese Zahl für die Analysis, und im Allgemeinen für die Mathematik, von grundlegender Bedeutung, beispielsweise als Basis von Logarithmen.

*Beweis:* Dank Satz 4.1.7 reicht es aus zu beweisen, dass  $(a_n)$  monoton (wachsend) und beschränkt ist.

(i)  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist monoton wachsend.

Wir bemerken zuerst, dass  $a_1 = (1+1)^1 = 2$ , und dass für alle  $n \geq 2$  wir haben:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^n}{\frac{n-1}{n}} = \\ &= \frac{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Wir möchten nun die Bernoullische Ungleichung (Satz 2.1.4) benutzen. Wir brauchen jedoch eine stärkere Ungleichung als die, die wir bewiesen haben, und zwar:

$$(1+x)^n > 1+nx \quad (4.1.4)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , und alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $1+x \geq 0$  und  $x \neq 0$ . Der Beweise kann aus dem Beweis des Satzes 2.1.4 adaptiert werden, und wir überlassen ihn dem gewissenhaften Leser. Wir bemerken dann, dass  $1 - \frac{1}{n^2} \geq 0$  (warum?), und (4.1.4) impliziert, dass für alle  $n \geq 2$  gilt

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \quad (4.1.5)$$

Mit der Hilfe der obigen Gleichheiten und (4.1.5) haben wir bewiesen, dass für alle  $n \geq 2$  gilt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{n}} > \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1,$$

oder, mit anderen Worten, dass  $a_n > a_{n-1}$  für alle  $n \geq 2$ . Also ist  $(a_n)_{n \geq 1}$  monoton wachsend.

(ii)  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist beschränkt.

Wir definieren die folgende Folge  $(b_n)_{n \geq 1}$ ,

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Mit einem ähnlichen Verfahren wie dem vorherigen, ist es leicht zu beweisen (oder, mit anderen Worte, dies ist eine Übung für Sie), dass für alle  $n \geq 2$  ist

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n}.$$

Aus (4.1.4) folgt es, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1}$$

und offensichtlich  $1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$ , und wir können schließen, dass

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} < \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1,$$

und deshalb  $b_n < b_{n-1}$  für alle  $n \geq 2$ . Dazu bemerken wir, dass  $b_1 = 4$ , also  $b_n \leq 4$  für alle  $n \geq 1$ .

Endlich bemerken wir, dass  $1 + \frac{1}{n} > 1$  impliziert, dass  $a_n < b_n$  für alle  $n \geq 1$ , also

$$2 = a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1 = 4, \quad (4.1.6)$$

und  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist beschränkt.

Eigentlich folgt aus (4.1.6), dass  $a_n < b_k$  für alle  $k \geq n$ , und kann man die Werte von  $b_n$  benutzen, um den Grenzwert  $e$  anzugeleichen. Eine grobe Annäherung an  $e$  (aber denken Sie daran, dass  $e$  irrational ist!) ist gegeben durch

$$e = 2.7182818284\dots$$

(aber die Punkte bleiben müssen, weil  $e$  irrational ist! Sie bedeuten in diesem Fall, dass die Folge von Dezimalstellen nicht periodisch fortgesetzt wird).  $\square$

## 4.2 Häufungspunkte und Bolzano-Weierstraß

Nun führen wir das Konzept vom Häufungspunkt ein.

### Definition 4.2.1

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Folge. Dann ist  $a \in \mathbb{C}$  ein **Häufungspunkt der Folge**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  falls,

(\*) für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es unendlich viele Elemente der Folge  $(a_n)$  in  $D_\epsilon(a)$ .

### Bemerkung 4.2.1

Später in dieser Vorlesung werden wir ein anderes Konzept des Häufungspunktes einführen, das sehr unterschiedlich vom Konzept des Häufungspunktes für Folgen ist, d.h. das Konzept von **Häufungspunkt für eine Teilmenge** von  $\mathbb{C}$ <sup>2</sup>. Gegeben eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{C}$ , wir sagen, dass  $z_0$  ein Häufungspunkt für  $A$  ist, wenn

<sup>2</sup>oder im Allgemeinen, für Teilmengen einer Menge, wo das Konzept von Umgebung definiert werden kann.

(\*\*) für alle  $\epsilon > 0$ , enthält  $D_\epsilon(a) \setminus \{a\}$  ein Element von  $A$ .

Mit dieser Definition können wir wirklich sehen, dass die Punkte der Teilmenge  $A$  sich nahe  $a$  anhäufen (siehe Abbildung 4.2.1).

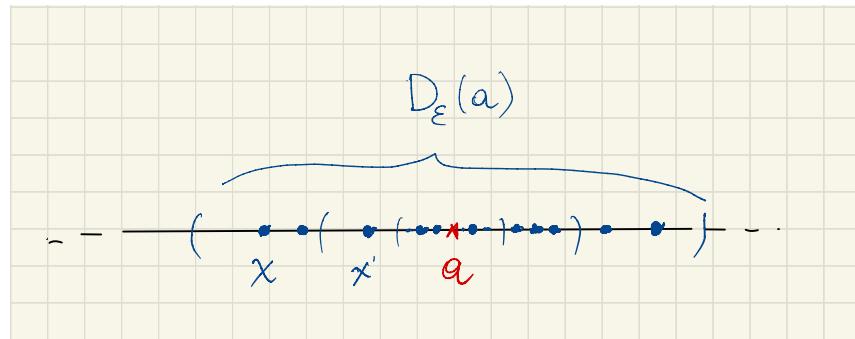


Figure 4.2.1

Andererseits ist diese Anhäufung für die Häufungspunkte einer Folge möglicherweise nicht sichtbar, wenn die Werte der Folge auf der komplexen Ebene dargestellt werden. Zum Beispiel, falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die konstante Folge ist, d.h. es ein  $a \in \mathbb{C}$  existiert, sodass  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , der einzige Häufungspunkt der Folge ist  $a$  (warum ist es so?), aber es gibt keine Punkte in  $D_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ , für alle  $\epsilon > 0$ . Also wäre in diesem Fall  $a$  kein Häufungspunkt der Teilmenge der Werte von  $(a_n)_{\mathbb{N}}$ , die genau  $\{a\}$  ist. In der Tat besitzt die Teilmenge  $\{a\}$  keine Häufungspunkte.

Wenn Sie etwas verwirrt sind, ist das wie immer ein gutes Zeichen. Aber in diesem Fall müssen Sie die nächsten zwei Minuten damit verbringen, "Ihre mentalen Knoten zu lösen".

◇

In diesem Abschnitt sehen wir jedoch nur das Konzept der Häufungspunkte für eine Folge.

**Beispiel 4.2.1** • Der (einige) Häufungspunkt der Folge  $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ist 0. In der Tat enthält die Umgebung  $D_\epsilon(0)$  alle Elemente  $a_n$  mit  $n \geq \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor$ . (Warum?) Ich lasse Sie beweisen, dass 0 der einzige Häufungspunkt ist.

- Für die Folge  $(-1)^n$  sind die Häufungspunkte 1 und -1. (Bitte prüfen Sie diese Tatsachen nach.)
- Für die Folge  $a_n = \sin(n\pi)$ , was sind die Häufungspunkte?
- Besitzt die Folge  $\sin(n)$  Häufungspunkte?

♣

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, die Häufungspunkte explizit zu finden. In der Mathematik besteht ein erster Schritt darin, zu wissen, dass diese Punkte *sicherlich existieren* (ein anderes Problem besteht darin sie später *explizit zu finden*). Dies ist der Inhalt eines wichtigen Satzes, für den wir ein neues Konzept benötigen, das eng mit dem Konzept des Häufungspunktes verbunden ist.

### Definition 4.2.2

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Folge und  $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von natürlichen Zahlen, sodass  $n_k < n_{k+1}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann heißt  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine **Teilfolge** von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Aus der Definition folgt, dass  $n_k \rightarrow +\infty$ , für  $k \rightarrow +\infty$ .

Zum Beispiel, falls  $n_k := 2k+1$ , ist  $(a_{n_k}) = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}$  eine Teilfolge. Also, muss die Folge der Indizes *strikt monoton wachsend* sein, d.h.  $n_{k+1} > n_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  (und nicht nur  $n_{k+1} \geq n_k$ ).

Der nächste wichtige Satz erklärt uns die Rolle der Teilfolgen.

### Satz 4.2.1

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine komplexe Folge. Dann ist  $a \in \mathbb{C}$  ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann, wenn eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  existiert, die gegen  $a$  konvergiert.

Eine wichtige Bemerkung ist, dass es sein kann, dass die ganze Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  *nicht konvergiert*. Es gibt sehr viele Beispiele dieser Tatsache und wir haben schon eins gesehen: Die Folge  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist nicht konvergent (siehe Beispiel 4.1.1), aber die Teilfolgen  $((-1)^{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  (hier  $n_k = 2k$ ) und  $((-1)^{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  (hier  $n_k = 2k+1$ ) sind konvergent, weil sie konstant sind ( $(-1)^{2k} = 1$  und  $(-1)^{2k+1} = -1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ ). Können Sie mehr Beispiele finden?

### Übung 4.2.1

Beweisen Sie, dass falls  $a_n$  gegen  $l$  konvergiert, dann konvergiert gegen  $l$  auch eine beliebige Teilfolge. ♠

*Beweis:* • Wir beweisen zuerst die Implikation “ $\implies$ ”: Also, es sei  $a$  ein Häufungspunkt der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; wir müssen eine Teilfolge finden, die gegen  $a$  konvergiert. Es sei  $\epsilon_n = \frac{1}{n+1}$  und  $D_{\epsilon_n}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \epsilon_n\}$ , die offene Kreisscheibe mit Zentrum  $a$  und Radius  $\epsilon_n$ . Da  $a$  ein Häufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist, gibt es in  $D_{\epsilon_n}(a)$  unendlich viele Elemente der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; es sei  $a_{n_1}$  ein Element, das  $D_{\epsilon_1}(a)$  gehört, für ein  $n_1 \in \mathbb{N}$ . Nehmen wir nun  $D_{\epsilon_2}(a)$ : da  $D_{\epsilon_2}(a)$  unendlich viele Elemente der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  enthält, können wir ein  $n_2 \in \mathbb{N}$  finden, sodass  $n_2 > n_1$  und  $a_{n_2} \in D_{\epsilon_2}(a)$ . Gehen wir also so weiter, aber genauer gesagt, verwenden wir die Induktion: Nehmen wir an, wir

haben Elemente  $a_{n_h}$  gefunden, für  $h = 1, \dots, k-1$ , sodass  $a_{n_h} \in D_{\epsilon_h}(a)$  für alle  $h = 1, \dots, k-1$  und  $n_{k-1} > n_{k-2} > \dots > n_1$ . Dann, per definitionem von Häufungspunkt, besitzt  $D_{\epsilon_k}(a)$  unendlich viele Elemente von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ; es sei  $I_k$  die Indexmenge dieser Elemente, die unendlich ist. Dann besitzt die Menge  $I_k \setminus \{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}\}$  ein Element  $l$ , sodass  $l > n_{k-1}$  ist (Warum ist es so?). Es sei  $n_k$  ein solches Element. Dann haben wir ein Element  $a_{n_k}$  gefunden, sodass  $a_{n_k} \in D_{\epsilon_k}(a)$ , und sodass  $n_k > n_{k-1} > n_{k-2} > \dots > n_1$ .

Was zu beweisen bleibt, ist, dass  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert. Zuerst bemerken wir, dass  $D_{\epsilon_{k'}}(a) \subsetneq D_{\epsilon_k}(a)$  für alle  $k' \in \mathbb{N}$  mit  $k' > k$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $a_{n_{k'}} \in D_{\epsilon_k}(a)$  für alle  $k' > k$  und alle  $k \in \mathbb{N}$ . Per definitionem von  $D_{\epsilon_k}(a)$ , heißt dies, dass

$$|a_{n_{k'}} - a| < \epsilon_k, \quad \text{für alle } k' > k.$$

Reicht dies aus, um zu beweisen, dass  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert? Fast. Wir müssen im Prinzip alle  $\epsilon > 0$  erlauben und nicht nur die Werte der Folge  $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , wobei  $\epsilon_k = \frac{1}{k+1}$ . Aber diese Folge konvergiert gegen 0 und deshalb sind ihre Werte so klein wie wir wollen. In der Tat, für alle  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $k = k(\epsilon)$ , sodass  $\frac{1}{k+1} < \epsilon$  (was ist genau  $k$ ?). Dann haben wir bewiesen, dass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $k = k(\epsilon)$  gibt, sodass für alle  $k' > k$  ist

$$|a_{n_{k'}} - a| < \epsilon_k < \epsilon, \quad \text{für alle } k' > k,$$

und endlich erhalten wir die Konvergenz von  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ .

- Nun beweisen wir “ $\Leftarrow$ ”: Es sei  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge, die gegen  $a$  konvergiert. Das heißt, dass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $k = k(\epsilon)$  gibt, sodass

$$|a_{n_{k'}} - a| < \epsilon, \quad \text{für alle } k' > k.$$

Das bedeutet, dass  $D_\epsilon(a)$  unendlich viele Elemente von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt und zwar die Elemente  $a_{n_{k'}}$ , für alle  $k' > k = k(\epsilon)$ . Dann ist  $a$  ein Haufungspunkt von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . □

### Übung 4.2.2

Es ist immer eine gute Übung in den Vorlesungen von Mathematik, die Beweise für einige konkrete Beispiele zu wiederholen. Versuchen Sie das obige Verfahren zu wiederholen, für die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , oder  $a_n = (-1)^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , oder  $a_n = \frac{1}{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . ♠

Natürlich, in den Folgen der obigen Übung, haben wir schon bemerkt, dass die Folgen einen Häufungspunkt besitzen (oder, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzen). Aber gibt es eine Kategorie von Folgen, für die wir sicher sind, dass sie Häufungspunkte besitzen? (oder, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzen?)

Wie bereits erwähnt, gibt es einen großen Unterschied zwischen dem Auffinden eines Häufungspunktes und dem Wissen, dass er existiert. Manchmal muss man sich in der Mathematik auf wichtige Theoreme berufen, um zu wissen, dass ein Objekt existiert, anstatt zu versuchen, es explizit zu finden. Der nächste Satz ist von grundlegender Bedeutung, um die Existenz von Häufungspunkten (oder konvergenten Teilfolgen) zu kennen und wir werden in unserem mathematischen Leben viele Beispiele dafür sehen.

**Satz 4.2.2 (Bolzano-Weierstraß)**

Jede beschränkte reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine konvergente Teilfolge und deshalb einen Häufungspunkt.

Zum Beispiel erlaubt uns der Satz von Bolzano-Weierstraß zu sagen, dass die Folge  $\{\sin(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  einen Häufungspunkt besitzt (weil  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ), selbst wenn es nicht einfach ist, ihn explizit zu finden.

*Beweis:* Auch der Beweis dieses Satzes, wie der des Satzes 4.1.7, wird die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  nutzen.

Wir beginnen mit der Definition der folgenden Folge: Für jede  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $A_n := \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$  und  $b_n := \inf A_n$ . Da  $A_n \supseteq A_{n+1}$ , wir haben  $b_n \leq b_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (siehe Übung 2.1.7). Dann ist die Folge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend. Dazu ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und deshalb ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (Warum? Diese Tatsache benötigt einen kleinen Beweis, der für Sie eine Übung ist). Dann, aus Satz 4.1.7, können wir schließen, dass  $b_n$  gegen ein  $b \in \mathbb{R}$  konvergiert. Die Behauptung ist, dass es eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt, die nach  $b$  konvergiert. Im nächsten Abschnitt erstellen wir diese Teilfolge.

Per definitionem von Infimum der Teilmenge  $A_0$  wissen wir, dass  $b_0 + 1$  keine untere Schranke von  $A_0$  ist. Deshalb gibt es ein  $n_1 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , sodass  $a_{n_1} < b_0 + 1$ . Nehmen wir nun  $b_{n_1+1} = \inf A_{n_1+1}$ . Da  $b_{n_1+1} + \frac{1}{2}$  keine untere Schranke von  $A_{n_1+1}$  ist, gibt es ein  $n_2 \in \{n_1 + 1, n_1 + 2, \dots\}$  (also, ist  $n_2 > n_1$ ), sodass  $a_{n_2} < b_{n_1+1} + \frac{1}{2}$ . Durch Wiederholen dieser Prozedur können wir eine Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus den Indizes  $n_k$  konstruieren, die gegen  $b$  konvergiert.

Genauer gesagt kann Induktion verwendet werden, um die Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  zu konstruieren und zwar:

- Wir haben schon  $n_1$  und  $a_{n_1}$  oben definiert.
- Angenommen, dass es Indizes  $n_1, n_2, \dots, n_k$  gibt, sodass  $n_k > n_{k-1} > \dots > n_1$  und sodass

$$a_{n_h} < b_{n_{h-1}+1} + \frac{1}{h} \quad \text{für alle } h = 1, \dots, k.$$

Dann werden wir  $n_{k+1}$  so definieren: Weil  $b_{n_k+1} + \frac{1}{k+1}$  kein Infimum der Menge  $A_{n_k+1} = \{a_{n_k+1}, a_{n_k+2}, \dots\}$  ist, gibt es einen Index in  $\{n_k + 1, n_k + 2, \dots\}$ , den

wir mit  $n_{k+1}$  bezeichnen, sodass  $a_{n_{k+1}} < b_{n_{k+1}} + \frac{1}{k+1}$ . Wir bemerken, dass  $n_{k+1} > n_k$ .

Es sei dann  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  die Teilfolge, die von den Indizes  $(n_k)$  definiert wird und wir bemerken, dass

$$b_{n_k} \leq a_{n_k} < b_{n_{k-1}+1} + \frac{1}{k}, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

Nun genügt es zu bemerken, dass  $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(b_{n_{k-1}+1})_{k \in \mathbb{N}}$  Teilstufen von  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind und deshalb gegen  $b$  konvergieren (siehe Übung 4.2.1); dazu  $\frac{1}{k+1} \rightarrow 0$ . Dann erlauben uns der Einschnürungssatz (Satz 4.1.6 (i)), zusammen mit Bemerkung 4.1.5, zu schließen, dass  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  nach  $b$  konvergiert.

Die Existenz eines Häufungspunktes wird garantiert durch Satz 4.2.1.  $\square$

### Korollar 4.2.3

Jede beschränkte komplexe Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine konvergente Teilfolge und deshalb, einen Häufungspunkt.

*Beweis:* Es sei  $a_n := x_n + i y_n$ , wobei  $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, sind auch die reellen Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. In der Tat, falls  $|a_n| < R$  für ein  $R > 0$ , dann sind auch  $|x_n| < R$  und  $|y_n| < R$ . (Warum?)

Aus dem Satz 4.2.2 von Bolzano-Weierstraß können wir eine Teilfolge von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  finden,  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert. Wir bemerken, dass die Teilfolge  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist (aber nicht unbedingt konvergent) und deshalb, aus Satz 4.2.2 können wir eine Teilfolge von  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  finden,  $(y_{n_{k_h}})_{h \in \mathbb{N}}$ , die gegen ein  $y \in \mathbb{R}$  konvergiert. Da auch die Teilfolge  $(x_{n_{k_h}})_{h \in \mathbb{N}}$  gegen  $x$  konvergiert (Übung 4.2.1), schließen wir, dass die Teilfolge  $(a_{n_{k_h}} = x_{n_{k_h}} + i y_{n_{k_h}})_{h \in \mathbb{N}}$  der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach  $x + iy$  konvergiert.  $\square$

Eine weitere wichtige Kategorie von Folgen ist die von Cauchy-Folge gegebene:

### Definition 4.2.3

Eine komplexe Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird **Cauchy-Folge** genannt, falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\epsilon), \text{ sodass } |a_n - a_m| < \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n_0. \quad (4.2.1)$$

In einer Cauchy-Folge kommen dann die Werte von  $a_n$  immer näher, wenn  $n$  groß wird. Dies ist auch ein Phänomen, das wir von konvergenten Folgen erwarten; in der Tat gilt das folgende Ergebnis:

### Proposition 4.2.4

Jede konvergente komplexe Folge ist eine Cauchy-Folge.

*Beweis:* Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist, gibt es ein  $l \in \mathbb{C}$ , sodass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$  gibt, mit  $|a_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$ , für alle  $n \geq n_0$ . Dann, für alle  $n, m \geq n_0(\epsilon)$  erhalten wir

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m| \leq |a_n - l| + |a_m - l| < \epsilon.$$

□

Wir stellen fest, dass wir in dieser Proposition nicht die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ausgenutzt haben, auf die wir stattdessen in Sätzen 4.1.7 und 4.2.2 zurückgegriffen haben.

Die Umkehrung dieser Proposition ist ebenfalls wahr, aber ihre Gültigkeit hängt stark von der Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  ab.

#### Satz 4.2.5

Jede komplexe Cauchy-Folge ist konvergent.

*Beweis:* Wir beweisen diesen Satz in zwei Schritten:

- Wir beweisen zuerst, dass jede Cauchy-Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist.

Es sei  $\epsilon = 1$  und  $n_0$ , sodass für alle  $n, m \geq n_0$ ,  $|a_n - a_m| < 1$ . Dann erhalten wir, dass

$$|a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Also ist die Folge  $(a_n)$  für  $n$  groß genug ( $n \geq n_0$ ) beschränkt. Aber die anderen Werte  $(a_0, \dots, a_{n_0-1})$  sind endlich, deshalb können wir schließen, dass

$$|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weil  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, impliziert der Satz 4.2.2 von Bolzano-Weierstraß (oder, präziser gesagt, Korollar 4.2.3), dass es eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gibt. Es sei  $l \in \mathbb{C}$ , sodass  $a_{n_k} \rightarrow l$ . Der zweite Schritt ist, das Folgende zu beweisen:

- Falls eine Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, mit Grenzwert  $l$ , dann konvergiert die ganze Folge gegen  $l$ .

(a) Da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy ist, wissen wir, dass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$  gibt, sodass für alle  $n, m \geq n_0$  ist  $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$ .

(b) Da  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  nach  $l$  konvergiert, wissen wir, dass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $k_0 = k_0(\epsilon)$  gibt, sodass für alle  $k \geq k_0$  ist  $|a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2}$ . Wir bemerken, dass, aus der Definition einer Teilfolge,  $k \geq k_0$  ist genau dann, wenn  $n_k \geq n_{k_0}$  ist.

Es sei dann  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $n_k \geq \max\{n_{k_0(\epsilon)}, n_0(\epsilon)\}$ . Dann für alle  $n \geq n_0(\epsilon)$  haben wir

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Wir möchten noch einmal unterstreichen, dass in diesem Satz die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  verwendet wurde (weil wir Satz 4.2.2 verwendet haben).

## 4.3 Zurück in die Vergangenheit

Aus Kapitel 2 erinnern wir uns daran, dass uns nach Einführung der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  als Dezimalzahlen ein genauer Beweis fehlte, um zu beweisen, dass  $\mathbb{R}$  ein ordnungsvollständig angeordneter Körper war (Satz 2.2.3). An diesem Punkt sind wir bereit für einen strengen Beweis von Satz 2.2.3, den wir hier nochmal schreiben:

### Satz 4.3.1

*Es sei  $A$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , definiert als die Menge der Dezimalzahlen. Falls  $A$  nach oben beschränkt ist, dann besitzt  $A$  ein Supremum.*

*Beweis:* Die Idee ist, eine beschränkte monoton wachsende Folge  $(x_n)$  zu bilden, damit, aus Lemma 2.2.1,  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$  für ein  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  und die Konstruktion von  $(x_n)$  zu benutzen um zu beweisen, dass  $\bar{x} = \sup A$ .

Da  $A$  nach oben beschränkt ist, gibt es  $y_0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $a \leq y_0$  für alle  $a \in A$ . Es sei  $x_0 \in A$ . Schneiden wir das Intervall  $[x_0, y_0] = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq x \leq y_0\}$  in zwei Hälften und erhalten die Intervalle  $[x_0, c]$  und  $[c, y_0]$ , wobei  $c = \frac{x_0+y_0}{2}$ . Falls  $[c, y_0]$  kein Element von  $A$  enthält, dann wählen wir das Intervall  $[x_0, c]$ , sonst wählen wir  $[c, y_0]$ . Wir bezeichnen das neue gewählte Intervall mit  $[x_1, y_1]$ . Dann wiederholen wir dasselbe Verfahren und finden eine Folge von Intervallen  $[x_n, y_n]$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (a)  $[x_0, y_0] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq \cdots \supseteq [x_n, y_n] \supseteq \cdots$  (*Intervallschachtelung*);
- (b) Die Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ist durch Konstruktion monoton wachsend und nach oben beschränkt (in der Tat, ist  $x_n \leq y_0$  für alle  $n$ ); dann gibt uns Lemma 2.2.1, dass es ein  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $x_n \rightharpoonup \bar{x}$ ;
- (c) Durch Konstruktion ist  $[x_n, y_n] \cap A \neq \emptyset$  und  $y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n}$ ;
- (d)  $y_n \geq x$  für alle  $x \in A$ .

Wir bemerken dazu, dass durch Konstruktion  $x_n < y_k$  für alle  $n, k \in \mathbb{N}$  ist und deshalb ist  $x_n \leq \bar{x} \leq y_k$ , für alle  $n, k \in \mathbb{N}$ . Endlich erhalten wir, dass

$$x_n \leq \bar{x} \leq y_n. \quad (4.3.1)$$

Um zu beweisen, dass  $\sup A = \bar{x}$ , müssen wir beweisen, dass  $\bar{x}$  die kleinste obere Schranke ist.

- $\bar{x}$  ist eine obere Schranke für  $A$ , nämlich,  $x < \bar{x}$  für alle  $x \in A$ . Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist: Es sei  $y \in A$ , sodass  $\bar{x} < y$ . Da  $y_n \geq y$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (Eigenschaft (d)),  $y > \bar{x}$  nach Voraussetzung und  $\bar{x} \geq x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wir sollten haben, dass  $y - \bar{x} < y_n - x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aber das ist nicht möglich, weil die Länge des Intervalls  $[x_n, y_n]$  gegen Null geht. Präziser gesagt, es gibt ein  $\tilde{n}$ , sodass  $y_{\tilde{n}} - x_{\tilde{n}} = \frac{y_0 - x_0}{2^{\tilde{n}}} < y - \bar{x}$ , weil die Folge  $(\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist und das ist ein Widerspruch.
- $\bar{x}$  ist die kleinste obere Schranke: es sei  $\epsilon > 0$  beliebig; wir müssen beweisen, dass es ein  $x \in A$  gibt, sodass  $x > \bar{x} - \epsilon$ . Nach (4.3.1) erhalten wir, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{x} - x_n \leq y_n - x_n$ . Da  $y_n - x_n$  gegen Null geht, gibt es ein  $\tilde{n} = \tilde{n}(\epsilon)$ , sodass  $y_{\tilde{n}} - x_{\tilde{n}} < \epsilon$ . Deshalb ist  $\bar{x} - x_{\tilde{n}} < \epsilon$  oder, mit anderen Worten, ist  $\bar{x} - \epsilon < x_{\tilde{n}}$ . Nun genügt es zu bemerken, dass das Intervall  $[x_{\tilde{n}}, y_{\tilde{n}}]$  durch Konstruktion immer Elemente von  $A$  enthält.

□

### 4.3.1 Mathematische Chronologie

Eine der Schwierigkeiten bei der Einführung reeller Zahlen besteht darin, sie nur mit den schon definierten Konzepten einzuführen. Wir gingen wie folgt vor:

1. Wir haben zunächst das abstrakte Konzept des ordnungsvollständig angeordneten Körpers eingeführt und alle Eigenschaften abgeleitet, die sich aus den Axiomen, die ihn definieren, ableiten lassen. (Abschnitt 2.1 und Abschnitt 2.1.1).
2. Satz 2.1.9 sagt uns, dass ein solcher Körper, bis auf Isomorphismen, eindeutig ist und wir haben ihn den Körper reeller Zahlen genannt. Um letzteren einzuführen, war es daher ausreichend, ein konkretes Modell eines ordnungsvollständig angeordneten Körpers einzuführen, den wir als Menge von Dezimalzahlen gewählt haben.
3. Im Lemma 2.2.1 haben wir tatsächlich gezeigt, dass eine beschränkte monoton wachsende Folge stabilisiert ist; dies impliziert, dass die Folge tatsächlich einen Grenzwert hat (Bemerkung 4.1.3). Es ist erwähnenswert zu bemerken, dass nicht alle konvergenten Folgen stabilisiert sind, daher haben wir in Kapitel 2 ein restriktiveres Konzept der Konvergenz verwendet.
4. Wir haben Lemma 2.2.1 verwendet, um zu beweisen, dass  $\mathbb{R}$  ordnungsvollständig ist (Satz 4.3.1).
5. Aus der Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  haben wir gezeigt, dass jede beschränkte monoton wachsende Folge einen Grenzwert besitzt (Satz 4.1.7), die durch das Supremum gegeben ist.

6. Durch die Anpassung des Beweises des Satzes 4.3.1 wird sofort gezeigt (wie?), dass die Ordnungsvollständigkeit eine Konsequenz der folgenden Tatsache ist (die daher als Axiom betrachtet werden muss): Jede beschränkte, monoton wachsende Folge besitzt einen Grenzwert.

Daraus können wir schließen:

Wenn wir davon ausgehen, dass alle beschränkte monoton wachsende Folgen einen Grenzwert zulassen, kann die Ordnungsvollständigkeit von  $\mathbb{R}$  nachgewiesen werden.

Wenn die Ordnungsvollständigkeit angenommen wird, kann es gezeigt werden, dass alle monoton wachsenden Folgen einen Grenzwert zulassen.

Diese beiden Konzepte sind daher äquivalent.

### 4.3.2 Andere Möglichkeiten zur Einführung reeller Zahlen

Wie bereits erwähnt, ist die Einführung reeller Zahlen besonders schwierig, da zu Beginn der Vorlesung nur wenige Begriffe zur Verfügung stehen. Jetzt, da wir noch ein paar mehr haben, möchte ich Ihnen nur eine grobe Vorstellung davon geben, wie diese numerische Menge abwechselnd definiert werden kann:

- (i) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine *monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge*, mit Werten in  $\mathbb{Q}$ .

Ähnlich wie bei der Einführung der Dezimalzahlen möchten wir sagen, dass der Grenzwert dieser Folge die reelle Zahl ist, die wir definieren möchten. Das Problem ist, dass der Grenzwert selbst in  $\mathbb{Q}$  möglicherweise nicht existiert: Tatsächlich ist ihr Grenzwert genau das Supremum (siehe Satz 4.1.7), für das derzeit nicht immer eine Definitionsmenge festgelegt ist, und daher können wir nicht darüber sprechen. Wir können jedoch sagen, dass “die Folge selbst” unsere reelle Zahl ist. Es gibt ein “Aber”: Es könnte zwei verschiedene Folgen geben, die den gleichen Grenzwert haben. Wie gehen wir vor, um diese Bedingung anzufordern, ohne den Grenzwert zu erwähnen? Der Trick ist zu sagen, dass die beiden Folgen die gleiche Menge von oberen Schranken haben müssen; Dies impliziert, dass ihre Suprema dieselbe sind.

Wir haben (hoffentlich) die folgende Definition erklärt:

*Die Menge der reellen Zahlen ist die Quotientenmenge der Menge der nach oben beschränkten monoton wachsenden Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit der folgenden Äquivalenzrelation  $\sim$ :*

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff \text{für jedes } r \in \mathbb{Q}$$

$$(a_n < r \text{ für alle } n \in \mathbb{N}) \iff (b_n < r \text{ für alle } n \in \mathbb{N}).$$

Sie verstehen gut, dass diese Definition für Studenten/Studentinnen bei den ersten Vorlesungen von Analysis I möglicherweise weniger intuitiv ist und Sie möglicherweise mehr verwirrt hätten als bereits.

- (ii) Wie könnte man sonst eine reelle Zahl als Grenzwert einführen, ohne den Grenzwert zu erwähnen? Man könnte Satz 4.2.5 verwenden. Also, wir könnten eine reelle Zahl uns als eine Cauchy Folge vorstellen, da diese Folgen in  $\mathbb{R}$  konvergent sein sollten (Folgerung aus der Ordnungsvollständigkeit!). Aber, wie vorher, müssen wir zwei solche Folgen identifizieren, wenn sie “denselben Grenzwert” haben. Wie kann man dieses Konzept formalisieren, ohne Grenzwerte zu erwähnen? Wir könnten einfach sagen, dass  $a_n - b_n \rightarrow 0$  konvergieren muss. Also:

*Die Menge der reellen Zahlen ist die Quotientenmenge der Menge der Cauchy Folgen in  $\mathbb{Q}$ , wobei zwei Cauchy Folgen,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , äquivalent sind genau dann, wenn  $a_n - b_n \rightarrow 0$  oder, mit anderen Worten, wenn*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \text{ sodass } \forall n \geq N, |a_n - b_n| < \epsilon.$$

(Bemerken Sie, dass hier  $\epsilon \in \mathbb{Q}$  ist.)

- (iii) Wir haben gesehen, dass es keine rationale Zahl  $x$  gibt, sodass  $x^2 = 2$  (Lemma 2.1.7). Deshalb gilt die folgende:

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\} = \mathbb{Q}.$$

Es seien dann  $A$  die Menge  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$  und  $B$  die Menge  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2\}$ , und wir bemerken, dass sie die folgenden Eigenschaften haben:

- $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset,$
- $A \cap B = \emptyset,$
- $A \cup B = \mathbb{Q}.$
- $a \leq b$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ .

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  mit den oben aufgeführten Eigenschaften führen zu einem *Schnittpunkt* (oder, genauer gesagt, zu einem *Dedekindschen Schnittpunkt*) von  $\mathbb{Q}$ . Das “Trennelement” (in diesem Fall  $\sqrt{2}$ , das auch das Supremum von  $A$  ist, oder das Infimum von  $B$ ) ist die reelle Zahl, die dieser Schnitt definiert. Aber wie können wir über das Trennelement sprechen, wenn der Zweck dieser Konstruktion darin besteht, die Definitionsmenge dort zu definieren, wo es lebt? Eine reelle Zahl ist dann definiert als der (Dedekindsche) Schnitt selbst. Offensichtlich gibt es hier auch eine Äquivalenzrelation. In dem Fall, in dem das Trennelement rational ist, gibt es zwei mögliche Schnitte:

$A = (-\infty, r]_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq r\}$  und  $B = (r, +\infty)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > r\}$ , oder  $A = (-\infty, r)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$  und  $B = [r, +\infty)_{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq r\}$ .

Dann sagen wir, dass falls es ein  $r \in \mathbb{Q}$  gibt, mit  $a \leq r$  für alle  $a \in A$  und  $r \leq b$  für alle  $b \in B$ , die folgenden Schnitte

$$A \cup \{r\}, \quad B \setminus \{r\} \quad \text{und} \quad A \setminus \{r\}, \quad B \cup \{r\}$$

äquivalent sein müssen.

*Die Menge der reellen Zahlen ist die Quotientenmenge der (Dedekindschen) Schritte, mit der Äquivalenzrelation hier oben eingeführt.*

Was sollen wir noch überprüfen? In den in (i), (ii), (iii) definierten Quotientenmengen sollten wir eine Addition, eine Multiplikation und eine totale Ordnung definieren, und wir sollten überprüfen, ob diese Mengen mit diesen Operationen und dieser Ordnung einen vollständigen angeordneten Körper bilden. An diesem Punkt wird Satz 2.1.9 uns sagen, dass sie als angeordnete Körper isomorph sind und daher der Körper der reeller Zahlen sind.

## 4.4 Zusätzliche Übungen und Beispiele

### Beispiel 4.4.1

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ ; um den Grenzwert dieses unbestimmten Ausdrucks  $\infty - \infty$  zu bestimmen, bemerken wir, dass

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Somit ist dies eine Nullfolge.



### Beispiel 4.4.2

Wir vergleichen die Folgen  $(\sqrt{n})$  und  $(a^n)$  ( $a > 1$ ). Setze  $a = 1 + h$  ( $h > 0$ ), dann gilt

$$\frac{\sqrt{n}}{a^n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1+nh} \leq \frac{1}{h\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Wir schließen daraus, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0.$$



### Beispiel 4.4.3

Betrachten Sie die Folge  $(na^{-n})$  ( $a > 1$ ). Wir überprüfen jetzt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na^{-n} = 0 \quad (a > 1)$$

gilt.

Es gilt  $na^{-n} = (\sqrt{nb^{-n}})^2$ , wobei  $b = \sqrt{a}$ . Aus der Übung 4.4.2 schließen wir, dass in der Tat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nb^{-n} = 0$$

gilt.

Allgemeiner gilt, dass

$$n^k a^{-n} = (nb^{-n})^k$$

mit  $b = a^{1/k}$ . Wir folgern, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^{-n} = 0$$

für alle ganzen Zahlen  $k \geq 1$ .

Nun gilt, dass

$$n^{\lfloor \alpha \rfloor} \leq n^\alpha \leq n^{\lfloor \alpha \rfloor + 1}$$

für alle  $\alpha > 0$ , somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha a^{-n} = 0.$$



**Beispiel 4.4.4**

Sei  $(p_n)$  eine Folge positiver reeller Zahlen, die gegen  $+\infty$  divergiert. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n^\alpha}{a^{p_n}} = 0, \quad \alpha > 0, \quad a > 1.$$

Wir zeigen zuerst, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{p_n}}{a^{p_n}} = 0.$$

Setze  $a = 1 + h$ , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p_n}}{a^{p_n}} &= \frac{\sqrt{p_n}}{(1+h)^{p_n}} \leq \frac{\sqrt{p_n}}{(1+h)^{\lfloor p_n \rfloor}} \\ &\leq \frac{\sqrt{p_n}}{(1+\lfloor p_n \rfloor)h} \leq \frac{1}{h\sqrt{\lfloor p_n \rfloor}} + \frac{1}{h\lfloor p_n \rfloor} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mit einem ähnlichen Verfahren wie der Übung 4.4.3 kann man den allgemeinen Fall beweisen.

**Beispiel 4.4.5**

Wir zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1)$$

gilt. Setze  $h := a/(\lfloor a \rfloor + 1)$  und  $n := \lfloor a \rfloor + m$  (für  $n \geq a$ ), somit

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{\lfloor a \rfloor} \cdot \frac{a}{\lfloor a \rfloor + 1} \cdots \frac{a}{\lfloor a \rfloor + m} < a^{\lfloor a \rfloor} h^m.$$

Zusammen mit  $0 < h < 1$  folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

**Beispiel 4.4.6**

Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Das Ergebnis folgt, indem man zeigt, dass

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$



**Übung 4.4.1**

Zeigen Sie direkt mittels der Definition des Grenzwertes:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - 1} = \infty$$

**Übung 4.4.2**

Sei  $(a_n)$  eine Folge positiver reeller Zahlen.

1. Zeigen Sie, dass wenn es eine reelle Zahl  $k, 0 < k < 1$ , gibt, so dass

$$\sqrt[n]{a_n} < k$$

gilt, dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

gilt.

2. Zeigen Sie, dass wenn es eine reelle Zahl  $k, k > 1$ , gibt, so dass

$$\sqrt[n]{a_n} > k$$

gilt, dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

gilt.

**Übung 4.4.3**

Sei  $(a_n)$  eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Übung, dass:

- wenn  $l < 1$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- wenn  $l > 1$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Untersuchen Sie den Fall  $l = 1$ .

**Übung 4.4.4**

Sei  $(a_n)$  eine Folge positiver reeller Zahlen.

- Zeigen Sie, dass wenn es eine reelle Zahl  $k, 0 < k < 1$ , gibt, so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < k$$

gilt, dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

gilt.

- Zeigen Sie, dass wenn es eine reelle Zahl  $k, k > 1$ , gibt, so dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > k$$

gilt, dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

gilt.



#### Übung 4.4.5

Sei  $(a_n)$  eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

gilt. Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Übung, dass:

- wenn  $l < 1$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- wenn  $l > 1$ , dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

Untersuchen Sie den Fall  $l = 1$ .



#### Übung 4.4.6

Benutzen Sie die vorherige Übung um zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

für  $a > 1$  gilt.



#### Übung 4.4.7

Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen

1.  $\sqrt{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  ( $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ). Hinweis:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ .

2.  $\frac{n!}{(n+1)! - (n-1)!}$
3.  $\sqrt[3]{n^6 - n^\alpha + 1} - n^2 \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$ .
4.  $\frac{n^\alpha}{1+2+\dots+n} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$ .
5.  $\frac{1+3+5+\dots+2n+1}{1+2+\dots+n}.$
6.  $\frac{n+2^n}{n+n!}$



### Übung 4.4.8

Zeigen Sie mittels Einschließungssatz:

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2+1} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right) = 0$
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1$



### Übung 4.4.9

Zeigen Sei, dass wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

gilt, dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_1 + \dots + a_n)}{n} = l$$

gilt.



---

---

## KAPITEL 5

---

### STETIGKEIT UND TOPOLOGIE AUF $\mathbb{R}^N$

Zuerst definieren wir die Menge  $\mathbb{R}^n$  als  $\overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n\text{-Mal}}$ . In diesem Kapitel werden wir eine *Topologie* auf der Definitionsmenge und Zielmenge einer Funktion definieren, um die Begriffe der sogenannten *Stetigkeit* einer Funktion einzuführen.

Wir beginnen mit einigen Definitionen.

### Definition 5.0.1

Es sei  $D$  eine nichtleere Teilmenge. Dann heißt eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ), deren Zielmenge die Menge der reellen Zahlen (bzw. die Menge der komplexen Zahlen) ist, eine **reellwertige** (bzw. eine **komplexwertige**) Funktion.

Wenn für die Zielmenge  $Y$  einer Funktion eine Operation definiert ist, können wir dieselbe Operation für die Menge der Funktionen, deren Zielmenge  $Y$  ist, “punktweise” definieren. Zum Beispiel, für reellwertige oder komplexwertige Funktionen, besitzen die Zielmengen verschiedene Operationen (Summe, Multiplikation, komplexe Konjugation), und deshalb machen die folgenden Definitionen Sinn: Es seien  $f: D \rightarrow Y$  und  $g: D \rightarrow Y$  zwei reellwertige oder komplexwertige Funktionen, also ist  $Y$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Dann können wir definieren

$$\begin{array}{lll} (f+g): D \rightarrow Y & (f \cdot g): D \rightarrow Y & \frac{f}{g}: D' \rightarrow Y \\ (f+g)(x) := f(x) + g(x) & (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) & \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

wobei in der letzten Definition ist  $D' \subseteq D$  die Menge, wo  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in D'$ . Dazu, falls  $f$  komplexwertig ist, können wir punktweise die komplexe konjugierte Funktion  $\bar{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$  definieren:

$$\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$$

## 5.1 Euklidische Norm und Abstandsfunktion

Um das Konzept der Stetigkeit einzuführen, ist es nun wesentlich, eine “Topologie” sowohl in der Definitionsmenge als auch in der Zielmenge einzuführen.

Aber was ist eine *Topologie*? Das Wort “Topologie” kommt aus dem Griechischen (*tópos*, “Ort” und *lógos*, “Lehre”) und meint wörtlich “Lehre vom Ort”. Sie handelt von der Form geometrischer Objekte, die topologischen Räume genannt werden. Und was ist dann ein topologischer Raum? In einem sogenannten “topologischen Raum” wird die Vorstellung von “Nähe” verallgemeinert, also das Konzept von “Umgebung”, das wir schon in Kapitel 4 gesehen haben. In diesem Kapitel

werden wir uns nicht mit dem Konzept der Topologie in seiner Gesamtheit befassen, sondern in den folgenden Semesterstunden. Wir werden jedoch versuchen zu veranschaulichen, welche Begriffe notwendig und grundlegend sind, um Stetigkeit einzuführen und ihre Konsequenzen abzuleiten.

Wie schon erwähnt, in Kapitel 4 (4.1.2) haben wir “offene Umgebungen” definiert: Mit der Hilfe der Betragsfunktion  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{C}$ , wobei  $|z|$  der Abstand des Punktes  $z$  in der komplexen Ebene vom Ursprung ist, ist eine “typische” Umgebung eines Punktes  $a \in \mathbb{C}$  das Innere einer Kreislinie, eine “offene Scheibe” mit Radius  $R > 0$ :

$$D_R(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\}.$$

Also, um das Konzept von Umgebung einzuführen, brauchen wir den Begriff von “Abstandsfunktion”. In  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  haben wir diese Konzepte schon definiert:

- In  $\mathbb{R}$ , kann der Betrag benutzt werden, um den Abstand  $d(x, y)$  zwischen zwei Punkten  $x, y \in \mathbb{R}$  zu definieren:  $d(x, y) := |x - y|$ . Wir bemerken, dass

$$|x - y| = \sqrt{(x - y)^2}.$$

- In  $\mathbb{C}$  haben wir auch einen Betrag definiert (siehe Definition 3.1.4). Dann ist im Allgemeinen der Abstand zwischen  $z = x_1 + i y_1$  und  $w = x_2 + i y_2$  durch

$$|z - w| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

gegeben.

In beiden Fällen erfüllt der Betrag die folgenden Eigenschaften: Zunächst bemerken wir, dass  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  Vektorräume über  $\mathbb{R}$  sind (Zu diesem Zeitpunkt sollten Sie dieses Konzept bereits in der Vorlesung für lineare Algebra gesehen haben.) Bezeichnen wir  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  einfach mit  $V$ . Dann haben wir

1.  $|x| \geq 0$ , und  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$  (es folgt einfach aus der Definition), für alle  $x \in V$ ;
2.  $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$ , für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $x \in V$  (nochmal, einfach aus der Definition);
3.  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , für alle  $x, y \in V$  (Dreiecksungleichung<sup>1</sup>)

Gegeben ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$ , eine Funktion  $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Eigenschaften 1., 2. und 3. erfüllt, wird **Norm** genannt. Wir werden das folgende Standardbeispiel von Norm behandeln:

---

<sup>1</sup>Siehe Lemma 2.1.6 für den Fall  $V = \mathbb{R}$  und Lemma 3.1.2 8. für  $V = \mathbb{C}$ . Warum können wir Lemma 2.1.6 für den Fall  $V = \mathbb{C}$  nicht benutzen?

**Definition 5.1.1**

Die **euklidische Norm** eines Punktes  $x = (x_1, \dots, x_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  ist als

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

definiert.

**Bemerkung 5.1.1**

Wenn wir den Satz von Pythagoras mehrmals anwenden, schließen wir, dass  $|x|$  genau der Abstand des Punktes  $x$  vom Ursprung ist (siehe Abbildung 5.1.1).  $\diamond$

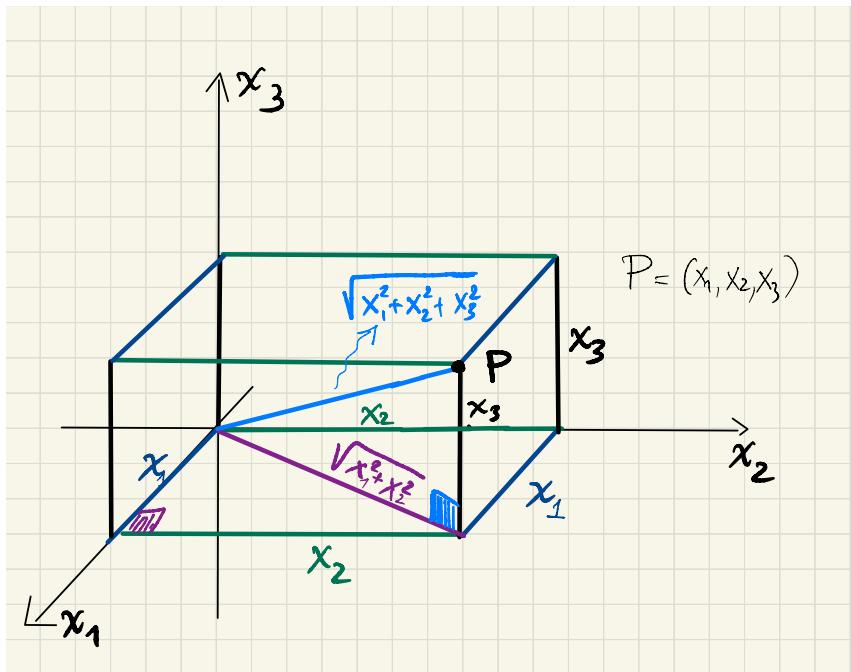


Figure 5.1.1

Wir bemerken, dass aus der Definition der euklidischen Norm folgt, dass Eigenarten 1. und 2. gelten. Die Dreiecksungleichung gilt auch, aber das braucht einen Beweis, den wir später sehen werden.

Es ist sinnvoll zu bemerken, dass die Normen auf  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ , die wir schon definiert hatten, genau die euklidischen Normen auf  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^2$  sind (für den Fall  $V = \mathbb{C}$ , identifizieren wir  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  durch  $x + iy \mapsto (x, y)$ ). Wie Sie vielleicht befürchten, gibt es, neben den oben aufgeführten Standardbeispielen, auch andere "weniger Standard"-Beispiele von Normen. Aber ich möchte nicht übertreiben, und ich werde hier aufhören.

Die Bedeutung der Norm und ihrer Eigenschaften besteht darin, dass wir eine Abstandsfunktion definieren können. Im Allgemeinen, gegeben eine Norm  $|\cdot|$  auf  $V$ , die dazugehörige **Abstandsfunktion**  $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ist als

$$d(x, y) := |x - y|$$

definiert. Dann, aus Eigenschaften 1., 2. und 3., folgt es, dass

- 1'.  $d(x, y) \geq 0$ , und  $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ , für alle  $x, y \in V$ .
- 2'.  $d(x, y) = d(y, x)$  für alle  $x, y \in V$ .
- 3'.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ , für alle  $x, y, z \in V$ .

(Um 3'. aus 3. zu erhalten, genügt es  $x - y$  als  $(x - z) + (z - y)$  zu schreiben).

### Definition 5.1.2

Der **euklidische Abstand**  $d(x, y)$  zwischen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$  in  $\mathbb{R}^n$  ist die Abstandsfunktion, die der euklidischen Norm zugeordnet ist, d.h.

$$d(x, y) := |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Dann können wir die Verallgemeinerung einer offenen Scheibe definieren, und zwar:

### Definition 5.1.3

Für jedes  $\epsilon > 0$ , ist eine **offene  $\epsilon$ -Umgebung** von  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ , oder **offene  $\epsilon$ -Kugel**, oder **offener  $\epsilon$ -Ball**, die Menge

$$U_\epsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < \epsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < \epsilon\}.$$

Wir bemerken, dass für  $n = 1$ ,  $U_\epsilon(x)$  das offene Intervall  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  ist, und für  $n = 2$ ,  $U_\epsilon(x)$  genau die offene Kreisscheibe mit Zentrum  $x$  und Radius  $\epsilon$  ist. Im Allgemeinen folgt aus der Definition der euklidischen Abstandsfunktion, dass *eine offene Umgebung eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  genau das Innere einer  $n$ -dimensionalen Sphäre (oder Kugel) ist*.

## 5.2 Stetigkeit

Falls die Definitionsmengen und Zielmengen einer Funktion  $f$  eine Abstandsfunktion besitzen, können wir das Konzept von Stetigkeit einführen. In unserem Fall, es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  eine nichtleere Menge mit euklidischer Abstandsfunktion  $d$ , wie in Definition 5.1.2. Die folgende ist von grundlegender Bedeutung:

**Definition 5.2.1** • Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) eine reellwertige (bzw. komplexwertige) Funktion, mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es sei  $x_0 \in D$ . Wir sagen, dass  $f$  **stetig in  $x_0$**  ist, falls

$$(*) \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \text{ sodass f\"ur alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta, \text{ ist} \\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

- Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) heißt **stetig**, falls sie stetig in  $x$  ist, für alle  $x \in D$ .

Wir sagen, dass eine Funktion, die in  $x_0$  nicht stetig ist, **unstetig** in  $x_0$  ist.

Wir bemerken, dass die obige Definition sinnvoll wäre, falls die Zielmenge eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$  ist, für ein  $m \geq 1$ .

Mal sehen, was diese Definition bedeutet, wenn  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . In diesem Fall erhalten wir, dass  $f$  stetig in  $x_0$  ist, falls

$$(**) \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \text{ sodass f\"ur alle } x \in D \cap (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon), \text{ ist} \\ f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon).$$

oder, mit anderen Worten, falls

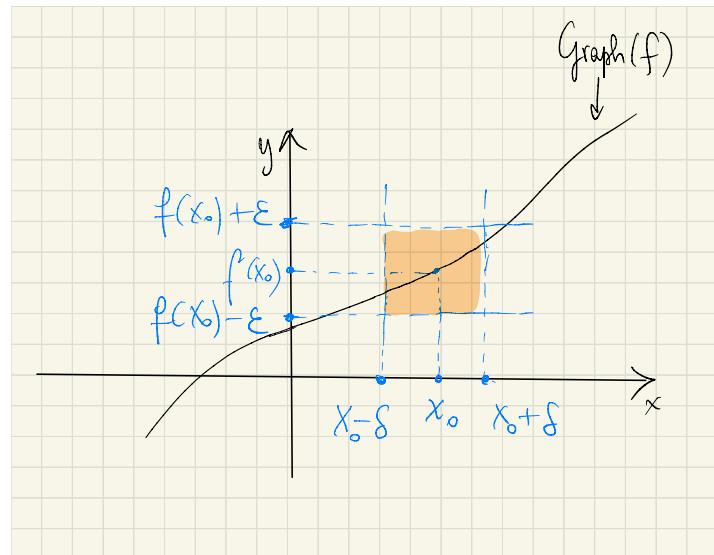
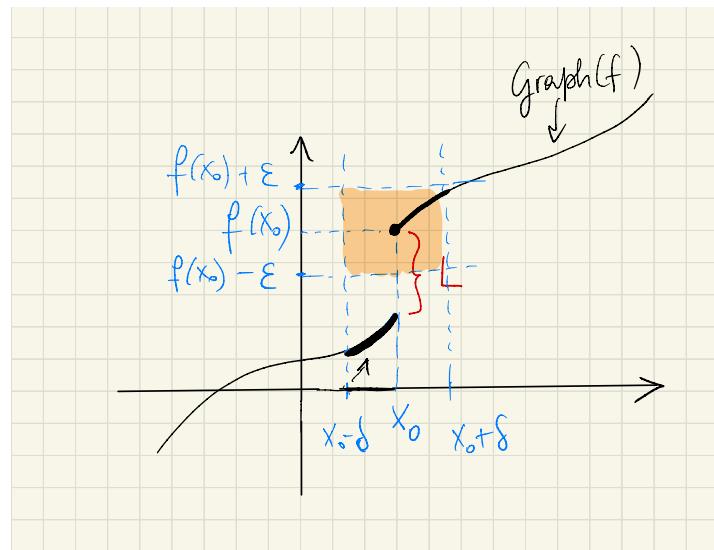
$$(***) \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon), \text{ sodass f\"ur alle } x \in D, \quad x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon, \text{ ist} \\ f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

Also, für alle  $\epsilon > 0$ , müssen wir ein  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  finden, sodass

$$\text{Graph}(f) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon),$$

siehe Abbildung 5.2.1

Dies bedeutet, dass um  $x_0$  der Graph von  $f$  keine ‘‘Sprünge’’ haben kann, er muss eben ‘‘stetig’’ sein. In der Tat, wenn  $f(x)$  am Punkt  $x_0$  von  $L > 0$  ‘‘springen würde’’, wäre  $f$  in  $x_0$  nicht stetig: es genigt  $\epsilon < L$  in der obigen Definition zu wählen, damit für alle  $\delta > 0$ , existiert  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , sodass das Bild  $f(x)$  nicht in  $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$  ist, siehe Abbildung 5.2.2

Figure 5.2.1:  $f$  ist stetig in  $x_0$ .Figure 5.2.2: Egal wie klein  $\delta > 0$  ist, der Graph links von  $x_0$  befindet sich niemals im orangefarbenen Rechteck.

Eine äquivalente Formulierung der Definition 5.2.1 der Stetigkeit in  $x_0$  ist die folgende:

**Definition 5.2.2**

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) eine reellwertige (bzw. komplexwertige) Funktion, mit  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es sei  $x_0 \in D$ . Wir sagen, dass  $f$  **stetig in  $x_0$**  ist, falls

für alle offenen Umgebungen  $U_\epsilon(f(x_0))$  von  $f(x_0)$ , gibt es eine offene Umgebung  $U_\delta(x_0)$  von  $x_0$ , sodass

$$f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\epsilon(f(x_0)).$$

In dieser Definition haben wir nicht benutzt, dass die Zielmenge entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist. Also gilt diese Definition für den Fall, dass die Zielmenge  $\mathbb{R}^m$  ist, für eine beliebige  $m \in \mathbb{N}$ .

**Übung 5.2.1**

Überzeugen Sie sich selbst, dass diese Bedingung tatsächlich der Definition 5.2.1 entspricht. ♠

**Bemerkung 5.2.1**

Wir bemerken die folgende wichtige Eigenschaft der Stetigkeit: sie ist eine **lokale Eigenschaft**, d.h.:

Es seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) zwei Funktionen und  $a \in D$ , sodass  $f$  und  $g$  gleich in einer Umgebung von  $a$  sind, oder mit anderen Worten

$$\exists \tilde{\delta} > 0, \text{ sodass } f(x) = g(x), \text{ für alle } x \in U_{\tilde{\delta}}(a).$$

Dann ist  $f$  in  $a$  stetig genau dann, wenn  $g$  in  $a$  stetig ist.

Um diese Bemerkung zu beweisen, genügt es zu bemerken, dass für alle  $\delta < \tilde{\delta}$ , ist  $f = g$  in  $U_\delta(a)$ , weil  $U_\delta(a) \subseteq U_{\tilde{\delta}}(a)$ .

Falls  $f$  stetig in  $a$  ist, wissen wir, dass für jedes  $\epsilon > 0$ , es ein  $\delta = \delta(\epsilon)$  gibt, sodass für alle  $x \in U_\delta(a)$ ,  $f(x) \in U_\epsilon(f(a))$  ist. Wir können dann  $\delta = \delta(\epsilon)$  mit einem kleineren  $\delta' = \delta'(\epsilon)$  ersetzen, sodass  $\delta' \leq \tilde{\delta}$  (zum Beispiel, nehmen wir  $\delta' := \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$ ); mit diesem Trick ist  $U_{\delta'}(a) \subseteq U_{\tilde{\delta}}(a)$ , und deshalb, für alle  $x \in U_{\delta'}(a)$ , haben wir  $f(x) = g(x)$ . Also ist die Stetigkeit von  $g$  in  $a$  eine Folgerung der Stetigkeit von  $f$  in  $a$ . Bemerken Sie, dass genau dieselbe Argumentation beweist, dass die Stetigkeit von  $g$  in  $a$  die von  $f$  impliziert. ◇

**Welche Funktionen sind stetig und welche nicht?**

Zunächst bezeichnen wir die Menge der stetigen reellwertigen (bzw. komplexwertigen) Funktionen in  $D$  mit  $C^0(D; \mathbb{R})$  (bzw.  $C^0(D; \mathbb{C})$ ).

**Beispiel 5.2.1**

Beginnen wir mit Beispielen von stetigen Funktionen, falls  $D \subseteq \mathbb{R}$  ist:

- (i) Die konstante Funktion  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : es gilt in der Tat  $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , für beliebige  $x, x_0 \in D$ .
- (ii) Die Identität  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : für ein beliebiges  $\epsilon$ , kann  $\delta = \delta(\epsilon)$  als  $\epsilon$  gewählt werden, weil für alle  $|x - x_0| < \epsilon$  ist, per definitionem von  $f$ ,  $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \epsilon$ .
- (iii) Die Funktionen  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir beweisen die Stetigkeit der Funktion "sin"; die Stetigkeit der Funktion "cos" ist für Sie eine **Übung**.

Erinnern wir uns zunächst an die folgende Formel: für beliebige  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (5.2.1)$$

Dazu ist

$$|\sin(h)| \leq |h| \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R} \quad (5.2.2)$$

Bemerken Sie, dass in den obigen Definitionen die Winkel in Radianen<sup>2</sup> gemessen werden. Deshalb kann diese Ungleichheit mit der Hilfe der Abbildung 5.2.3 erklärt werden.

Aus  $|\cos(\alpha)| \leq 1$  für alle  $\alpha$ , (5.2.1) und (5.2.2), erhalten wir

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \stackrel{(5.2.1)}{=} \left| 2 \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \stackrel{(5.2.2)}{\leq} |x - x_0|.$$

Es sei nun  $\epsilon > 0$  eine beliebige (kleine) positive Zahl. Können wir ein  $\delta = \delta(\epsilon)$  finden, sodass  $|x - x_0| < \delta$  impliziert, dass  $|\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$ ? Mit den obigen Ungleichheiten erhalten wir, dass für  $\delta = \epsilon$ ,  $|x - x_0| < \epsilon$  impliziert, dass  $|\sin(x) - \sin(x_0)| < \epsilon$ .

Bemerken Sie, dass  $x_0$  in der obigen Argumentation beliebig ist, deshalb ist die Funktion  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

- (iv) Die Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die diese Eigenschaft erfüllen:  
 $\exists L > 0$ , sodass für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  wir haben

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|. \quad (5.2.3)$$

Eine solche Funktion heißt **lipschitzstetig** (mit Konstanten  $L$ ). Das vorherige Beispiel (die Funktion "sin") zeigt an, dass alle lipschitzstetigen Funktionen

---

<sup>2</sup>Was ist ein Radiant?

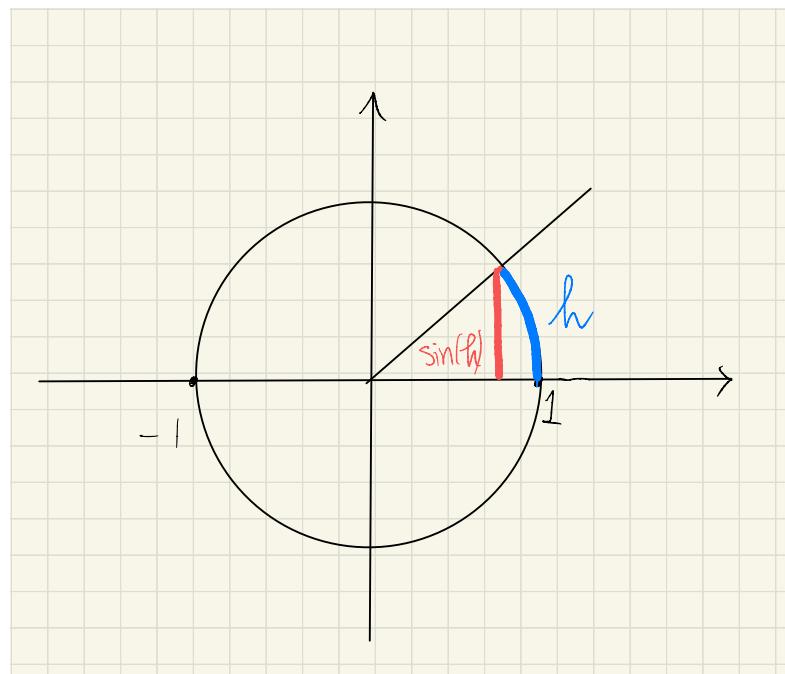


Figure 5.2.3

eigentlich stetig sind. In der Tat es sei  $\epsilon > 0$ . Dann, für alle  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{L}$  impliziert (5.2.3), dass  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

Die geometrische Interpretation der Ungleichheit (5.2.3) lautet wie folgt: Die Steigung der Geraden, die durch zwei verschiedene Punkte des Graphen von  $f$  verlaufen, ist beschränkt, siehe Abbildung 5.2.4

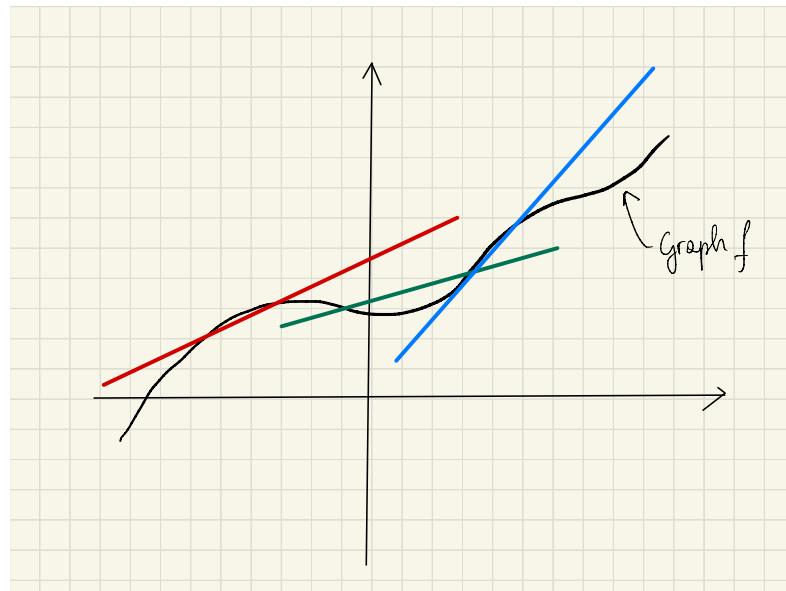


Figure 5.2.4: Eine Funktion, die lipschitzstetig ist.

Es ist aber nicht wahr, dass alle stetigen Funktionen lipschitzstetig sind, siehe Abbildung 5.2.5



In obigen Beispielen sind die Funktionen in allen Punkten der Definitionsmenge  $D$  stetig.

- Ein typisches Beispiel für eine Funktion, die nicht immer stetig ist, ist die Gaußklammerfunktion  $\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir in Abschnitt 2.3.1 eingeführt haben:  $\lfloor x \rfloor$  ist die nächstliegende nicht größere ganze Zahl. Der Graph ist in Abbildung 5.2.6

Wir beobachten sofort, dass der Graph “springt”, wenn  $x_0$  eine ganze Zahl ist (siehe auch Abbildung 5.2.2), und deshalb ist die Gaußklammerfunktion in allen  $x_0 \in \mathbb{Z}$  unstetig. Genauer gesagt, es sei  $\epsilon < 1$ . Dann es ist einfach zu sehen, dass links von  $x_0$  (also, für  $x < x_0$ ), die Gaußklammerfunktion genau  $x_0 - 1$  ist, und rechts von  $x_0$ , sie  $x_0$  ist. Also, für alle  $x < x_0$  in einer beliebigen

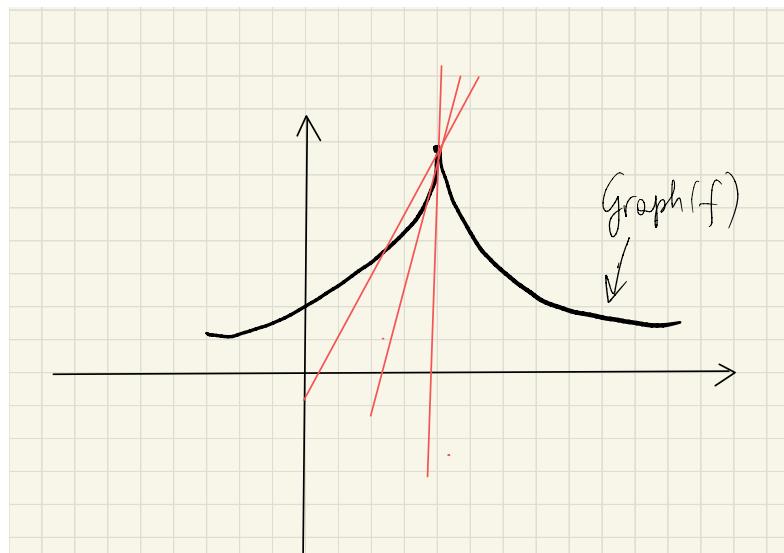


Figure 5.2.5: Eine Funktion, die stetig aber nicht lipschitzstetig ist.

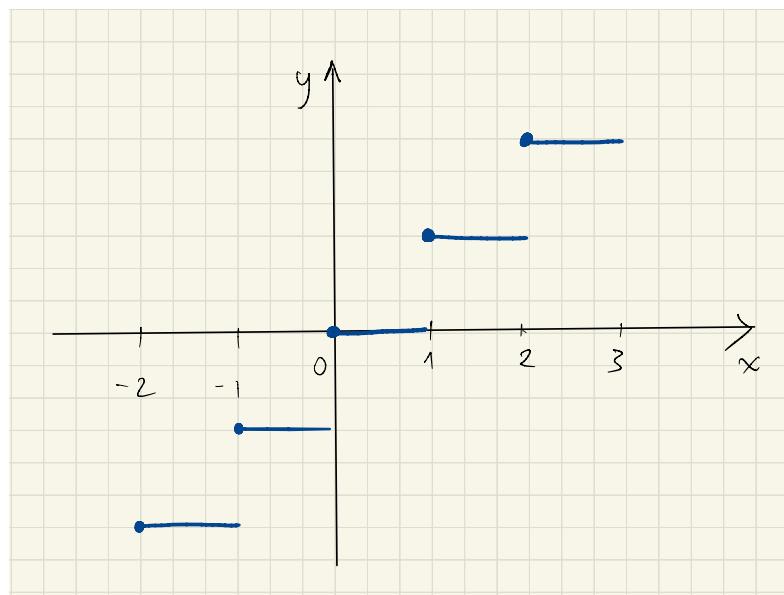


Figure 5.2.6

kleinen Umgebung von  $x_0$ , ist  $\lfloor x \rfloor - \lfloor x_0 \rfloor = |(x_0 - 1) - x_0| = 1$ , und kann deshalb nicht beliebig klein gemacht werden.

- Hier ist das abstruse Beispiel einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die *in keinem Punkt* stetig ist und deren Graph nicht genau gezeichnet werden kann:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- Es sei  $x_0 \in \mathbb{Q}$ . Die Behauptung ist, dass für alle  $\delta > 0$ , das Intervall  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  immer irrationale Zahlen enthält. Das ist eine Konsequenz der Übung 2.3.3 (ii) und (iii) (und wenn Sie diese Übung noch nicht ausprobiert haben, versuchen Sie es jetzt). Dann, für alle irrationalen  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  haben wir  $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1$ , und deshalb kann diese Differenz nicht beliebig klein gemacht werden. Also ist  $f$  unstetig in allen rationalen Zahlen.
- Es sei  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Die Dichte von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  impliziert, dass für alle  $\delta > 0$ , das Intervall  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  immer rationale Zahlen enthält. Deshalb ist  $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1$  für alle rationalen Zahlen  $x$  in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  und sie kann nicht beliebig klein gemacht werden. Also ist  $f$  unstetig auch in allen irrationalen Zahlen  $x_0$ .

Wir werden sehen, dass das folgende Kriterium zum Feststellen der Stetigkeit einer Funktion sehr nützlich ist, um neue stetige Funktionen aus alten zu erzeugen.

Zuerst bemerken wir, dass gegeben eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) und eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $D$ , ist  $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{C}$ ). Wir nehmen an, dass  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist.

### Satz 5.2.1

*Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) eine Funktion und  $x_0 \in D$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (i)  $f$  ist stetig in  $x_0$ ;
- (ii) Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \rightarrow x_0$ , gilt  $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ .

*Beweis:* • (i)  $\implies$  (ii).

Da  $f$  stetig ist, gibt es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\epsilon)$ , sodass

für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$ , ist  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

Dazu, da  $a_n \rightarrow x_0$ ,

für alle  $\delta > 0$  es ein  $N$  gibt, sodass  $|a_n - x_0| < \delta$  für alle  $n \geq N$ .

Das heißt, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $N$  gibt, sodass die Folgenglieder  $a_n$ , mit  $n \geq N$ , in der Umgebung  $U_\delta(x_0)$  liegen. Aber für die Punkte  $x$  dieser Umgebung gilt  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , und deshalb

für alle  $n \geq N$  gilt  $|f(a_n) - f(x_0)| < \epsilon$ .

Schließlich haben wir bewiesen, dass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $N$  gibt, sodass für alle  $n \geq N$  gilt  $|f(a_n) - f(x_0)| < \epsilon$ , d.h.  $f(a_n) \rightarrow f(x_0)$ .

- (ii)  $\implies$  (i). Indirekter Beweis: Nehmen wir an, dass  $f$  in  $x_0$  nicht stetig ist. Wir müssen beweisen, dass (ii) nicht gelten kann. (Erinnern Sie sich daran, dass  $P \implies Q$  äquivalent zu  $\neg Q \implies \neg P$  ist.) Was ist dann die Verneinung der Stetigkeit in  $x_0$ :

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , sodass  $\forall x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  wir haben  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ ?

Die Verneinung ist:

$\exists \tilde{\epsilon} > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  wir haben  $|f(x) - f(x_0)| \geq \tilde{\epsilon}$ .

Für ein solches festes  $\tilde{\epsilon}$ , es sei  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge  $\delta_n = \frac{1}{n}$  und  $x_n$  in  $D$  das Element, das  $|x_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n}$  erfüllt. Wir bemerken, dass für alle  $n' \geq n$

$$|x_{n'} - x_0| < \frac{1}{n'} \leq \frac{1}{n},$$

oder, äquivalent gesagt, dass  $\forall n' > n$  ist  $x_{n'} \in U_{x_0}(\frac{1}{n})$ . Dann sei es  $\epsilon > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{1}{n} < \epsilon$  (ein solches  $\epsilon$  immer existiert, dank des Lemmas 2.1.5 1. und des Lemmas 2.3.1). Für alle  $n' \geq n$  haben wir

$$|x_{n'} - x_0| < \frac{1}{n'} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

oder, mit anderen Worten,  $x_n \rightarrow x_0$ . Auf der anderen Seite, ist  $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \tilde{\epsilon}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , weil wir angenommen haben, dass  $f$  in  $x_0$  nicht stetig ist (siehe oben). Aber dann widersprachen wir (ii): wir haben eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gefunden, sodass  $x_n \rightarrow x_0$ , aber  $f(x_n)$  nicht gegen  $f(x_0)$  konvergiert.

□

Dieser Satz ermöglicht es uns, die bereits für Folgen bewiesenen Ergebnisse zu verwenden, um neue stetige Funktionen zu erzeugen.

**Satz 5.2.2**

Es seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) stetige Funktionen. Dann sind die folgenden Funktionen stetig:

1.  $f + g: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f + g: D \rightarrow \mathbb{C}$ );
2.  $\lambda \cdot f: D \rightarrow \mathbb{R}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\lambda \cdot f: D \rightarrow \mathbb{C}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ );
3.  $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{C}$ );
4.  $\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $\frac{f}{g}: D' \rightarrow \mathbb{C}$ ), wobei  $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ .

*Beweis:* Mit dem vorherigen Satz (Satz 5.2.1), können wir Proposition 4.1.3 benutzen, um Satz 5.2.2 zu beweisen: Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge in  $D$ , die nach  $x_0$  konvergiert (für den letzten Fall, muss die Folge in  $D'$  liegen). Dann impliziert Satz 5.2.1 (insbesondere (i)  $\Rightarrow$  (ii)), dass die Folge  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  (bzw.  $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ) nach  $f(x_0)$  (bzw. nach  $g(x_0)$ ) konvergiert. Proposition 4.1.3 impliziert, dass die folgenden Konvergenzen gelten:

$$\begin{array}{cccc} (f(x_n) + g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}, & (\lambda \cdot f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}, & (f(x_n) \cdot g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}, & \left(\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)_{n \in \mathbb{N}} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f(x_0) + g(x_0) & \lambda \cdot f(x_0) & f(x_0) \cdot g(x_0) & \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \end{array}$$

Wir verwenden nochmal Satz 5.2.1 (jetzt die Implikation (ii)  $\Rightarrow$  (i)) um zu schließen, dass die Stetigkeit der Funktionen  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  in einem beliebigen Punkt  $x_0 \in D$  gilt (für die Funktion  $\frac{f}{g}$ , ist  $x_0$  ein beliebiger Punkt in  $D'$ ).  $\square$

**Vertiefungen 5.2.1**

Für die Studenten, die schon wissen, was ein Vektorraum ist, kann Satz 5.2.2 benutzt werden, um zu beweisen, dass  $C^0(D; \mathbb{R})$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  ist (bzw.  $C^0(D; \mathbb{C})$  ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$  ist.) Warum? **Übung?**  $\diamond$

Mit der Hilfe der vorherigen Beispiele von stetigen Funktionen, erlaubt Satz 5.2.2 zu schließen, dass alle *polynomiale Funktionen*

$$\begin{aligned} P: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 \end{aligned}$$

stetig sind, für beliebige  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Allgemeiner, alle *rationale Funktionen*

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q}: D &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0} \end{aligned}$$

sind stetig, für beliebige  $a_i \in \mathbb{C}$  für  $i = 0, \dots, n$ ,  $b_i \in \mathbb{C}$  für  $i = 0, \dots, m$ , und mit  $D := \{z \in \mathbb{C} \mid b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0 \neq 0\}$ .

Eine weitere Konsequenz von Satz 5.2.1 ist das Analogon von Satz 4.1.6 (i) in diesem Zusammenhang:

### Satz 5.2.3

*Es seien  $f, g, h$  drei reellwertige Funktionen mit Definitionsmenge  $D \subseteq \mathbb{R}$  (bzw.  $D \subseteq \mathbb{C}$ ). Nehmen wir an, dass  $f$  und  $h$  stetig in  $x_0 \in D$  sind. Falls es eine Umgebung  $U_\delta(x_0)$  gibt, sodass für alle  $x \in U_\delta(x_0)$  die folgende Ungleichheit gilt:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

*dann ist auch  $g$  in  $x_0$  stetig.*

### Übung 5.2.2

Beweisen Sie diesen Satz, mit der Hilfe von Satz 4.1.6 (i) und Satz 5.2.1 oder mit einem direkten Beweis (siehe Tutorium 5). ♠

Noch eine Folgerung des Satzes 5.2.1

### Satz 5.2.4

*Es seien  $D$  und  $E$  Teilmengen von  $\mathbb{C}$ , und  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: E \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen, die verknüpft werden können (also,  $f(D) \subseteq E$ ). Dann, falls  $f$  in  $x_0$  stetig ist, und  $g$  in  $f(x_0)$  stetig ist, ist auch  $g \circ f$  in  $x_0$  stetig.*

*Beweis:* Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge, die gegen  $x_0$  konvergiert. Dann, aus der Stetigkeit von  $f$ , ist  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$ , die gegen  $f(x_0)$  konvergiert. Wir bemerken, dass  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in der Definitionsmenge von  $g$  ist (da  $f(D) \subseteq E$ ). Deshalb, aus der Stetigkeit von  $g$ , konvergiert die Folge  $(g(f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $g(f(x_0))$ . Da die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beliebig ist, erlaubt uns Satz 5.2.1 zu schließen, dass  $g \circ f$  stetig in  $x_0$  ist. □

## 5.3 Grenzwerte von Funktionen

Das Konzept der Stetigkeit ist eng mit dem Konzept des Grenzwertes verbunden. Um letzteres einzuführen, müssen wir das Konzept eines Häufungspunktes einer Menge einführen.

### Definition 5.3.1

Es sei  $D$  eine nicht leere Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

Ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt **Häufungspunkt** von  $D$ , falls für jedes  $\epsilon > 0$  die Menge  $U_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$  einen Punkt von  $D$  enthält oder, mit anderen Worten, falls

die Menge  $(U_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$  nicht leer ist.

Ein Punkt  $x_0 \in D$ , der kein Häufungspunkt ist, heißt **isoliert**, also:  
 $x_0$  ist isoliert in  $D$  genau dann, wenn existiert eine Umgebung  $U(x_0)$ , sodass  $U_{x_0} \cap D = \{x_0\}$ .

### Bemerkung 5.3.1

(Sehen Sie auch Bemerkung 4.2.1). Es ist zu beachten, dass sich diese Definition stark von der Definition eines Häufungspunkts einer Folge unterscheidet: Wenn  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $D$  ist, gibt es – und wir können sie “sehen” – *unendlich viele Punkte von  $D$ , die sich um  $x_0$  häufen*. Dies kann folgendermaßen demonstriert werden: Nehmen Sie die Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ . Wir stellen fest, dass die Umgebung  $U_{\frac{1}{n'}}(x_0)$  in  $U_{\frac{1}{n}}(x_0)$  enthalten ist, für alle  $n' > n$ . Es sei  $x_n$  ein Punkt, der der Menge  $(U_{\frac{1}{n}}(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$  gehört, und wir definieren  $\delta$  seinen Abstand von  $x_0$ . Da  $x_n \neq x_0$ , ist  $\delta$  positiv. Gegeben  $n' \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{n'} < \delta$  (warum gibt es ein solches  $n'$ ?), ist  $x_n \notin U_{\frac{1}{n'}}(x_0)$ . Dann kann dasselbe Verfahren wiederholt werden, um einen Punkt  $x_{n'}$  zu finden, der der Menge  $(U_{\frac{1}{n'}}(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$  gehört, und eine Umgebung  $U_{\frac{1}{n''}}(x_0)$  zu finden, sodass  $x_{n'} \notin U_{\frac{1}{n''}}(x_0)$ . Und so weiter. Das heißt: Wir haben eine Folge von Punkten in  $D$  definiert, deren Elemente alle unterschiedlich sind, und liegen in  $D \setminus \{x_0\}$ . Dies beweist dazu, dass die Folge gegen  $x_0$  konvergiert, und dass  $x_0$  ein Häufungspunkt für diese Folge ist. Also wir können schließen, dass falls  $x_0$  ein Häufungspunkt einer Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, kann eine Folge definiert werden, die nach  $x_0$  konvergiert, und sodass  $x_0$  ein Häufungspunkt der Folge ist.

Umgekehrt: Es ist nicht wahr, dass ein Häufungspunkt einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch Häufungspunkt der Menge der Werte der Folge  $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$  ist. Zum Beispiel, falls  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die konstante Folge ist,  $a_n = a$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann ist die Konstante  $a$  ein Häufungspunkt der Folge, aber kein Häufungspunkt für die Menge  $\{a\}$ . In der Tat, aus der Definition 5.3.1 folgt, dass die Menge  $\{a\}$  keinen Häufungspunkt besitzt, und dass  $a$  isoliert ist. ◇

Wir bemerken dazu, dass falls  $x_0$  ein Häufungspunkt für  $D$  ist, dann kann  $x_0$  in  $D$  liegen, oder nicht, wie die folgende Übung zeigt:

**Übung 5.3.1** • Finden Sie alle Häufungspunkte der Folge  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  und der Menge  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ . Finden Sie alle Häufungspunkte der Menge  $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}$ .

- Beweisen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte des “offenen” Intervall  $(0, 1)$  das “abgeschlossene” Intervall  $[0, 1]$  ist.
- Beweisen Sie, dass die Menge  $\mathbb{Z}$ , betrachtet als Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , keine Häufungspunkte besitzt.

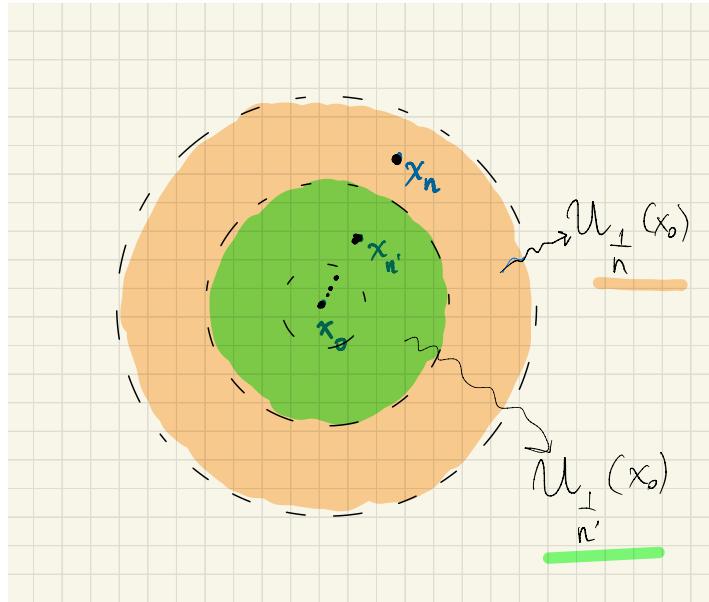


Figure 5.3.1: Es gibt eine Folge von Punkten in  $D$ , die sich um  $x_0$  häufen.

- Finden Sie die Menge der Häufungspunkte von  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  und  $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ .

♠

In der folgenden Definition, es sei  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ .

### Definition 5.3.2

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) eine Funktion, und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann, wenn  $l \in \mathbb{R}$  (bzw.  $l \in \mathbb{C}$ ) existiert, sodass

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \text{ sodass für alle } x \in (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \text{ ist } f(x) \in U_\epsilon(l) \quad (5.3.1)$$

sagen wir, dass  $l$  der **Grenzwert** von  $f$  für  $x$  gegen  $x_0$  ist, und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Warum brauchen wir, dass  $x_0$  ein Häufungspunkt für die Definitionsmenge  $D$  ist? Weil, wenn es nicht der Fall wäre, könnte die Menge  $(U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$  leer sein, und deshalb wäre die Bedingung in (5.3.1) eine “leere Bedingung”.

Wie für die Stetigkeit, gibt es eine Umformulierung der Bedingung (5.3.1):

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0, \text{ sodass f\"ur alle } x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ ist } |f(x) - l| < \epsilon. \quad (5.3.2)$$

Warum m\"ochten wir  $f(x)$  evaluieren, nur f\"ur die Punkte  $x \in D$ , die unterschiedlich von  $x_0$  sind? Weil es im Begriff des Grenzwertes nicht wichtig ist, was die Funktion *am Punkt*  $x_0$  tut; es ist nur wichtig zu wissen, was die Funktion *um*  $x_0$  tut, also, in einer Umgebung von  $x_0$  (aber nicht in  $x_0$ ).

### Beispiel 5.3.1

Es sei  $f$  die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ . Dann kann die Definitionsmenge von  $f$  den Punkt  $x_0 = 2$  nicht enthalten, da die Fraktion f\"ur  $x_0 = 2$  nicht definiert ist. Aber wir k\"onnen  $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$  als  $\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$  schreiben und, f\"ur alle  $x \neq 2$ , k\"onnen wir sagen, dass  $\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$ . Deshalb

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4.$$

Die erste Gleichheit gilt, weil wir in der Definition des Grenzwertes, die Funktion  $f$  nur in allen Punkten  $x \neq 2$  ber\"ucksichtigt m\"ussen. Die zweite Gleichheit gilt, weil die Funktion  $x \mapsto x + 2$  stetig ist. ♣

Mit der Definition des Grenzwertes, kann das Konzept von Stetigkeit so umformuliert werden:

### Satz 5.3.1

*Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) eine Funktion, und  $x_0 \in D$ . Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$  genau dann, wenn entweder*

- $x_0$  ein H\"aufungspunkt von  $D$  ist, und  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , oder
- $x_0$  kein H\"aufungspunkt von  $D$  ist.

### Übung 5.3.2

Beweisen Sie Satz 5.3.1 ♠

Wir bemerken, dass falls  $x_0$  kein H\"aufungspunkt ist, also, falls  $x_0 \in D$  isoliert ist, dann ist eine beliebige Funktion  $f$ , deren Definitionsmenge  $D$  ist, stetig.

Der folgende Satz ist sehr \"ahnlich zu Satz 5.2.1 und der Beweis bleibt dem Leser \\"uberlassen:

**Satz 5.3.2**

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) eine Funktion, und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Dann sind die folgenden äquivalent:

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l;$$

$$(ii) \text{ Für alle Folgen } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n \rightarrow x_0 \text{ und } a_n \neq x_0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ gilt} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l.$$

Für Grenzwerte gelten Ergebnisse, die ähnlich zu den Ergebnissen in Sätzen 5.2.2 und 5.2.4 sind:

**Satz 5.3.3**

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen (bzw.  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ ) und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ .

Dann, falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ) existiert und gleich  $l$  (bzw.  $l'$ ) ist, haben wir

$$(i) \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l';$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot l, \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R} \text{ (bzw. } \lambda \in \mathbb{C});$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = l \cdot l';$$

$$(iv) \text{ Falls } l' \neq 0, \text{ es gibt eine Umgebung } U \text{ von } x_0 \text{ mit } g(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in U, \\ \text{und gilt } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{l'}.$$

**Satz 5.3.4**

Es seien  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: D' \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, sodass  $g(D') \subseteq D$  und es sei  $f \circ g: D' \rightarrow \mathbb{R}$  die Verknüpfung. Es sei  $x_0$  ein Häufungspunkt für  $D'$ , oder  $+\infty$ , oder  $-\infty$ . Dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l,$$

wobei  $g(x) \neq l$  für alle  $x$  in einer Umgebung von  $x_0$  und

$$\lim_{y \rightarrow l} f(y) = l',$$

dann gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = l'.$$

Hier sind  $l, l'$  entweder reelle Zahlen oder  $+\infty$ , oder  $-\infty$ .

Die Beweise sind dem Leser überlassen.

### 5.3.1 Grenzwerte für Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

Die Definition des Grenzwerts erklärt nicht, wie die Grenzwerte konkret berechnet werden können. Die Berechnung von Grenzwerten kann besonders schwierig sein, wenn die Funktion von einer Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  definiert ist. Wir wollen nicht auf diese Schwierigkeiten eingehen und beschränken uns in diesem Abschnitt auf Funktionen von (Teilmengen von)  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ .

Nehmen wir zunächst an, dass  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion ist, wobei die Definitionsmenge *nach oben unbeschränkt* ist, d.h.: Für alle  $N \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $x \in D$ , sodass  $x > N$ . Dann kann in diesem Fall der folgende Begriff definiert werden:

**Definition 5.3.3**

Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, wobei  $D$  nach oben unbeschränkt ist.  
Dann

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} : \iff \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ sodass für alle } x \in D, x > N, \text{ gilt } |f(x) - l| < \epsilon.$$

Falls  $D$  nach unten unbeschränkt ist, d.h. dass, für alle  $N \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $x \in D$ , sodass  $x < N$ , dann kann ähnlich der folgende Grenzwert definiert werden:

**Definition 5.3.4**

Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, wobei  $D$  nach unten unbeschränkt ist.  
Dann

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} : \iff \forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon), \text{ sodass f\"ur alle } x \in D, x < N, \text{ gilt } |f(x) - l| < \epsilon.$$

Ein Beispiel einer Funktion, die einen beschr\"ankten Grenzwert f\"ur  $x \rightarrow +\infty$  besitzt, ist in Abbildung 5.3.2 gegeben.

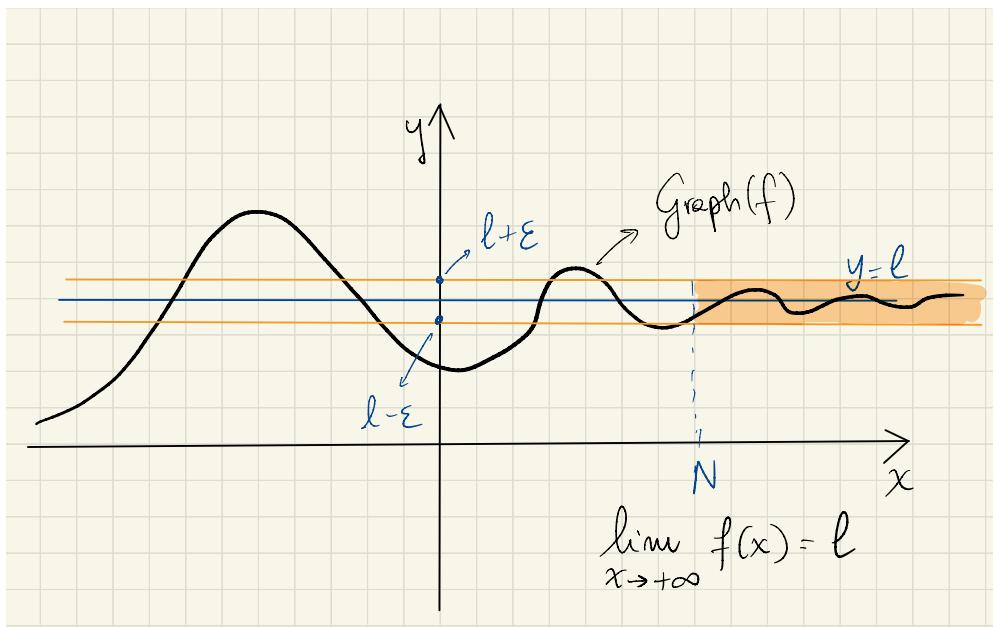


Figure 5.3.2

Die Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = l\}$  ist in diesem Fall eine *Waagerechte Asymptote*. In \"ahnlicher Weise k\"onnen wir die folgenden Grenzen definieren:

### Definition 5.3.5

- Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, und  $x_0$  ein H\"aufungspunkt von  $D$ . Dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (bzw. } -\infty) : \iff \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta = \delta(L), \text{ sodass f\"ur alle } x \in D, 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ gilt } f(x) \geq L \text{ (bzw. } f(x) \leq L).$$

- Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, wobei  $D$  nach oben unbeschr\"ankt ist. Dann

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (bzw.  $-\infty$ ) : $\iff \forall L \in \mathbb{R}, \exists N = N(L),$  sodass für alle  $x \in D, x > N,$  gilt  $f(x) \geq L$  (bzw.  $f(x) \leq L$ ).

- Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, wobei  $D$  nach unten unbeschränkt ist. Dann

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  (bzw.  $-\infty$ ) : $\iff \forall L \in \mathbb{R}, \exists N = N(L),$  sodass für alle  $x \in D, x < N,$  gilt  $f(x) \geq L$  (bzw.  $f(x) \leq L$ ).

## 5.4 Überblick über die euklidische Topologie

Im vorherigen Abschnitt haben wir schon einige Begriffe einer Topologie eingeführt (zum Beispiel, was eine offene Umgebung ist), und wir haben schon den Grund gesehen, warum diese Konzepte für den Begriff der Stetigkeit so wichtig sind. In diesem Abschnitt werden wir noch weitere Konzepte der (euklidischen) Topologie einführen, und werden sehen, welche Rolle sie in der Stetigkeit spielen.

Wir beginnen mit einigen Definitionen. In Definition 5.1.2 haben wir die euklidische Abstandsfunktion definiert, und folglich den zusammenhängenden Begriff von  $(\epsilon)$ -Umgebung. Aus dem Konzept von Umgebung können folgende Eigenschaften eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  definiert werden:

### Definition 5.4.1

Es sei  $A$  eine nicht-leere Menge in  $\mathbb{R}^n$ , und  $x$  ein Punkt in  $\mathbb{R}^n$ . Der Punkt ist ein

- **innerer Punkt von  $A$** , falls eine offene Umgebung  $U_\epsilon(x)$  von  $x$  existiert, die ganz in  $A$  liegt, d. h.

$$\exists \epsilon > 0, \text{ sodass } U_\epsilon(x) \subseteq A;$$

- **äußerer Punkt von  $A$** , falls  $x$  ein innerer Punkt des Komplementes ist, d. h.

$$\exists \epsilon > 0, \text{ sodass } U_\epsilon(x) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A;$$

- **Randpunkt von  $A$** , wenn jede Umgebung  $U_\epsilon(x)$  wenigstens einen Punkt mit  $A$  und einen Punkt mit  $\mathbb{R}^n \setminus A$  gemeinsam hat, d. h.

$$\forall \epsilon > 0, U_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U_\epsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset.$$

Die Menge der inneren Punkte von  $A$  wird durch  $\overset{\circ}{A}$  bezeichnet, und wird **Innere** von  $A$  genannt. Die Menge der Randpunkte wird durch  $\partial A$  bezeichnet, und

wird **Rand** von  $A$  genannt. Natürlich gilt es, dass die Menge der äußeren Punkte von  $A$  genau das Innere von  $(\mathbb{R}^n \setminus A)$  ist.

### Übung 5.4.1

Mit der Hilfe der gegebenen Definitionen beweisen Sie, dass für eine beliebige Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  gelten:

1.  $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$ ;
2.  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ ;
3.  $\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \setminus \overset{\circ}{A})$ , wobei diese Vereinigung eine Vereinigung zwischen disjunkten Mengen ist;
4.  $A \subseteq \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ ;
5.  $A \cup \partial A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ , wobei die letzte Vereinigung eine Vereinigung zwischen disjunkten Mengen ist.



**Beispiel 5.4.1** 1. Es sei  $(a, b)$  das (sogenannte) offene Intervall in  $\mathbb{R}$ . Dann ist jeder Punkt in  $(a, b)$  ein innerer Punkt von  $(a, b)$ . Wir beweisen diese Tatsache. Wir schreiben zunächst  $(a, b)$  als  $(x_0 - R, x_0 + R)$ , wobei  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  und  $R = \frac{b-a}{2}$ . Deshalb

$$x \in (a, b) \iff |x - x_0| < R \iff x \in U_R(x_0).$$

Dann sei es  $\delta > 0$ , sodass  $|x - x_0| = R - \delta$ . Wir möchten eine ganze Umgebung von  $x$  finden, die ganz in  $U_R(x_0)$  enthalten ist.

Für alle Punkte  $y \in \mathbb{R}$ , sodass  $|y - x| < \frac{\delta}{2}$  gilt

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < \frac{\delta}{2} + R - \delta = R - \frac{\delta}{2} < R,$$

wobei wir die Dreiecksungleichung benutzt haben. Wir können dann schließen, dass die ganze offene Umgebung von  $x$  gegeben durch  $(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2})$  enthalten in  $(x_0 - R, x_0 + R)$  ist (siehe Abbildung 5.4.1).

Es ist leicht zu zeigen, dass  $\partial(a, b) = \{a, b\}$ . In der Tat, für jedes  $\epsilon > 0$ , enthält das Intervall  $(a - \epsilon, a + \epsilon)$  Punkte von  $(a, b)$  (die genau die Punkte in  $(a, a + \epsilon)$  sind) und Punkte des Komplementes (die genau die Punkte in  $(a - \epsilon, a]$  sind). Ähnlich für jede Umgebung von  $b$  (siehe nochmal Abbildung 5.4.1).

Ähnlich gilt für das Intervall  $(a, b]$ , dass das Innere von  $(a, b]$  genau  $(a, b)$  ist, und der Rand genau  $\{a, b\}$ .

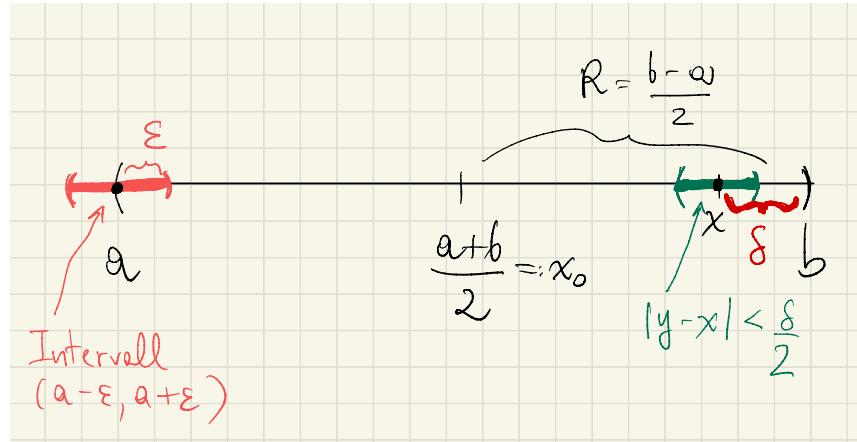


Figure 5.4.1

2. Es sei  $A = \mathbb{R}^n$ . Dann ist jeder Punkt ein innerer Punkt, und  $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$  für alle  $n \geq 1$ .
3. Jeder Punkt der offenen Kugel  $U_R(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n$  ist ein innerer Punkt in  $U_R(x_0)$ , für jeden  $R > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $n \geq 1$ .

Das ist für Sie eine **Übung**. (Bitte benutzen Sie dasselbe Verfahren, das wir für offene Intervalle von  $\mathbb{R}$  benutzt haben, mit der Hilfe der Dreiecksungleichung für den euklidischen Abstand in  $\mathbb{R}^n$ , die wir nicht bewiesen haben.)

Ähnlich wie beim 1-dimensionalen Fall, ist der Rand von  $U_R(x_0)$  genau die  $(n - 1)$ -dimensionale Sphäre mit Zentrum  $x_0$  und Radius  $R$ :

$$\partial U_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, x_0) = R\}.$$

Diese Tatsache kann mit der Hilfe der Abbildung 5.4.2 bewiesen werden.

4. Die Dichte von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  (siehe Lemma 2.3.2) und von  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  (siehe Übung 2.3.3) kann benutzt werden, um zu beweisen, dass das Innere von  $\mathbb{Q}$ , betrachtet als Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , leer ist, und dass  $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ .
5. Es sei  $A$  die Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$  (oder eine beliebige Gerade in  $\mathbb{R}^2$ ). Dann ist das Innere von  $A$ , die eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  ist, leer! Warum ist das so? Weil es keine “2-dimensionale Umgebungen” gibt, die in  $A$  enthalten sind, siehe Abbildung 5.4.3. Dazu ist  $\partial A = A$ .

♣

**Eine Beziehung zwischen Häufungspunkten, isolierten Punkten und inneren oder Randpunkten.**

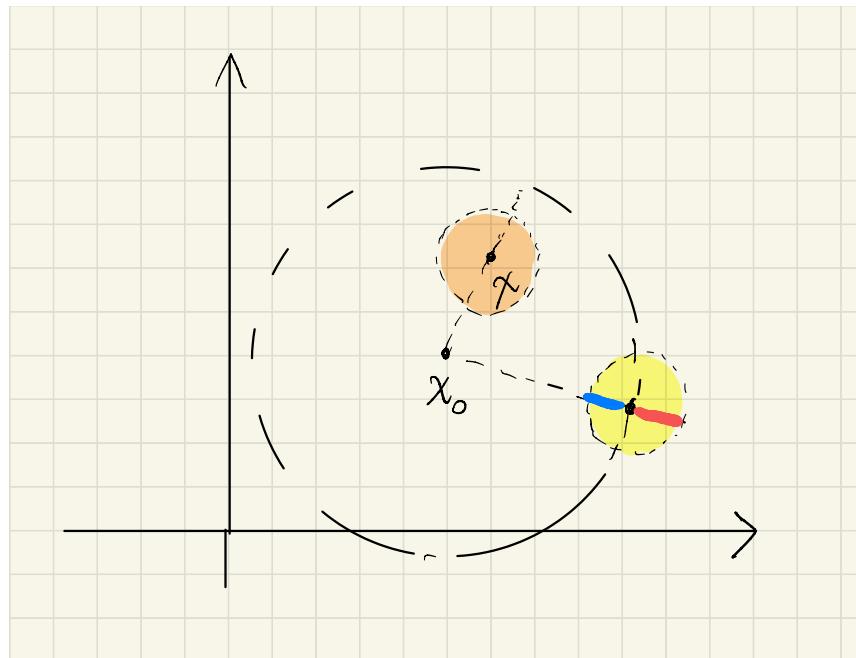


Figure 5.4.2

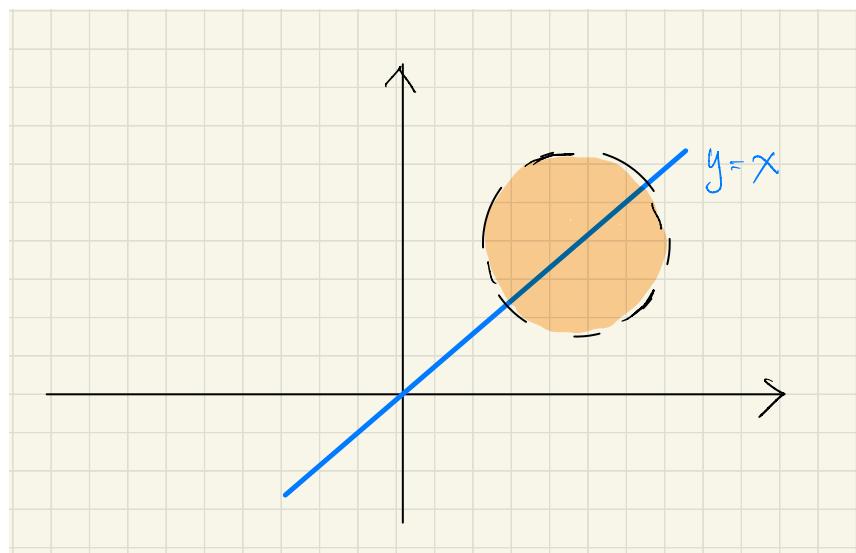


Figure 5.4.3

Gegeben eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , bezeichnen wir durch  $HP(A)$  die Menge der Häufungspunkte von  $A$ .

Es sei  $x_0$  ein innerer Punkt der Menge  $A$ . Dann folgt es aus der Definition, dass  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $A$  ist (Warum?), also

$$\overset{\circ}{A} \subseteq HP(A).$$

Aber die umgekehrte Richtung gilt nicht: ein Häufungspunkt von  $A$  gehört nicht unbedingt der Menge  $A$  (also nicht unbedingt  $\overset{\circ}{A}$ ). Zum Beispiel ist  $0$  ein Häufungspunkt der Menge  $A = \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ , aber  $0 \notin A$ . Dazu bemerken wir, dass der Rand von  $A \subseteq \mathbb{R}$  genau  $A \cup \{0\}$  ist, und dass alle Punkte in  $A$  isoliert sind.

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **diskret**, falls sie keine Häufungspunkte besitzt, also falls  $HP(A) = \emptyset$ . Zum Beispiel ist die Menge  $\mathbb{N}$ , betrachtet als Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , diskret.

Es sollte klar sein, dass alle Punkte einer diskreten Teilmenge isoliert sind (siehe Definition 5.3.1), aber die umgekehrte Richtung gilt nicht: Alle Punkte in  $A = \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$  sind isoliert, aber  $A$  besitzt den Häufungspunkt  $0$ , ist also nicht diskret.

### Übung 5.4.2

Um die vorherigen Konzepte zusammenzufassen und sie besser verstehen, sei  $HP(A)$  die Menge der Häufungspunkte von  $A$ . Beweisen Sie die folgenden:

- (a)  $HP(A) \subseteq \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ ;
- (b)  $x_0 \in \overset{\circ}{A} \implies x_0 \in HP(A)$ ;
- (c)  $x_0$  isoliert Punkt von  $A \implies x_0 \in \partial A$ .



Wir können die Beziehung zwischen  $HP(A)$  und  $\partial A$  noch besser verstehen.

- Zuerst, ist es wahr, dass  $HP(A) \subseteq \partial A$ ? Nein. Wir haben schon bemerkt, dass  $\overset{\circ}{A} \subset HP(A)$ , aber  $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$ ; also können wir nicht haben, dass  $\overset{\circ}{A} \subseteq HP(A) \subseteq \partial A$ .
- Nun ist es wahr, dass  $\partial A \subseteq HP(A)$ ? Nein. Die Punkte des Randes von  $A$  können auch isoliert sein (siehe Übung 5.4.2). Ein Beispiel ist die Menge  $A = \{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$ ; dann  $\partial A = A \cup \{0\}$  aber  $HP(A) = \{0\}$ .

Wir bemerken, dass in beiden Fällen, die “Probleme” (der Grund, warum die Antwort “Nein” ist) Punkte sind, die in  $A$  liegen (innere Punkte im ersten Fall und isolierte Punkte im zweiten Fall). Wir haben eigentlich das folgende Ergebniss:

**Lemma 5.4.1**

Für jede nichtleere Menge  $A$ , ist  $HP(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ .

*Beweis:* Wir beweisen zuerst, dass  $HP(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \subseteq \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ . Es sei dann  $x$  ein Häufungspunkt von  $A$ , der nicht in  $A$  liegt. Per definitionem von Häufungspunkt haben wir, dass für jede Umgebung  $U(x)$ , die Teilmenge  $U(x) \setminus \{x\}$  Punkte von  $A$  enthält. Dann besitzt jede Umgebung  $U(x)$  Punkte von  $A$ , und Punkte des Komplementes von  $A$ , nämlich  $x$ , und deshalb ist  $x$  ein Randpunkt von  $A$ .

Umgekehrt, es sei  $x \in \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ . Dann, per definitionem von Randpunkt, muss jede Umgebung  $U(x)$  sowohl Punkte von  $A$  als auch Punkte von  $\mathbb{R}^n \setminus A$  besitzen. Da nach Voraussetzung  $x \notin A$ , muss dann jede Menge  $U(x) \setminus \{x\}$  Punkte von  $A$  besitzen, d. h.  $x$  muss ein Häufungspunkt von  $A$  sein.  $\square$

**Definition 5.4.2**

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **offen**, falls sie entweder leer ist, oder jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt ist oder, mit anderen Worten, falls  $A = \overset{\circ}{A}$ .

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen ist.

Diese allgemeine Definition verdeutlicht, warum das Intervall  $(a, b)$  als offenes Intervall (bzw.  $[a, b]$  als abgeschlossenes Intervall) bezeichnet wird: es ist eine offene (bzw. abgeschlossene) Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

**Übung 5.4.3**

Beweisen Sie, dass, für eine beliebige Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\overset{\circ}{A}$  die größte offene Menge ist, die ganz enthalten in  $A$  ist, d. h. dass falls  $U$  eine offene Menge ist, für die  $U \subseteq A$ , dann ist  $U \subseteq \overset{\circ}{A}$ . ♠

**Bemerkung 5.4.1**

Wir möchten klarstellen, warum wir bei der Angabe der Teilmenge  $A$  immer die Menge  $\mathbb{R}^n$  angeben, von der sie als Teilmenge behandelt werden muss. Nehmen Sie zum Beispiel die Gerade der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Wir haben gesehen, dass in dieser Menge alle Punkte innere Punkte sind, also ist  $\mathbb{R}$  offen als Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Aber wenn wir diese Gerade als Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  betrachten, zum Beispiel als die Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ , dann ist kein Punkt ein innerer Punkt! Intuitiv ist es für eine offene Menge von  $\mathbb{R}^n$  möglich, ein Konzept der Dimension zu definieren: lokal (d. h. in einer Umgebung jedes ihrer Punkte) ist jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  mit einer Kugel der Dimension  $n$  identifizierbar. Da die gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  "Dimension 1 hat", kann sie keine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  (oder  $\mathbb{R}^n$  für alle  $n \geq 2$ ) sein. ◇

**Beispiel 5.4.2** 1. Wie schon gesagt, das Intervall  $(a, b)$  ist offen in  $\mathbb{R}$  (aber nicht offen in  $\mathbb{R}^n$ , für alle  $n \geq 2$ ). Das Intervall  $[a, b]$  ist abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ , weil die Vereinigung der Intervalle  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$  offen in  $\mathbb{R}$  ist.

2.  $\mathbb{R}^n$  ist sowohl offen als auch abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ .
3. Die offene Kugel  $U_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < R\}$  ist offen in  $\mathbb{R}^n$ .
4.  $\mathbb{Q}$  ist weder offen noch abgeschlossen in  $\mathbb{R}$  (Warum? Wir haben schon bemerkt, dass alle Punkte in  $\mathbb{Q}$  Randpunkte sind, also ist  $\mathbb{Q}$  nicht offen. Um zu beweisen, dass  $\mathbb{Q}$  nicht abgeschlossen ist, sollten wir nachprüfen, dass  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nicht offen ist. Ist es der Fall?).
5. Die Gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$  in  $\mathbb{R}^2$  ist nicht offen, aber sie ist in  $\mathbb{R}^2$  abgeschlossen (**Übung** für Sie).
6. Die Menge  $\{\frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$  ist weder offen noch abgeschlossen.



Das folgende Lemma gibt uns weitere Charakterisierungen einer offenen Menge:

**Lemma 5.4.2**

*Es sei  $A$  eine nicht leere Menge von  $\mathbb{R}^n$ . Dann sind die folgenden äquivalent:*

- (i)  $A$  ist offen;
- (ii)  $A$  ist die Vereinigung von offenen Mengen;
- (iii)  $A \cap \partial A = \emptyset$ .

Wir bemerken, dass die Vereinigung in (ii) nicht unbedingt eine endliche Vereinigung ist.

*Beweis:* Wir beweisen zuerst, dass  $(i) \iff (ii)$ .

“(i)  $\implies$  (ii)” Es sei  $U(x)$  eine offene Umgebung von  $x \in A$  (also, eine offene Kugel, die offen in  $\mathbb{R}^n$  ist). Dann gilt, dass  $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U(x)$  (diese Inklusion gilt, weil  $x \subseteq U(x)$ , und so  $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} U(x)$ ). Aber, da  $A$  offen ist, können wir die Umgebungen  $U(x)$  so wählen, dass  $U(x) \subseteq A$  für alle  $x \in A$ . Dann muss auch gelten  $\bigcup_{x \in A} U(x) \subseteq A$ , und wir haben die Gleichheit  $A = \bigcup_{x \in A} U(x)$ .

“(ii)  $\implies$  (i)”. Es sei  $A$  die Vereinigung von offenen Mengen, d. h.  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ , wobei  $A_i$  eine offene Menge ist, und  $I$  eine (nicht unbedingt endliche) Indexmenge ist. Dann für alle  $x \in A$ , existiert ein  $i \in I$ , sodass  $x \in A_i$ . Da  $A_i$  offen ist, existiert eine offene Umgebung  $U(x)$ , die ganz in  $A_i$  liegt. Da  $A_i \subseteq A$ , ist auch  $U(x) \subseteq A$ .

Wir beweisen nun, dass  $(i) \iff (iii)$ .

“(i)  $\implies$  (iii)”. Da  $A$  offen ist, ist per definitionem  $A = \overset{\circ}{A}$ . Aber, nochmal per definitionem von Inner- und Randpunkten, ist  $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$ . Also ist  $A \cap \partial A = \emptyset$ .

“(iii)  $\implies$  (i)”. Für eine beliebige Menge gilt immer  $A \subseteq \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ . Wenn  $A \cap \partial A = \emptyset$ , dann muss gelten  $A \subseteq \overset{\circ}{A}$ . Dann haben wir, dass  $A = \overset{\circ}{A}$ , weil die Implikation  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$  immer gilt.  $\square$

Ähnlich gelten die folgenden Charakterisierungen einer abgeschlossenen Menge:

**Lemma 5.4.3**

*Es sei  $A$  eine nicht leere Menge von  $\mathbb{R}^n$ . Dann sind die folgenden äquivalent:*

- (i)  $A$  ist abgeschlossen;
- (ii)  $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ .
- (iii)  $\partial A \subseteq A$ ;
- (iv)  $HP(A) \subseteq A$ .

*Beweis:* Wir beweisen zunächst, dass  $(ii) \iff (iii)$ .

In der Tat, folgt  $"(ii) \implies (iii)"$  aus der allgemeinen Tatsache, dass falls  $X \cup Y = Z$ , dann ist  $X \subseteq Z$ , wobei  $X, Y$  und  $Z$  beliebige Mengen sind. Um zu zeigen, dass  $"(iii) \implies (ii)"$ , genügt es zu bemerken, dass für jede Menge  $A \subseteq \overset{\circ}{A} \cup \partial A$  gilt. Falls dazu  $\partial A \subseteq A$ , dann gilt auch  $\overset{\circ}{A} \cup \partial A \subseteq A$  (weil  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$  immer gilt), und die Gleichheit  $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$  muss gelten.

Nun beweisen wir, dass  $(i) \iff (ii)$ .

$"(i) \implies (ii)"$  Wir nehmen zuerst an, dass  $A$  abgeschlossen ist, d. h.  $\mathbb{R}^n \setminus A$  ist offen. Dann erhalten wir, dass  $(\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n \setminus A$ . Da für eine beliebige Menge  $\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$  gilt (wobei diese Mengen disjunkt sind), wenn  $(\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n \setminus A$  erhalten wir, dass  $(\overset{\circ}{A} \cup \partial A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) = \mathbb{R}^n$ , wobei die Mengen  $(\overset{\circ}{A} \cup \partial A)$  und  $(\mathbb{R}^n \setminus A)$  noch disjunkt sind. Das heißt, dass  $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$  (Warum?).

$"(ii) \implies (i)"$  Aus  $\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$  (wobei diese Mengen disjunkt sind) und aus der Hypothese  $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$  erhalten wir, dass  $\mathbb{R}^n \setminus A = (\mathbb{R}^n \setminus A)$ . Also ist  $\mathbb{R}^n \setminus A$  offen und deshalb ist  $A$  abgeschlossen.

Endlich beweisen wir, dass  $(iii) \iff (iv)$ .

In beiden Richtungen kann Lemma 5.4.1 benutzt werden. In der Tat, falls  $\partial A \subseteq A$ , impliziert Lemma 5.4.1, dass  $\emptyset = \partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = HP(A) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)$ , also dass  $HP(A) \subseteq A$ . Ganz ähnlich beweist man, dass  $HP(A) \subseteq A$  die Inklusion  $\partial A \subseteq A$  impliziert.

□

### Bemerkung 5.4.2

**(Wie Äquivalenzen bewiesen werden sollten)** Die Art und Weise, wie wir diese Äquivalenzen bewiesen haben, ist nicht die schnellste: Um eine Äquivalenz von 4 Bedingungen, 1., 2., 3., 4., zu beweisen, reicht es aus, 4 Implikationen zu beweisen, zum Beispiel 1.  $\implies$  2., 2.  $\implies$  3., 3.  $\implies$  4. und 4.  $\implies$  1. (Warum reichen sie aus?). Im Allgemeinen, gegeben  $n$  Bedingungen, um zu beweisen, dass sie äquivalent sind, reicht es aus  $n$  Implikationen zu beweisen (z. B. mit dem Zyklus 1.  $\implies$  2., 2  $\implies$  3, ...,  $n-1 \implies n$  und  $n \implies 1$ ).

Wir haben hier 6 demonstriert. Aber wir haben diese Methode gewählt, weil sie uns lehrreicher erschien. ◇

Die beiden vorhergehenden Lemmata sind sehr abstrakt und die explizite Struktur der offenen Mengen von  $\mathbb{R}^n$  wird kaum genutzt. Wenn Sie sie gut analysieren, folgen sie nur aus mengentheoretischen Bemerkungen. Um zu verstehen, wo die Hauptpunkte der Beweise liegen und welche dieser Implikationen nicht gilt, wenn eine Menge nicht offen oder nicht abgeschlossen ist, ist es eine gute Übung, die Beweise anhand von Beispielen und Gegenbeispielen zu wiederholen (z. B. Was funktioniert nicht in Lemmata 5.4.2 und 5.4.3, falls  $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ , oder falls  $A = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ?).

**Übung 5.4.4**

Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  eine beliebige Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden:

1.  $A \cup \partial A$  ist immer abgeschlossen, wird **Abschluss** von  $A$  genannt und mit  $\overline{A}$  bezeichnet, also
 
$$\overline{A} := A \cup \partial A. \quad (5.4.1)$$
2.  $\overline{A} = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$  (Bemerken Sie, dass nun diese Mengen disjunkt sind; für eine beliebige Teilmenge  $A$ , könnten  $A$  und  $\partial A$  nicht disjunkt sein.)
3. Der Abschluss von  $A$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die  $A$  enthält, d. h. dass falls  $B$  eine abgeschlossene Menge ist, für die  $B \supseteq A$ , dann gilt  $B \supseteq \overline{A}$ .
4.  $A$  ist abgeschlossen genau dann, wenn  $A = \overline{A}$ .
5.  $\overline{A} = A \cup HP(A)$ .



Noch eine Bedingung, um zu verstehen, ob eine Menge abgeschlossen ist oder nicht.

**Lemma 5.4.4**

Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen genau dann, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  in  $A$  liegt.

*Beweis:* “ $\implies$ ” Es sei  $A$  abgeschlossen. Nehmen wir eine konvergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$  mit Grenzwert  $x_0$ . Falls  $x_0 \in A$ , gibt es nichts zu beweisen.

Nehmen wir an, dass  $x_0 \notin A$ ; wir müssen dann einen Widerspruch erhalten. Da  $(a_n)$  konvergent ist, gibt es für alle Umgebungen von  $x_0$  (unendlich viele) Elemente von  $(a_n)$ , deshalb enthält jede solche Umgebung immer Elemente von  $A$  und Elemente des Komplementes von  $A$  (nämlich  $x_0$ ). Dann liegt  $x_0$  in  $\partial A$ . Aber das ist nicht möglich, weil wir angenommen haben, dass  $A$  abgeschlossen ist, und deshalb, aus Lemma 5.4.3, dass  $\partial A \subseteq A$ , und die letzte Inklusion würde dann implizieren, dass  $x_0 \in A$ .

“ $\impliedby$ ” Es sei  $x_0 \in \partial A$ . Aus Lemma 5.4.3 genügt es zu beweisen, dass ein solches  $x_0$  immer in  $A$  liegt. Wir bilden dann eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ , die gegen  $x_0$  konvergiert, und dann muss nach Voraussetzung  $x_0$  in  $A$  sein. Da  $x_0 \in \partial A$ , muss jede Umgebung  $U_{\frac{1}{n}}(x_0)$  ein Element von  $A$  enthalten; es sei  $a_n$  ein solches Element. Wir bemerken, dass, da  $U_{\frac{1}{n}}(x_0) \subseteq U_{\frac{1}{m}}(x_0)$  für alle  $m \geq n$ , jede Umgebung  $U_{\frac{1}{n}}(x_0)$  alle Punkte  $a_m$ , für alle  $m \geq n$ , enthält. Dann konvergiert  $a_n$  gegen  $x_0$ , und deshalb ist  $x_0 \in A$ .  $\square$

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei wichtigen Sätzen. Wir definieren  $\mathcal{T}$  als die Familie der offenen Mengen in  $\mathbb{R}^n$ . Da diese Definition von der euklidischen Abstandsfunktion abhängt, nennen wir diese Menge die **euklidische Topologie**.

- Satz 5.4.5**
- (i)  $\emptyset \in \mathcal{T}$  und  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$ ;
  - (ii) Gegeben eine beliebige (nicht unbedingt endliche) Familie von offenen Mengen  $\{A_i \in \mathcal{T}, i \in I\}$ , dann ist  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$ ;
  - (iii) Gegeben eine endliche Familie von offenen Mengen  $\{A_j, j \in J\}$  mit  $|J| = k \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\bigcap_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$ .

*Beweis:* (i)  $\emptyset$  ist offen per definitionem. Wir haben schon bemerkt, dass  $\mathbb{R}^n$  offen ist (siehe Beispiele 5.4.1 2. und 5.4.2 2.).

- (ii) Wir haben die Behauptung in (ii) schon bewiesen: Dies ist genau die Implikation  $(ii) \implies (i)$  in Lemma 5.4.2
- (iii) Es sei  $x \in \bigcap_{j \in J} A_j$ . Wir müssen beweisen, dass  $x$  ein innerer Punkt in  $\bigcap_{j \in J} A_j$  ist. Dann nehmen wir Umgebungen  $U_{r_j}(x)$ , sodass  $U_{r_j}(x) \subseteq A_j$  für jede  $j \in J$ ; diese Umgebungen existieren, weil jede  $A_j$  offen ist. Da  $J$  endlich ist, besitzt die Menge  $\{r_j, j \in J\}$  ein positives Minimum, das wir mit  $r$  bezeichnen. Wir bemerken nun, dass  $U_r(x) \subseteq U_{r_j}(x)$  für alle  $r < r_j$ , und alle  $j \in J$ , also ist  $U_r(x)$  eine (offene) Umgebung von  $x$  in jeder Teilmenge  $A_j$ , und deshalb gilt  $U_r(x) \subseteq \bigcap_{j \in J} A_j$ .

□

Warum haben wir unterstrichen, dass in (iii) der Schnitt zwischen *endlich* vielen Mengen sein sollte? Weil, zum Beispiel, der (unendliche) Schnitt dieser Intervalle in  $\mathbb{R}$ :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left( -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right)$$

nicht offen ist. Es ist eigentlich genau der Punkt  $\{0\}$ , der nicht offen ist (Warum ist es so? Es gibt zwei Tatsachen zu beweisen, und zwar, dass  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}) = \{0\}$ , und dass  $\{0\}$  nicht offen in  $\mathbb{R}$  ist. **Übung**).

Mit der Hilfe der de-morganschen Gesetze<sup>3</sup> können wir sofort Satz 5.4.5 in einen Satz über abgeschlossene Mengen übersetzen:

- Satz 5.4.6** (i)  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen in  $\mathbb{R}^n$ ;
- (ii) Gegeben eine beliebige (nicht unbedingt endliche) Familie von abgeschlossenen Mengen  $\{A_i, i \in I\}$ , dann ist  $\bigcap_{i \in I} A_i$  abgeschlossen;
- (iii) Gegeben eine endliche Familie von abgeschlossenen Mengen  $\{A_j, j \in J\}$  mit  $|J| = k \in \mathbb{N}$ , dann ist  $\bigcup_{j \in J} A_j$  abgeschlossen.

*Beweis:* Übung. □

Warum haben wir angenommen, dass nur eine Vereinigung von *endlich* vielen abgeschlossenen Mengen abgeschlossen ist, und nicht eine beliebige Vereinigung? Weil die Vereinigung der abgeschlossenen Intervalle

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ -1 + \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1} \right]$$

das offene Intervall  $(-1, 1)$  ist. (Nochmal, warum ist das so?)

Am Ende dieses Abschnittes kommt die allgemeinere Formulierung des Konzepts der Stetigkeit, die auch in zukünftigen Vorlesungen verwendet wird. Zunächst führen wir das Konzept von offener Menge einer Teilmenge ein:

#### Definition 5.4.3

Es sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge. Wir sagen, dass  $A \subseteq D$  **offen in  $D$**  ist, falls eine offene Menge  $U$  in  $\mathbb{R}^n$  existiert, sodass  $A = D \cap U$ .

**Bemerkung 5.4.3** (a) Bemerken Sie, dass eine Teilmenge  $A$ , die offen in  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  ist, nicht unbedingt offen in  $\mathbb{R}^n$  ist. Zum Beispiel, in Beispiel 5.4.1 5., die gerade  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}^2$ , aber ist offen in  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ . In der Tat, ist jede Teilmenge  $D$  offen in  $D$ , weil  $D = D \cap \mathbb{R}^n$ , und  $\mathbb{R}^n$  ist immer offen (in  $\mathbb{R}^n$ ).

(b) Auf der anderen Seite, falls  $D$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist, dann ist  $A$  offen in  $D$  genau dann, wenn sie offen in  $\mathbb{R}^n$  ist. In der Tat, nehmen wir an, dass  $A$  offen in

---

<sup>3</sup>Es gilt eine Verallgemeinerung der de-morganschen Gesetze, die wir in Übung 1.1.5 aufgesagt haben, und zwar, dass  $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$  und  $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$ , für eine beliebige Familie von Mengen  $\{A_i \mid i \in I\}$ .

$D$  ist. Dann existiert eine offene Menge  $U$  in  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $A = D \cap U$ . Da wir angenommen haben, dass  $D$  offen ist, dann ist  $A$ , die Schnittmenge zwischen zwei offenen Mengen, auch offen. Umgekehrt, es sei  $A \subseteq D$ , wobei  $A$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist. Dann ist  $A = A \cap D$ , und deshalb ist sie offen in  $D$ .

◇

**Satz 5.4.7**

Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  eine Funktion. Dann ist  $f$  stetig in  $D$  genau dann, wenn

$$f^{-1}(U) \text{ offen in } D \text{ ist, für alle } U \text{ offen in } \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}).$$

Als Konsequenz der Bemerkung am Ende der Definition 5.2.2 können wir den vorherigen Satz auf den Fall verallgemeinern, in dem die Zielmenge  $\mathbb{R}^m$  ist, für eine beliebige  $m \in \mathbb{N}$ .

*Beweis:* “ $\implies$ ”. Es sei  $f$  stetig in  $D$  (siehe Definition 5.2.2), und es sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  (oder  $U \subseteq \mathbb{C}$ ) offen. Wir müssen beweisen, dass  $f^{-1}(U)$  offen in  $D$  ist. Falls  $f^{-1}(U) = \emptyset$ , haben wir die Behauptung bewiesen, weil  $\emptyset$  offen in jeder Teilmenge  $D$  ist (Warum?). Nehmen wir an, dass  $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ . Dann  $\exists x_0 \in D$ , sodass  $f(x_0) \in U$ . Weil, nach Voraussetzung,  $U$  offen ist, ist  $f(x_0)$  ein innerer Punkt von  $U$ , und deshalb  $\exists U_\epsilon(f(x_0))$ , sodass  $U_\epsilon(f(x_0)) \subseteq U$ . Die Stetigkeit in  $x_0$  (Definition 5.2.2) impliziert, dass  $\exists \delta > 0$ , sodass  $f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq U_\epsilon(f(x_0))$ . Da  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$  für eine beliebige Teilmenge  $A \subseteq D$  (Übung 1.6.5(a)), können wir schließen, dass

$$U_\delta(x_0) \cap D \subseteq f^{-1}(f(U_\delta(x_0) \cap D)) \subseteq f^{-1}(U_\epsilon(f(x_0))) \subseteq f^{-1}(U).$$

Also haben wir bewiesen, dass, gegeben ein beliebiger Punkt  $x_0 \in f^{-1}(U)$ , wir eine  $\delta > 0$  finden können (die von  $\epsilon$  und  $x_0$  abhängt!), sodass  $U_\delta(x_0) \cap D \subseteq f^{-1}(U)$ . Da  $x_0$  beliebig ist, können wir dann schließen, dass

$$\left( \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(U)} U_\delta(x_0) \right) \cap D = \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(U)} (U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq f^{-1}(U).$$

Auf der anderen Seite gilt, dass  $x_0 \in U_\delta(x_0)$ , und deshalb

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(U)} \{x_0\} \subseteq \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(U)} (U_\delta(x_0) \cap D) = \left( \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(U)} U_\delta(x_0) \right) \cap D.$$

Also haben wir bewiesen, dass

$$f^{-1}(U) = \left( \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(U)} U_\delta(x_0) \right) \cap D.$$

Nun genügt es zu bemerken, dass, da jede Umgebung  $U_\delta(x_0)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist, Satz 5.4.5(ii) impliziert, dass  $V := \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(U)} U_\delta(x_0)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  ist, und deshalb  $f^{-1}(U) = V \cap D$  offen in  $D$  ist.

“ $\Leftarrow$ ” Nehmen wir an, dass  $f^{-1}(U)$  offen in  $D$  ist, für alle offenen Teilmengen  $U \subseteq \mathbb{R}$  (oder  $U \subseteq \mathbb{C}$ ). Es sei  $U := U_\epsilon(f(x_0))$ . Dann muss  $f^{-1}(U)$  offen in  $D$  sein, also existiert ein  $V$  offen in  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $V \cap D = f^{-1}(U)$ . Da  $x_0 \in V \cap D$  und  $V$  offen ist, können wir eine offene Umgebung  $U_\delta(x_0)$  finden, sodass  $U_\delta(x_0) \subseteq V$ , und deshalb  $U_\delta(x_0) \cap D \subseteq V \cap D$ . Also können wir schließen, dass

$$f(U_\delta(x_0) \cap D) \subseteq f(V \cap D) = f(f^{-1}(U)) \subseteq U = U_\epsilon(f(x_0))$$

wobei die letzte Inklusion in Übung 1.6.5(b) bewiesen wurde. □

### 5.4.1 Kompaktheit

Wir führen zuerst das Konzept von beschränkter Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ :

#### Definition 5.4.4

Eine Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **beschränkt**, falls ein  $R > 0$  existiert, sodass  $K \subseteq U_R(x)$  für ein  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Falls  $K$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist, dann stimmt diese Definition mit der Definition einer beschränkten Teilmenge von  $\mathbb{R}$  mit Ordnung  $\leq$  überein (siehe Definition 1.2.11).

Wir führen eine der möglichen Definitionen von Kompaktheit (die gewählte Definition ist einfacher zu verwenden und zu visualisieren).

#### Definition 5.4.5

Eine Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **(folgen)kompakt**, falls jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt  $x_0 \in K$  konvergiert.

In diesem Abschnitt werden wir eine folgenkompakte Menge einfach **kompakt** nennen.<sup>4</sup>

#### Beispiel 5.4.3

Für die Kompaktheit ist es einfacher Teilmengen zu finden, die nicht kompakt sind, als zu beweisen, dass einige Mengen kompakt sind.

<sup>4</sup>Es gibt eine zweite Definition der Kompaktheit, die unterschiedlich von dieser Definition ist. Diese zwei Konzepte von Kompaktheit sind jedoch für die euklidische Topologie äquivalent.

- Das Intervall  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ist nicht kompakt. Um zu sehen, dass das der Fall ist, nehmen wir eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ , die gegen  $b$  konvergiert (zum Beispiel, ist  $a_n = b - \frac{1}{n+1}$  für  $n$  groß genug). Dann konvergiert jede Teilfolge gegen  $b$ , aber  $b \notin (a, b)$ . Also scheint hier das Problem zu sein, dass  $(a, b)$  nicht abgeschlossen ist.
- Die Menge  $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt. Eigentlich besitzt die Folge  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine konvergente Teilfolge. Hier scheint das Problem zu sein, dass  $\mathbb{R}$  nicht beschränkt ist.



Wir sind bereit, das erste Ergebnis zu demonstrieren:

#### **Lemma 5.4.8**

*Jedes abgeschlossene Intervall  $[a, b]$  ist kompakt.*

*Beweis:* Dieses Ergebnis ist eine direkte Folgerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.2.2): Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [a, b]$  ist notwendigerweise beschränkt, und deshalb erlaubt uns Satz 4.2.2 zu schließen, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzt. Da  $[a, b]$  abgeschlossen ist, impliziert Lemma 5.4.4, dass der Grenzwert in  $[a, b]$  liegt.  $\square$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß kann sofort auf höheren Dimensionen verallgemeinert werden:

#### **Satz 5.4.9**

*(Bolzano-Weierstraß) Es sei  $K$  eine abgeschlossene und beschränkte Menge in  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $K$  (folgen)kompakt.*

*Beweis:* Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K$ . Wir schreiben diese Folge mit der Hilfe ihrer Komponenten, und zwar  $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Wir bemerken, dass, da  $K$  beschränkt ist, die reellen Folgen  $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$  auch beschränkt sind, für alle  $i = 1, \dots, n$ . Dann impliziert der Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen, Satz 4.2.2, dass  $(a_{1j})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  eine konvergente Teilfolge  $(a_{1j_l})_{l \in \mathbb{N}}$  besitzt. Wir nehmen nun die Folge  $(a_{2j_l})_{l \in \mathbb{N}}$ . Weil diese Folge beschränkt ist, impliziert Satz 4.2.2, dass es eine Teilfolge gibt, die konvergent ist. Es sei  $(j_{l_m})_{m \in \mathbb{N}}$  die Folge der Indizes der konvergenten Teilfolge  $(a_{2j_{l_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ . Wir bemerken zuerst, dass  $(a_{1j_{l_m}})_{m \in \mathbb{N}}$  auch konvergent ist (sie ist eine Teilfolge einer konvergenten Folge). Nun nehmen wir  $(a_{3j_{l_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ . Wir bemerken, dass diese (Teil)Folge beschränkt ist, und deshalb ... Nach Wiederholung desselben Verfahrens können wir beweisen, dass es eine Folge von Indizes  $(N_s)_{s \in \mathbb{N}}$  gibt, sodass  $(a_{jN_s})_{s \in \mathbb{N}}$  für alle  $j = 1, \dots, n$  konvergiert. Es seien  $x_j$  die dazugehörigen Grenzwerte; dann konvergiert  $(a_{N_s}) := (a_{1N_s}, \dots, a_{nN_s})_{s \in \mathbb{N}}$  gegen  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Da  $K$  abgeschlossen ist, muss der Grenzwert der Menge  $K$  gehören (Lemma 5.4.4).  $\square$

Umgekehrt gilt, dass:

**Satz 5.4.10**

*Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  (folgen)kompakt. Dann ist  $K$  beschränkt und abgeschlossen.*

*Beweis:* Wir beweisen zuerst, dass  $K$  beschränkt sein muss. Inverser Beweis: Wir beweisen, dass wenn  $K$  nicht beschränkt ist, dann ist  $K$  nicht kompakt. Wenn  $K$  nicht beschränkt ist, dann ist der Schnitt  $K \cap D_R(0)$  nicht leer, für alle  $R > 0$ . Das heißt, dass wir eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$  finden können, sodass  $|a_n| \rightarrow +\infty$  (Warum ist das so?), und deshalb  $|a_{n_k}| \rightarrow +\infty$ , für eine beliebige Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Da jede konvergente Folge beschränkt ist, kann eine solche beliebige Teilfolge  $(a_{n_k})$  nicht konvergieren. Also ist  $K$  nicht kompakt.

Wir beweisen, dass  $K$  abgeschlossen ist. Wir benutzen Lemma 5.4.4. Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $K$ . Die Kompaktheit impliziert, dass der Grenzwert der Menge  $K$  gehört (weil eine beliebige Teilfolge gegen denselben Grenzwert konvergiert). Dann impliziert Lemma 5.4.4, dass  $K$  abgeschlossen ist.  $\square$

Wir haben dann bewiesen, dass

**Satz 5.4.11**

*Eine Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  ist (folgen)kompakt genau dann, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Der vorherige Satz ist als **Satz von Heine-Borel** bekannt. Aber, genauer gesagt, gilt der Satz von Heine und Borel für das verallgemeinerte Konzept von Kompaktheit, das wir nicht eingeführt haben.

Jetzt können wir die wichtigen Konsequenzen dieser Konzepte und Theoreme ableiten:

**Satz 5.4.12**

*Es sei  $K \subseteq \mathbb{R}$  eine nicht leere kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}$ . Dann besitzt  $K$  ein Maximum und Minimum.*

*Beweis:* Zunächst bemerken wir, dass  $K$  beschränkt ist (Satz 5.4.10), und da  $\mathbb{R}$  ordnungsvollständig ist, besitzt  $K$  ein Supremum  $\sup K$  und ein Infimum  $\inf K$ . Wir müssen beweisen, dass  $\sup K$  und  $\inf K$  der Menge  $K$  gehören und dann folgt es, dass  $\sup K = \max K$  und  $\inf K = \min K$ . Wir nehmen  $\sup K \in \mathbb{R}$  und finden

eine Folge in  $K$ , die gegen  $\sup K$  konvergiert. Wir benutzen, dass  $\sup K$  die kleinste obere Schranke ist, also: für jede  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ist  $\sup K - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke für  $K$ , und deshalb gibt es ein Element  $a_n \in K$ , das erfüllt  $\sup K - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup K$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Durch den Einschnürungssatz (Satz 4.1.6) konvergiert  $a_n$  gegen  $\sup K$ .

Da  $K$  kompakt ist, impliziert Satz 5.4.10, dass  $K$  abgeschlossen ist, und deshalb impliziert Lemma 5.4.4, dass  $\sup K \in K$ .

Eine ähnliche Argumentation kann für das Infimum gemacht werden.  $\square$

## 5.4.2 Zusammenhängende Teilmengen

### Definition 5.4.6

Eine Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **zusammenhängend**, falls es *keine* Teilmengen  $U_1$  und  $U_2$  von  $D$  gibt, sodass

- $U_1$  und  $U_2$  offen in  $D$  sind (siehe Definition 5.4.3);
- $D = U_1 \cup U_2$ ;
- $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ;
- $U_1 \neq \emptyset$  und  $U_2 \neq \emptyset$ .

Also, äquivalent gesagt, ist  $D$  zusammenhängend, falls wir keine Mengen  $V_1$  und  $V_2$  von  $\mathbb{R}^n$  finden können, sodass

- $V_1$  und  $V_2$  offen in  $\mathbb{R}^n$  sind;
- $D = (D \cap V_1) \cup (D \cap V_2)$ ;
- $(D \cap V_1) \cap (D \cap V_2) = \emptyset$ ;
- $D \cap V_1 \neq \emptyset$  und  $D \cap V_2 \neq \emptyset$ .

### Übung 5.4.5

Eine Teilmenge  $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt **abgeschlossen in  $D$** , falls es eine abgeschlossene Menge  $C$  von  $\mathbb{R}^n$  gibt, sodass  $A = C \cap D$ . Beweisen Sie, dass  $D$  nicht zusammenhängend ist genau dann, wenn:

- (a) Es eine Teilmenge  $A$  gibt, sodass  $\emptyset \subsetneq A \subsetneq D$ , und sodass  $A$  offen und abgeschlossen in  $D$  ist.
- (b)  $D$  als die disjunkte Vereinigung von zwei abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen von  $D$  geschrieben werden kann.



- Beispiel 5.4.4**
- Die Teilmenge  $(-\infty, 0) \cup [1, 2)$  ist nicht zusammenhängend. In der Tat genügt es zu definieren  $V_1 = (-\infty, 0)$  und  $V_2 = (1 - \epsilon, 2)$ , für  $\epsilon < 1$ .
  - $\mathbb{Q}$  ist nicht zusammenhängend. Warum? Denken Sie an Dedekindsche Schnitte:  $\mathbb{Q}$  kann als  $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$  geschrieben werden.

♣

Wie für die Kompaktheit, können wir zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}$  charakterisieren. Im folgenden meinen wir mit Intervall  $I$  jede nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$  des Typs  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$  mit  $a \leq b$ , und  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(a, +\infty)$ ,  $[a, +\infty)$  und  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ . Wir bemerken, dass die Menge mit einem Punkt  $\{x_0\}$  auch als Intervalle betrachtet werden (falls  $a = b = x_0$ , ist  $[a, b]$  genau  $\{x_0\}$ ).

**Satz 5.4.13**

*Eine Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{R}$  ist zusammenhängend genau dann, wenn sie ein Intervall ist.*

**Bemerkung 5.4.4**

In diesem Beweis werden wir sehen, dass die Eigenschaft, die ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  (und damit seinen Zusammenhang) charakterisiert, folgende ist:

$$\forall x, y \in I, \quad [x, y] \subseteq I.$$

◊

*Beweis:* “ $\Leftarrow$ ” Wir beweisen zunächst, dass falls  $I$  ein Intervall ist, dann ist  $I$  zusammenhängend. Widerspruchsbeweis: nehmen wir an, dass  $I$  nicht zusammenhängend ist. Wir müssen einen Widerspruch erhalten.

Wenn  $I$  nicht zusammenhängend wäre, dann könnten wir zwei disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $\mathbb{R}$  finden, sodass  $I = (A \cap I) \cup (B \cap I)$  (siehe Übung 5.4.5 (b)). Es sei  $a \in A$  und  $b \in B$ . Da  $I$  ein Intervall ist, ist das ganze Intervall  $[a, b]$  in  $I$  enthalten (dies ist wirklich die einzige Eigenschaft eines Intervall, die wir benutzen werden). Da  $A$  und  $[a, b]$  abgeschlossen sind, so ist auch  $A \cap [a, b]$  (Satz 5.4.6). Dazu ist  $A \cap [a, b]$  eine Teilmenge einer beschränkten Teilmenge, also ist sie auch beschränkt. Dank Satz 5.4.12 besitzt  $A \cap [a, b]$  ein Maximum, das wir mit  $m$  bezeichnen. Wir bemerken, dass alle Elemente  $x$  von  $[a, b]$  erfüllen  $x \leq b$ , deshalb dieselbe Ungleichheit erfüllen die Elemente von  $A \cap [a, b]$ ; dazu, da  $A$  und  $B$  disjunkt sind, und  $b \in B$ , müssen die Elemente  $x$  von  $A \cap [a, b]$  die strikte Ungleichheit  $x < b$  erfüllen. Also, insbesondere ist  $m < b$ . Nehmen wir das Intervall  $(m, b)$ . Da  $(m, b) \subseteq [a, b] \subseteq I$ ,  $I = (I \cap A) \cup (I \cap B)$ ,  $A$  und  $B$  disjunkt sind und  $(m, b) \cap A = \emptyset$  ( $m$  ist das Maximum von  $A \cap [a, b]$ ), haben wir  $(m, b) \subseteq B \cap [a, b] \subseteq B$ . Aber  $B$  ist nach Voraussetzung abgeschlossen, und für jede abgeschlossene Menge  $C$ , falls  $(x, y) \subseteq C$  dann ist auch  $[x, y] \subseteq C$  (warum?). Also sollte  $m \in B$  liegen, und das ist ein Widerspruch, weil  $m \in A$  und  $B$  disjunkt von

$A$  ist.

“ $\implies$ ” Nun beweisen wir, dass falls  $I \subseteq \mathbb{R}$  zusammenhängend ist, dann ist  $I$  ein Intervall. Indirekter Beweis: Nehmen wir an, dass  $I$  kein Intervall ist. Wir müssen beweisen, dass  $I$  nicht zusammenhängend ist.<sup>5</sup> Da die Mengen mit einem Punkt  $\{x_0\} \subseteq \mathbb{R}$  als Intervallen betrachtet werden können, können wir annehmen, dass  $I$  mindestens aus zwei Punkten besteht. Da  $I$  kein Intervall ist, das heißt, dass es zwei Elemente  $a, b \in I$  gibt mit  $a < b$ , und sodass das Intervall  $(a, b)$  nicht ganz in  $I$  enthalten ist. Es sei dann  $c \in \mathbb{R} \setminus I$ , sodass  $a < c < b$ , und wir definieren  $U_1 := (-\infty, c) \cap I$  und  $U_2 := (c, +\infty) \cap I$ . Dann sind  $U_1$  und  $U_2$  disjunkt, offen in  $I$ , nicht leer, und  $I = U_1 \cup U_2$ , d.h., dass  $I$  nicht zusammenhängend ist.  $\square$

## 5.5 Stetige Funktionen und topologische Konsequenzen

Welche topologischen Eigenschaften werden durch eine stetige Funktion “erhalten”? Zum Beispiel:

- (a) Ist es wahr, dass gegeben eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ), das Bild einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^n$  offen in  $\mathbb{R}$  ist? Im Allgemeinen nein. Zum Beispiel, es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x) = x^2$ . Dann ist das Bild eines beliebigen Intervall  $(-a, a)$ , mit  $a > 0$ , gegeben durch  $[0, a^2]$ , das nicht offen in  $\mathbb{R}$  ist. (Warum?)

Man könnte sich dann fragen, ob das Bild einer offenen Menge der Definitionsmenge  $D$  offen im Bild  $f(D)$  ist (siehe Definition 5.4.3). Zum Beispiel,  $[0, a^2]$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}$ , aber es ist offen in  $[0, +\infty)$ , das Bild von  $f$ . Die Antwort ist im Allgemeinen nochmal nein. Zum Beispiel, es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D = [0, 1] \cup [2, 3]$  und  $f(x) = x$  für alle  $x \in [0, 1]$ , und  $f(x) = 1$  für alle  $x \in [2, 3]$ . Diese Funktion ist stetig (warum?). Dazu ist  $[2, 3]$  offen in  $D$  (in der Tat können wir  $[2, 3]$  als  $(2 - \epsilon, 3 + \epsilon) \cap D$  schreiben, für ein kleines  $\epsilon > 0$ ), aber  $f([2, 3]) = \{1\}$ , die nicht offen in  $f(D) = [0, 1]$  ist (warum?).

- (b) Ist es wahr, dass gegeben eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ), das Bild einer abgeschlossenen Menge in  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}$  ist? Nein. Zum Beispiel, es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion  $f(x, y) = x$ . Man kann beweisen, dass  $f$  stetig ist (Wie? Ideen?). Es sei dann  $A$  die Teilmenge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \frac{1}{x}\}$ . Das ist genau der Graph der Funktion  $g(x) = \frac{1}{x}$ , für  $x > 0$ , und ist eine Hyperbel. Man kann beweisen, dass  $A$  abgeschlossen ist. Aber  $f(A) = (0, +\infty)$ , die nicht abgeschlossen in  $\mathbb{R}$  ist.

---

<sup>5</sup>Erinnern Sie sich daran, dass die Implikation “ $P \implies Q$ ” äquivalent zur Implikation “ $\neg Q \implies \neg P$ ” ist.

- (c) Ist es wahr, dass das Bild durch eine stetige Funktion einer beschränkten Menge auch beschränkt ist? Nein. Zum Beispiel, es sei  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; dann ist das Bild des offenen Intervall  $(0, 1)$  das unbeschränkte Intervall  $(1, +\infty)$ .

Eine Eigenschaft, die durch Stetigkeit erhalten bleibt, ist Kompaktheit:

### Satz 5.5.1

*Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) eine stetige Funktion und  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  eine kompakte Teilmenge. Dann ist  $f(K)$  kompakt.*

*Beweis:* Es sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $f(K)$ . Wir müssen beweisen, dass es eine Teilfolge  $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gibt, die gegen einen Grenzwert  $b \in f(K)$  konvergiert.

Da  $b_n \in f(K)$ , existiert  $a_n \in K$ , sodass  $f(a_n) = b_n$ , für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $K$  kompakt ist, gibt es eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $a \in K$  konvergiert. Nach Voraussetzung ist  $f$  stetig und Satz 5.2.1 impliziert, dass  $f(a_{n_k}) \rightarrow f(a) \in f(K)$ . Also ist die gesuchte konvergente Teilfolge von  $(b_n)$  genau  $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , wobei  $b_{n_k} = f(a_{n_k})$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

### Bemerkung 5.5.1

Das Ergebnis von Satz 5.5.1 sollte nun angesichts der negativen Antworten in (b) und (c) und angesichts der Tatsache, dass die kompakten Mengen von  $\mathbb{R}^n$  genau die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen sind (Satz 5.4.11), überraschender sein. Wir schließen daraus, dass zur Erhaltung der Kompaktheit, die Tatsachen, dass die Menge abgeschlossen und beschränkt sein muss, wirklich *gleichzeitig* notwendig sind.  $\diamond$

### Definition 5.5.1

Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion (nicht unbedingt stetig). Wir sagen, dass  $f$  an  $x_0$  ein **Minimum** (bzw. **Maximum**) hat, falls  $f(x_0) \leq f(x)$  (bzw.  $f(x_0) \geq f(x)$ ) für alle  $x \in D$ .

Es ist nicht immer wahr, dass eine (stetige) Funktion ein Minimum oder Maximum besitzt. Zum Beispiel, gegeben  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ , hat  $f$  kein Minimum und kein Maximum auf  $(0, 1)$ . Hier scheint das Problem zu sein, dass das Bild von  $(0, 1)$  offen ist. Noch ein Gegenbeispiel: Es sei  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; dann besitzt  $f$  kein Maximum und kein Minimum (das Bild  $f(0, +\infty) = (0, +\infty)$  ist offen und unbeschränkt). Dank Satz 5.5.1 und Satz 5.4.12 haben wir jedoch Folgendes:

**Korollar 5.5.2**

*Es sei  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, wobei  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist. Dann besitzt  $f$  ein Maximum und ein Minimum.*

*Beweis:* Das ist eine direkte Konsequenz von Sätzen 5.4.12 und 5.5.1. Da  $f$  stetig ist und  $K$  kompakt ist, ist  $f(K)$  kompakt (Satz 5.5.1). Aber kompakte Teilmengen  $f(K)$  von  $\mathbb{R}$  besitzen immer Maxima und Minima (Satz 5.4.12), die in diesem Fall genau Maxima und Minima der Funktion  $f$  sind.  $\square$

**Bemerkung 5.5.2**

Wie oben bemerkt, damit  $f(K)$  kompakt ist, muss  $K$  beschränkt und abgeschlossen sein. Natürlich ist die Stetigkeit von  $f$  auch nötig: Es sei  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $f(x) = x + 1$  für  $x \in [-1, 0]$ ,  $f(0) = 0$  und  $f(x) = x - 1$  für  $x \in (0, 1]$ . Dann ist  $f([-1, 1]) = (-1, 1)$ , und deshalb besitzt  $f$  kein Maximum und kein Minimum.  $\diamond$

**Satz 5.5.3**

*Es sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) eine stetige Funktion und  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist  $f(D)$  zusammenhängend.*

*Beweis:* Indirekter Beweis: Nehmen wir an, dass  $f(D)$  nicht zusammenhängend ist. Dann beweisen wir, dass  $D$  nicht zusammenhängend ist. Wenn  $f(D)$  nicht zusammenhängend ist, dann existieren zwei offene, disjunkte, nichtleere Mengen  $V_1$  und  $V_2$  von  $\mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ), sodass  $f(D) \subseteq V_1 \cup V_2$ . Da  $f$  stetig ist, sind die Mengen  $f^{-1}(V_1)$  und  $f^{-1}(V_2)$  offen in  $\mathbb{R}^n$  (Satz 5.4.7). Da  $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2)$  erhalten wir, dass

$$D \subseteq f^{-1}(f(D)) \subseteq f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2).$$

Dazu bemerken wir, dass  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  impliziert, dass  $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$ , und deshalb ist  $D$  nicht zusammenhängend.  $\square$

Wir sind nun bereit, eine wichtige Konsequenz dieser Sätze für stetige Funktionen anzugeben. Wir bemerken zunächst, dass jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ein Maximum  $M$  und Minimum  $m$  in  $[a, b]$  hat, d. h., wir können ein  $x_M \in [a, b]$  und  $x_m \in [a, b]$  finden, sodass  $f(x_m) = m \leq f(x) \leq M = f(x_M)$ , für alle  $x \in [a, b]$ . Diese Bemerkung ist eine direkte Konsequenz des Satzes von Bolzano-Weierstraß (Satz 5.4.9), der impliziert, dass  $[a, b]$  kompakt in  $\mathbb{R}$  ist, und des Korollares 5.5.2.

Es ist jedoch noch nicht klar, ob  $f$  alle Werte zwischen  $m$  und  $M$  annimmt. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes, in dem der Zusammenhang des Intervalls  $[a, b]$  eine grundlegende Rolle spielt:

**Korollar 5.5.4**

(**Zwischenwertsatz**) Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann nimmt  $f$  alle Werte zwischen dem Minimum  $m$  und dem Maximum  $M$  an, also:

Für alle (feste)  $y \in [m, M]$ , gibt es (mindestens) eine Lösung  $x_0 \in [a, b]$  der Gleichung  $f(x) = y$ .

Mit anderen Worten, ist

$$f([a, b]) = [m, M].$$

(Siehe Abbildung 5.5.1)

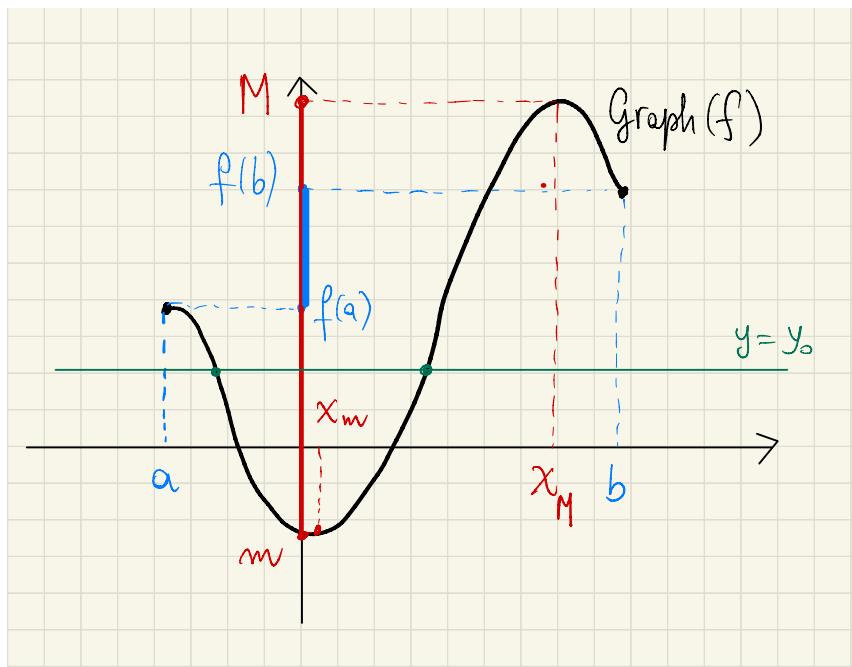


Figure 5.5.1

*Beweis:* Satz 5.4.13 impliziert, dass  $[a, b]$  zusammenhängend ist. Dazu, aus Satz 5.5.3 erhalten wir, dass  $f([a, b])$  zusammenhängend ist und deshalb, nochmal aus Satz 5.4.13, dass  $f([a, b])$  ein Intervall ist. Da  $f$  ein Maximum  $M$  und Minimum  $m$  annimmt (Korollar 5.5.2), muss das Bild genau das Intervall  $[m, M]$  sein.  $\square$

Dieses Korollar impliziert sofort die folgende alternative Version des Zwischenwertsatz:

**Korollar 5.5.5**

**(Zwischenwertsatz II)** Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann nimmt  $f$  alle Werte zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ .

*Beweis:* Nehmen wir an, dass  $f(a) \leq f(b)$  (der Fall in dem  $f(a) \geq f(b)$  ist ganz analog). Dann, da  $m \leq f(a) \leq f(b) \leq M$ , haben wir  $[f(a), f(b)] \subseteq [m, M]$ .  $\square$

Also impliziert insbesondere das Korollar, dass für alle  $y \in [f(a), f(b)]$ , die Gleichung  $f(x) = y$  eine Lösung  $x_0 \in [a, b]$  hat.

**Bemerkung 5.5.3**

Falls  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  oder, allgemeiner, falls  $m < 0 < M$ , dann besitzt  $f$  eine Nullstelle in  $[a, b]$ , d. h. existiert ein  $x_0 \in [a, b]$ , sodass  $f(x_0) = 0$ .  $\diamond$

Um zusammenzufassen, haben wir im Beweis des Zwischenwertsatzes drei Tatsachen benutzt: Gegeben eine stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

- das Bild eines Intervall ist immer ein Intervall (Sätze 5.4.13 und 5.5.3),
- das Bild einer kompakten Teilmenge ist immer kompakt (Satz 5.5.1), und
- die einzigen Intervalle, die kompakt sind, sind der Gestalt  $[a, b]$ , für  $a \leq b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  (Satz 5.4.10).

**Bemerkung 5.5.4**

Der Zwischenwertsatz gibt uns Informationen über die Existenz einer Lösung der Gleichung

$$f(x) = y$$

für eine stetige Funktion  $f$ : in der Tat impliziert Korollar 5.5.4, dass gegeben eine stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , existiert eine Lösung  $x_0 \in [a, b]$  der Gleichung  $f(x) = y$  genau dann, wenn  $a', b'$  existieren, sodass  $a \leq a' < b' \leq b$  und  $f(a') \leq y \leq f(b')$ . (Warum ist das so? **Übung!**)

Aber der Zwischenwertsatz gibt uns keine Informationen über die Eindeutigkeit der Lösung, siehe nochmal Abbildung 5.5.1.  $\diamond$

**Übung 5.5.1** • Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, wobei  $I$  ein Intervall ist.

Nehmen Sie an, dass das Bild  $f(I)$  nach unten (bzw. nach oben) unbeschränkt ist. Beweisen Sie, dass  $f(I)$  ein Intervall der Gestalt  $(-\infty, a)$  oder  $(-\infty, a]$  ist, wobei  $a \in \mathbb{R}$  oder  $a = +\infty$  (bzw.  $f(I)$  ein Intervall der Gestalt  $(a, +\infty)$  oder  $[a, +\infty)$  ist, wobei  $a \in \mathbb{R}$  oder  $a = -\infty$ ).

- Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (bzw. dass  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ). Beweisen Sie, dass  $f$  eine Nullstelle besitzt, d.h. existiert ein  $x_0 \in \mathbb{R}$ , sodass  $f(x_0) = 0$ .

- Beweisen Sie, ohne Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra (siehe Satz 3.2.1 und Übung 3.2.3), dass jedes Polynom ungeraden Grades (mindestens) eine reelle Nullstelle hat.



## 5.6 Zusätzliche Übungen und Beispiele

### Übung 5.6.1

Zeigen Sie, dass die *Kosinusfunktion*, die *Tangensfunktion* und die *Kotangensfunktion* stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereich sind. ♠

### Übung 5.6.2

Es sei  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Nehmen Sie an, dass  $l_1$  und  $l_2$  existieren, so dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ und } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2.$$

Zeigen Sie, dass  $l_1 = l_2$ . ♠

### Übung 5.6.3

Es seien  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $l \in \mathbb{R}$ . Welche der folgenden drei Prädikate ist die Verneinung des Prädikats

“Der Grenzwert von  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow x_0$  ist  $l$ ”?

- (a)  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| \geq \epsilon$
- (b)  $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - l| \geq \epsilon$
- (c)  $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| \geq \epsilon$



### Übung 5.6.4

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Welche der folgenden drei Prädikate ist die Verneinung des Prädikats

“ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist bestimmt divergent gegen  $+\infty$  für  $x \rightarrow -\infty$ ”

- (a)  $\exists h > 0, \forall k > 0, \exists x \in D : x < -k \text{ und } f(x) < h$
- (b)  $\forall h > 0, \exists k > 0, \forall x \in D : x < -k \implies f(x) < h$
- (c)  $\exists h > 0, \exists k > 0, \forall x \in D : x < -k \implies f(x) < h$



### Übung 5.6.5

Es seien  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $l \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$$

gilt. Insbesondere,  $f(x) \rightarrow 0$  gilt genau dann, wenn  $|f(x)| \rightarrow 0$ . ♠

**Übung 5.6.6**

Es seien  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $l \in \mathbb{R}$ .

- Nehmen Sie an, dass es zu jeder offenen Umgebung  $V$  von  $l$  eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, so dass

$$f((U \setminus \{x_0\}) \cap D) \subseteq V$$

gilt. Kann man daraus schließen, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l ?$$

Rechtfertigen Sie Ihre Antwort.

- Nehmen Sie nun an, dass es zu jeder offenen Umgebung  $U$  von  $x_0$  eine offene Umgebung  $V$  von  $l$  gibt, so dass

$$f((U \setminus \{x_0\}) \cap D) \subseteq V$$

gilt. Kann man daraus schließen, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l ?$$

Rechtfertigen Sie Ihre Antwort.



**Übung 5.6.7** (a) Es seien  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$  und  $l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Zeigen Sie, dass wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l > 0$$

(bzw.  $< 0$ ) gilt, gibt es eine Umgebung  $U(x_0)$  um  $x_0$ , so dass für alle  $x \in (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ , gilt  $f(x) > 0$  (bzw.  $f(x) < 0$ ).

- (b) Ist die Umkehrung der vorherigen Aussage wahr? Nämlich, ist es wahr, dass wenn  $f$  auf einer Umgebung um  $x_0$  (ohne  $x_0$ ) positiv ist und der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert, dann ist dieser Grenzwert positiv?

**Übung 5.6.8**

Es seien  $f, g$  und  $h$  auf  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  definierte reelle Funktionen und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Nehmen Sie an, dass es eine Umgebung  $U(x_0)$  um  $x_0$  existiert, so dass

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

für alle  $x \in (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$  gilt. Zeigen Sie, dass wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l \in \mathbb{R},$$

dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l.$$



### Beispiel 5.6.1

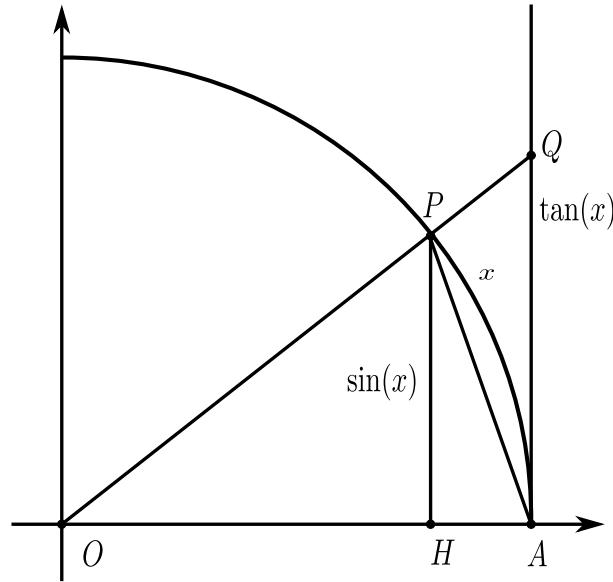
Wir beweisen, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

gilt.

Betrachten Sie die folgende Abbildung: Es sei  $x$  ( $0 < x < \pi/2$ ) die Länge des Kreisbogens  $PA$  des Kreises mit Mittelpunkt  $O$  und Radius 1. Die Länge der Strecke  $PH$  ist  $\sin(x)$  und die der Strecke  $QA$  ist  $\tan(x)$ . Der Flächeninhalt des Dreiecks  $OAP$  ist  $\sin(x)/2$  und der des Kreissektors  $OAP$  ist  $x/2$  und der des Dreiecks  $OAQ$  ist  $\tan(x)/2$ . Wir haben also

$$\sin(x) < x < \tan(x). \quad (5.6.1)$$



Wir dividieren die Ungleichung 5.6.1 durch  $\sin(x)$  und erhalten für die Kehrwerte die folgende Ungleichung

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Diese Ungleichung ändert sich nicht, wenn wir  $x$  durch  $-x$  ersetzen. Somit bleibt die Ungleichung für  $-\pi/2 < x < 0$  gültig. Da  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ , schließen wir aus der vorherigen Übung, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



### Beispiel 5.6.2

Wir beweisen, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x} = 0 \quad (5.6.2)$$

gilt.

Aus dem Additionstheorem für den Kosinus folgt

$$\frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = \frac{2 \sin(x)^2}{x^2} = 2 \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^2.$$

Somit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left( \frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2.$$

Es reicht nun aus, zu bemerken, dass

$$\frac{1 - \cos(2x)}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} \cdot x$$

gilt, um den Grenzwert 5.6.2 zu bestimmen.



### Übung 5.6.9

Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $K$  auch kompakt ist.



**Übung 5.6.10** (a) Es seien  $A_1, \dots, A_n$  kompakte Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\bigcap_{k=1}^n A_k \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^n A_k$$

kompakt sind.

(b) Es sei  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge kompakter Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Sind die Mengen

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

kompakt? Rechtfertigen Sie Ihre Antwort.



**Übung 5.6.11**

Zeigen Sie direkt mittels der Definition der Kompaktheit, dass jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  kompakt ist.

**Übung 5.6.12**

Bestimmen Sie

- (a) eine stetige Funktion  $f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , die beschränkt ist, ein Minimum besitzt, aber kein Maximum besitzt;
- (b) eine stetige Funktion  $f_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , die beschränkt ist, ein Maximum besitzt, aber kein Minimum besitzt;
- (c) eine Funktion  $f_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nach oben beschränkt ist aber nicht nach unten beschränkt;
- (d) eine Funktion  $f_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nicht nach oben beschränkt und nicht nach unten beschränkt ist.

Warum widersprechen diese Beispiele nicht Korollar 5.5.2 der Notizen?

**Übung 5.6.13**

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$ , die nicht beschränkt ist. Zeigen Sie, dass  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt, so dass die Folge  $(1/|b_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  wohl definiert ist gegen Null konvergiert.

**Übung 5.6.14**

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion  $f$  nicht surjektiv ist.



**Übung 5.6.15** (a) Sei  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl  $x \in [0, 1]$  existiert, so dass

$$f(x) = x$$

gilt.

- (b) Geben Sie eine Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $g(x) \neq x$  für alle  $x \in [0, 1]$  an.

- (c) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt periodisch mit der Periode  $T$ , wenn  $T \neq 0$  und

$$f(x) = f(x + T) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es sei nun  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine periodische stetige Funktion mit der Periode  $T$ . Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl  $x$  gibt, so dass

$$f(x) = f(x + T/2)$$

gilt.



### Übung 5.6.16

Es sei  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Nehmen Sie an, dass es reelle Zahlen  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  gibt mit  $a_n \neq 0$ , so dass

$$a_n f(x)^n + a_{n-1} f(x)^{n-1} + \dots + a_1 f(x) + a_0 = 0$$

für alle  $x \in [0, 1]$  gilt. Zeigen Sie, dass  $f$  auf  $[0, 1]$  konstant ist.



### Übung 5.6.17

Es seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Welche der folgenden Behauptungen ist wahr und welche ist falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (a) Wenn  $A$  kompakt ist und  $B$  abgeschlossen ist, dann  $A \cap B$  kompakt ist.
- (b) Wenn  $A$  offen ist und  $B$  abgeschlossen ist, dann  $A \cap B$  abgeschlossen ist.
- (c) Wenn  $A$  zusammenhängend ist und  $B$  zusammenhängend ist, dann  $A \cap B$  zusammenhängend ist.
- (d) Wenn  $A$  zusammenhängend ist und  $B$  zusammenhängend ist, dann  $A \cup B$  zusammenhängend ist.



### Übung 5.6.18

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Nehmen Sie an, dass

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

gilt. Beweisen Sie, dass es ein  $c \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$f(c) = c.$$



**Übung 5.6.19**

Beweisen Sie, dass die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

weder zusammenhängend noch kompakt ist.

**Übung 5.6.20**

Zeigen Sie, dass eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  genau dann zusammenhängend ist, wenn für jede nicht-leere Teilmenge  $A \subsetneq D$  der Rand  $\partial A$  nicht leer ist.





---

---

## KAPITEL 6

---

REIHEN

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen. In diesem Kapitel möchten wir verstehen, wann die Summe aller Folgenglieder  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  sinnvoll ist.

Zunächst definieren wir die Folge der **Partialsummen**:

$$s_n := \sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

### Definition 6.0.1

Die **Reihe**  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  mit **Gliedern**  $a_i$  ist die Folge der Partialsummen  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Wir sagen, dass  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  gegen  $s \in \mathbb{C}$  konvergiert :  $\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ .

In diesem Fall wird  $s$  die **Summe** der Reihe genannt und wir schreiben

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s .$$

Falls die Folgenglieder reell sind, d. h.  $a_i \in \mathbb{R}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , schreiben wir

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = +\infty, \quad \text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty .$$

### Beispiel 6.0.1

Wir beginnen mit Beispielen von Reihen, die uns schon irgendwie bekannt sind.

1. In Beispiel [1.3.1] haben wir schon die Folge der Partialsummen einer sogenannten **geometrische Reihe** berechnet. In der Tat sei  $q \in \mathbb{R}$  und  $a_i = q^i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Die geometrische Reihe ist dann  $s_n = \sum_{i=0}^n q^i$ . Falls  $q = 1$ , ist  $s_n = \sum_{i=0}^n 1 = n + 1$ , und deshalb ist  $\sum_{i=0}^{\infty} 1 = +\infty$ . Falls  $q \neq 1$  haben wir in Beispiel [1.3.1] bewiesen, dass

$$s_n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Dazu, in Beispiel [4.1.2] 3., haben wir gezeigt, dass  $q^n \rightarrow 0$  für  $|q| < 1$ ; es war eine Übung für Sie zu beweisen, dass  $q^n \rightarrow +\infty$  für  $q > 1$  und dass  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$  nicht existiert für  $q \leq -1$ .

Also können wir schließen, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & \text{falls } |q| < 1 \\ +\infty & \text{falls } q \geq 1 . \end{cases}$$

Wir bemerken dazu, dass für  $|q| < 1$  haben wir

$$\sum_{i=k}^{\infty} q^i = q^k \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{q^k}{1-q}.$$

Man kann nun den Grund besser verstehen, warum  $0,\bar{9}$  mit 1 identifiziert werden sollten. In der Tat hatten wir gesagt, dass eine Dezimalzahl  $p.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$  als die Reihe  $p + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i 10^{-i}$  betrachtet werden sollte; aber wir hatten den Begriff der Reihe noch nicht eingeführt. Mit den Begriffen, die wir nun haben, können wir dann sagen, dass

$$0,\bar{9} = \sum_{i=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (10^{-1})^i = 9 \frac{10^{-1}}{1 - 10^{-1}} = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

2. (**Teleskopsumme**) Gegeben eine reelle Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , betrachten wir

$$s_n := \sum_{i=0}^n (a_{i+1} - a_i).$$

Es ist dann leicht zu bemerken, dass

$$s_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0.$$

### Übung 6.0.1

Versuchen Sie zu verstehen, warum Wikipedia dieses Bild verwendet, um eine Teleskopsumme zu beschreiben. ♠

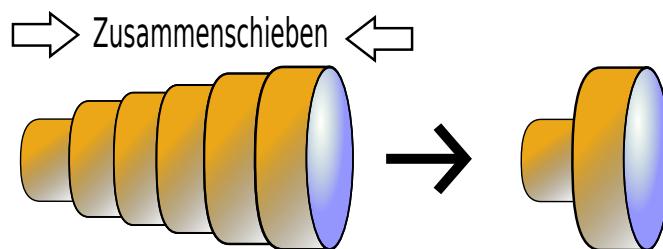


Figure 6.0.1

3. Als Beispiel einer Teleskopsumme betrachten wir die sogenannte **Mengoli-Reihe**:

Es sei  $a_i = -\frac{1}{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , deshalb ist  $a_{i+1} - a_i = -\frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+1} = \frac{1}{(i+1)(i+2)}$   
und

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = 1 - \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

also

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = 1 \quad (6.0.1)$$



In den vorherigen Beispielen konnten wir die Summe der konvergenten Reihen explizit berechnen. Aber wie so oft in der Mathematik, hat man nicht immer so viel Glück: Es gibt einen großen Unterschied zwischen der Fähigkeit zu sagen, dass eine Reihe konvergiert, und der Fähigkeit, ihre Summe zu berechnen; letzteres ist sogar die Quelle vieler schwieriger und ungelöster Probleme in der Mathematik (die Riemann-Hypothese hängt irgendwie mit diesem Problem zusammen!).

Wir müssen also wie immer vorsichtig und demütig sein: Lassen Sie uns zunächst versuchen zu verstehen, unter welchen Bedingungen eine Reihe notwendigerweise konvergiert.

## 6.1 Konvergenzkriterien für Reihen

Das erste Kriterium ist eine direkte Konsequenz des Satzes 4.2.5:

### Satz 6.1.1

(**Cauchy - Kriterium**) Eine komplexe Reihe  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  ist konvergent genau dann, wenn für alle  $\epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 = n_0(\epsilon)$  sodass für alle  $n \geq m \geq n_0$  ist

$$|a_n + a_{n-1} + \dots + a_{m+1}| < \epsilon \quad (6.1.1)$$

*Beweis:* Es genügt Satz 4.2.5 für die Folge der Partialsumme  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu benutzen: Dieser Satz sagt uns, dass  $(s_n)$  konvergent ist genau dann, wenn  $(s_n)$  eine Cauchy Folge ist. Die letzte Bedingung bedeutet, dass  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists n_0 = n_0(\epsilon)$ , sodass für alle  $n \geq m \geq n_0$  (es kann immer angenommen werden, dass  $n \geq m$ )  $|s_n - s_m| < \epsilon$ . Aber in diesem Fall ist  $s_n - s_m$  genau  $a_n + a_{n-1} + \dots + a_{m+1}$ .  $\square$

Wir bemerken, dass, wenn wir in 6.1.1  $n = m+1$  nehmen, wir insbesondere erhalten, dass für alle  $\epsilon > 0$ , ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$  existiert, sodass  $|a_n| < \epsilon$  für alle  $n \geq n_0$ , oder, mit anderen Worten, dass  $a_n$  nach 0 konvergieren muss. Wir haben dann das folgende Korollar erhalten:

**Korollar 6.1.2**

Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe  $(s_n)$  ist, dass  $(a_n)$  gegen Null konvergiert.

Wir möchten noch einmal unterstreichen, dass die Cauchy Bedingung [6.1.1] viel stärker ist als die Konvergenz gegen Null von  $(a_n)$ : Letzteres ist daher eine *notwendige*, aber *nicht hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der Reihe  $(s_n)$ , wie das nächste Beispiel zeigt:

**Beispiel 6.1.1**

**(Harmonische Reihe)** Die Harmonische Reihe ist als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

definiert. Dank des Cauchy-Kriteriums können wir beweisen, dass sie nicht konvergent ist. In der Tat, wenn es gelten würde, sollten wir haben, dass  $\forall \epsilon > 0$  ein  $n_0 = n_0(\epsilon)$  existiert, sodass für alle  $n, m \geq n_0$ ,  $|s_n - s_m| < \epsilon$ . Also insbesondere, für  $m = n_0$  und  $n = 2n_0$  sollten wir haben, dass  $|s_{2n_0} - s_{n_0}| < \epsilon$ . Aber wir können einfach sehen, dass

$$|s_{2n_0} - s_{n_0}| = \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0 - 1} + \cdots + \frac{1}{n_0 + 1},$$

wobei die Anzahl der Summanden genau  $n_0$  ist. Dazu, weil für alle  $0 < k \leq 2n_0$   $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n_0}$  ist, erhalten wir endlich, dass

$$|s_{2n_0} - s_{n_0}| \geq n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2}.$$

Also, unabhängig davon, wie  $n_0$  groß ist, kann diese Differenz nicht so klein wie möglich gemacht werden.



### 6.1.1 Reelle Reihen mit nicht-negativen Gliedern

Nehmen wir an, dass die Glieder  $a_n$  reell sind. In diesem Fall erhalten wir verschiedene Konvergenzkriterien, und zwar:

**Proposition 6.1.3**

Es sei  $\sum a_n$  eine Reihe mit nicht-negativen reellen Gliedern  $a_n$ , d. h.  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $(s_n)$  die Folge der Partialsummen. Dann konvergiert sie genau dann, wenn  $(s_n)$  beschränkt ist.

*Beweis:* Es genügt zu bemerken, dass in diesem Fall  $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist, also ist  $(s_n)$  monoton wachsend. Dann, dank des Satzes 4.1.7 konvergiert  $(s_n)$  (gegen ihr Supremum) genau dann, wenn sie beschränkt ist.  $\square$

### Bemerkung 6.1.1

Wir bemerken, dass Satz 4.1.7 uns etwas mehr sagt, und zwar, dass der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  immer existiert falls  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und entweder  $l \in \mathbb{R}$  (das ist der Fall genau dann, wenn  $(s_n)$  beschränkt ist) oder  $+\infty$  ist. (das ist der Fall genau dann, wenn  $(s_n)$  unbeschränkt ist).  $\diamond$

#### Satz 6.1.4

(*Vergleichskriterium I oder Majoranten - Kriterium*)

Es seien  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  Reihen mit

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (6.1.2)$$

Dann:

- (i) Falls  $\sum b_n$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum a_n$ ; dazu, wenn  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = s'$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ , dann ist  $s \leq s'$ ;
- (ii) Falls  $\sum a_n = +\infty$ , dann  $\sum b_n = +\infty$ .

*Beweis:* (i) Da, nach Voraussetzung,  $\sum b_n$  konvergiert, ist die Folge der Partialsumme  $s'_n := b_0 + b_1 + \dots + b_n$  beschränkt und konvergiert gegen das Supremum von  $\{s'_n, n \in \mathbb{N}\}$ , das wir mit  $s'$  bezeichnen (Proposition 6.1.3). Also  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = s'$ .

Dazu gilt, dass  $s_n := a_0 + \dots + a_n \leq b_0 + \dots + b_n = s'_n \leq s'$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , weil nach Voraussetzung  $a_n \leq b_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Deshalb ist  $(s_n)$  beschränkt und

$$s_n \leq s' \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (6.1.3)$$

Weil die Glieder  $a_n$  nicht negativ sind, impliziert Proposition 6.1.3, dass  $\sum a_n$  konvergiert gegen das Supremum  $s$  von  $\{s_n, n \in \mathbb{N}\}$ , das nach (6.1.3) kleiner oder gleich  $s'$  ist.

(ii) Übung für Sie.

$\square$

### Bemerkung 6.1.2

Wie für die Folgen, um das “Verhalten” einer Reihe vorherzusagen, ist es ausreichend, den “Trend” der Reihe für große  $n$  und nicht unbedingt für alle  $n$  zu kennen. Zum Beispiel wäre es in Satz 6.1.4 ausreichend zu wissen, dass die Ungleichheit

(6.1.2) für  $n$  größer oder gleich  $n_0$  gilt, für eine  $n_0 \in \mathbb{N}$ , um schließen zu können, dass die Konvergenz der Reihe  $\sum b_n$  die Konvergenz von  $\sum a_n$  impliziert. Was kann man dazu über ihre Summen sagen?  $\diamond$

### Beispiel 6.1.2

Wir wollen beweisen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{gegen unendlich divergiert, für alle } \alpha \leq 1 \\ \text{konvergiert, für alle } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

- Es sei  $\alpha \leq 1$ , dann ist die Behauptung, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ . In der Tat ist  $n^\alpha \leq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $\alpha \leq 1$ , und deshalb ist  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  und alle  $\alpha \leq 1$ . Da  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$  (siehe Beispiel 6.1.1), aus Satz 6.1.4 divergiert gegen  $+\infty$  auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .
- Es sei zunächst  $\alpha = 2$ . Wir wollen beweisen, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert. In Beispiel 6.0.1 3. haben wir die sogenannte Mengoli Reihe  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{(i+1)(i+2)}$  eingeführt und bewiesen, dass sie gegen 1 konvergiert. Wir bemerken, dass

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} \geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Für die erste Gleichheit, genügt es zu bemerken, dass die Mengen  $\{i \mid i \in \mathbb{N}\}$  und  $\{n-2 \mid n \geq 2, n \in \mathbb{N}\}$  dieselben sind, und wir haben dann nur  $i$  mit  $n-2$  neu ernannt. Für die Ungleichheit genügt es zu bemerken, dass  $n(n-1) \leq n^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und deshalb ist  $\frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Aus Satz 6.1.4 erhalten wir, dass  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergiert, und deshalb konvergiert auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (siehe Bemerkung 6.1.2).

- Für den Fall, in dem  $\alpha > 2$ , genügt es zu bemerken, dass  $n^\alpha \geq n^2$ , und deshalb ist  $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^\alpha}$ . Satz 6.1.4 zusammen mit dem Fall  $\alpha = 2$ , den wir gerade analysiert haben, implizieren, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergiert.
- Und für  $1 < \alpha < 2$ ? Wir brauchen noch ein paar Mittel, um zu beweisen, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  für alle  $1 < \alpha < 2$  konvergiert.



### Bemerkung 6.1.3

Wir möchten noch einmal eine wichtige Sache unterstreichen: Mit diesem Kriterium konnten wir nur schließen, dass die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  konvergent für alle  $\alpha \geq 2$  ist, aber das Kriterium erlaubte uns nicht, die genaue Summe zu berechnen! Wie bereits

erwähnt, ist die explizite Berechnung der Summe einiger Reihen ein Problem, das oft nicht trivial ist und eng mit ungelösten mathematischen Problemen verbunden ist. Bei der “verallgemeinerten” harmonischen Reihe entspricht die Berechnung ihrer Summe der Kenntnis der Werte der berühmten **Riemannschen Zeta-Funktion**, die für  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 1$ , definiert ist als

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Es gibt explizite Formeln (die nicht zu einfach, aber auch nicht so kompliziert zu beweisen sind), um den Wert  $\zeta(2n)$  zu berechnen, für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Zum Beispiel ist

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2 \cdot (2n)!}$$

wobei  $B_{2n}$  die  $2n$ . Bernoulli-Zahl ist. Da wir die Bernoulli-Zahlen nicht definiert haben, geben wir aus Neugier einige Werte von  $\zeta(2n)$ :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \dots$$

Wenn  $s = 2n + 1$ , sind keine Formeln für  $\zeta(s)$  bekannt! ◊

### Korollar 6.1.5

(**Vergleichskriterium II**) Es seien  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  Reihen mit positiven reellen Gliedern. Nehmen wir an, dass der folgende Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} =: l$$

existiert.

- Wenn  $0 < l < +\infty$ , dann konvergiert  $\sum a_n$  genau dann, wenn  $\sum b_n$  konvergiert (und divergiert  $\sum a_n$  gegen  $+\infty$  genau dann, wenn  $\sum b_n$  gegen  $+\infty$  divergiert.)
- Wenn  $l = 0$  und  $\sum b_n$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum a_n$ .
- Wenn  $l = +\infty$  und  $\sum b_n$  divergiert, dann divergiert auch  $\sum a_n$ .

### Bemerkung 6.1.4

Beachten Sie, dass die zweite Behauptung des ersten Punktes (“divergiert  $\sum a_n$  gegen  $+\infty$  genau dann, wenn  $\sum b_n$  gegen  $+\infty$  divergiert”) aus der ersten (“Dann konvergiert  $\sum a_n$  genau dann, wenn  $\sum b_n$  konvergiert”) folgt: In der Tat, da  $a_n > 0$  und  $b_n > 0$  für alle  $n$ , sind die Folgen der Partialsummen  $s_n := \sum_{j=0}^n a_j$  und  $s'_n := \sum_{j=0}^n b_j$

monoton wachsend, und deshalb existieren immer die Grenzwerte  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  und  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$ , und sind entweder endlich oder  $+\infty$ . Aus dieser Bemerkung sollten Sie nun schließen, dass die zwei Behauptungen äquivalent sind; Warum?  $\diamond$

*Beweis:* Übung für Sie!  $\square$

**Beispiel 6.1.3** • Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  divergiert gegen  $+\infty$ . In der Tat bemerken wir zunächst, dass  $\sin \frac{1}{n} > 0$  für alle  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$  (warum ist das so?) und dass  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$  (warum ist es so?). Also ist  $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ , und deshalb  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} = +\infty$ .

- Die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2+n+1}{n^6+n^5+2}$  konvergiert. In der Tat ist  $\frac{n^2+n+1}{n^6+n^5+2} \sim \frac{1}{n^4}$ , weil

$$\frac{n^2+n+1}{n^6+n^5+2} \sim \frac{1}{n^4} \iff \frac{n^4(n^2+n+1)}{n^6+n^5+2} = \frac{n^6(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4})}{n^6(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n^6})} \rightarrow 1,$$

und die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  ist konvergent (Beispiel 6.1.2).  $\clubsuit$

### Satz 6.1.6

(Wurzelkriterium) Es sei  $\sum a_n$  eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern  $a_n$ . Falls ein  $q$  existiert, sodass  $0 \leq q < 1$  und eine  $n_0$  existiert, sodass

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann ist die Reihe  $\sum a_n$  konvergent. Falls  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  für unendlich viele Indizes  $n$ , dann divergiert  $\sum a_n$  gegen unendlich.

### Bemerkung 6.1.5

Es reicht nicht zu beweisen, dass  $\sqrt[n]{a_n} < 1$  für alle  $n \geq n_0$ , für eine  $n_o \in \mathbb{N}$ ! In der Tat haben wir schon bewiesen, dass die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert gegen unendlich. Aber ist  $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ .  $\diamond$

*Beweis:* Für alle  $n \geq n_0$  haben wir nach Voraussetzung  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ , und deshalb  $a_n \leq q^n$ . In Beispiel 6.0.1 1. haben wir bewiesen, dass die geometrische Reihe  $\sum q^n$  konvergent für  $|q| < 1$  ist. Also erlaubt uns Satz 6.1.4 zu schließen, dass  $\sum a_n$  konvergent ist.

Falls  $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$  für unendlich viele Indizes, dann ist auch  $a_n \geq 1$  für unendlich viele Indizes, und deshalb konvergiert  $(a_n)$  gegen Null nicht, Bedingung die notwendig ist, falls  $\sum a_n$  konvergiert (Korollar 6.1.2).  $\square$

**Korollar 6.1.7**

Es sei  $\sum a_n$  eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern  $a_n$ . Nehmen wir an, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

existiert und gleich  $l$  ist. Dann wenn  $l < 1$ , konvergiert die Reihe  $\sum a_n$ ; wenn  $l > 1$  dann divergiert die Reihe  $\sum a_n$  gegen unendlich.

*Beweis:* Übung für Sie!

□

**Beispiel 6.1.4**

Es sei  $a \geq 0$ . Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}$  konvergiert. In der Tat haben wir

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^n}} = \frac{a}{n} \rightarrow 0.$$

♣

**Satz 6.1.8**

(Quotientenkriterium) Es sei  $\sum a_n$  eine Reihe mit positiven Gliedern  $a_n$ . Falls ein  $q$  existiert, sodass  $0 \leq q < 1$  und eine  $n_0$  existiert, sodass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann ist die Reihe  $\sum a_n$  konvergent. Falls für eine  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \geq n_0$  ist, dann divergiert  $\sum a_n$  gegen unendlich.

*Beweis:* Es ist leicht zu zeigen, dass für alle  $k \geq 1$  und  $n = n_0 + k$  gilt

$$a_{n_0+k} \leq q a_{n_0+k-1} \leq q^2 a_{n_0+k-2} \leq \cdots \leq q^k a_{n_0}.$$

Dann erhalten wir, dass

$$\sum_{k \geq 1} a_{n_0+k} \leq a_{n_0} \sum_{k \geq 1} q^k$$

und deshalb, dank des Satzes 6.1.4 und der Konvergenz der geometrischen Reihe  $\sum q^n$ , wobei  $0 \leq q < 1$ , konvergiert die Reihe  $\sum_{k \geq 1} a_{n_0+k}$ , und deshalb die Reihe  $\sum a_n$ .

Wenn  $a_{n+1} \geq a_n > 0$  für alle  $n \geq n_0$ , dann kann die Folge  $(a_n)$  nicht gegen Null konvergieren. (Warum ist das so? Übung!). □

Ähnlich wie bei Korollar 6.1.7 haben wir die folgende Folgerung, deren Beweis dem Leser überlassen bleibt:

**Korollar 6.1.9**

Es sei  $\sum a_n$  eine Reihe mit positiven Gliedern  $a_n$ . Nehmen wir an, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existiert und gleich  $l$  ist. Wenn  $l < 1$ , konvergiert die Reihe  $\sum a_n$ ; wenn  $l > 1$  dann divergiert die Reihe  $\sum a_n$  gegen unendlich.

**Beispiel 6.1.5** 1. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  ist konvergent. In der Tat können wir einfach sehen, dass

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

2. Die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$  konvergiert für alle  $a \geq 0$ . In der Tat ist

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1.$$

3. Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$  ist auch konvergent. In der Tat ist

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

wobei  $e$  die Eulersche Zahl ist.

**Satz 6.1.10**

(**Cauchysches Verdichtungskriterium**) Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge mit nicht-negativen Folgengliedern, also

$$a_0 \geq a_1 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0.$$

Dann ist  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  konvergent genau dann, wenn  $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n a_{2^n}$  konvergent ist.

*Beweis:* Es sei wie gewöhnlich  $(s_n)$  die Folge der Partialsumme von  $(a_n)$ ,  $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ , und  $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der Partialsumme von  $(2^n a_{2^n})$ . Dann

erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} a_0 &\leq a_0 \\ a_1 &\leq a_0 \\ a_2 + a_3 &\leq 2a_2 \\ a_4 + a_5 + a_6 + a_7 &\leq 4a_4 \\ &\dots \\ a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}-1} &\leq 2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichheit aus der Tatsache folgt, dass die Anzahl der Summanden der linken Seite genau  $(2^{n+1} - 1) - 2^n + 1 = 2^n$  ist. Wenn wir die Summe der linken und rechten Seiten nehmen, erhalten wir genau, dass

$$s_{2^{n+1}-1} \leq a_0 + s'_n. \quad (6.1.4)$$

Ganz analog haben wir, dass

$$\begin{aligned} a_0 &\geq \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 + a_2 &\geq a_2 = \frac{1}{2}2a_2 \\ a_3 + a_4 &\geq 2a_4 = \frac{1}{2}4a_4 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 &\geq 4a_8 = \frac{1}{2}8a_8 \\ &\dots \\ a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots + a_{2^n} &\geq 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2}2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichheit aus der Tatsache folgt, dass die Anzahl der Summanden der linken Seite genau  $2^n - (2^{n-1} + 1) - 1 = 2^{n-1}$  ist. Wenn wir die Summe der linken und rechten Seiten nehmen, erhalten wir, dass

$$s_{2^n} \geq \frac{1}{2}s'_n. \quad (6.1.5)$$

Aus (6.1.4) erhalten wir, dass, falls  $(s'_n)$  konvergiert, sie beschränkt ist, und deshalb ist auch die Teilfolge  $(s_{2^{n+1}-1})_{n \in \mathbb{N}}$  der Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Es ist nun eine **Übung** für Sie zu beweisen, dass gegeben eine monoton wachsende Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die eine beschränkte Teilfolge besitzt, dann ist die ganze Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt. Mit dieser Übung können wir schließen, dass  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und deshalb konvergent ist (siehe Proposition 6.1.3).

Umgekehrt, wenn  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  konvergent ist, also wenn  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent ist, dann ist  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt und so ist  $(s_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ , die eine Teilfolge von  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist. Deshalb impliziert [6.1.5], dass  $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist. Da  $(s'_n)$  monoton wachsend ist (die Summanden nicht negativ sind), folgt aus Proposition [6.1.3], dass  $(s'_n)$  konvergent ist, also dass die Summe  $\sum 2^n a_{2^n}$  endlich ist.

□

### Beispiel 6.1.6

Aus Beispiel [6.1.2] wissen wir schon, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{gegen unendlich divergiert, für alle } \alpha \leq 1 \\ \text{konvergiert, für alle } \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Mit der Hilfe von Satz [6.1.10] können wir nun beweisen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{konvergiert, für alle } \alpha > 1.$$

In der Tat bemerken wir zunächst, dass  $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$  monoton fallend ist, und dass

$$2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = (2^{1-\alpha})^n.$$

Aber  $2^{1-\alpha} < 1$  ist genau dann, wenn  $1 - \alpha < 0$ , also falls  $\alpha > 1$ . Also ist die Folge  $(2^n a_{2^n})$  genau die geometrische Folge  $q^n$ , mit  $q < 1$ , genau dann, wenn  $\alpha > 1$ . Wie schon bemerkt, falls  $q < 1$ , konvergiert die Reihe  $\sum q^n$  (siehe Beispiel [6.0.1] 1.), und deshalb, dank des Satzes [6.1.10], konvergiert  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  für alle  $\alpha > 1$ .

♣

## 6.2 Absolut Konvergenz

Der Grund, warum die ersten Beispiele für Reihen  $\sum a_n$ , die untersucht werden, diejenigen sind, bei denen die Summanden  $a_n$  reell und nicht negativ sind, ist, dass in diesem Fall der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  immer existiert, und entweder endlich ( $l \in \mathbb{R}$ ) oder unendlich ( $l = +\infty$ ) ist. Dann erlauben uns die Vergleichskriterien und ihre Konsequenzen zu schließen, dass viele solchen Reihen konvergent oder gegen  $+\infty$  divergent sind.

Der Fall, in dem die Summanden  $a_n$  nicht unbedingt reell sind, und wenn reell, nicht unbedingt alle nicht-negativ sind, ist komplizierter. Hier haben wir nur ein Paar allgemeine Methoden zur Hand, zu verstehen, ob die Reihe  $\sum a_n$  konvergiert oder nicht. Wir werden sehen, dass die Integralrechnung uns mehr Werkzeuge geben wird, um solche Konvergenz zu verstehen.

**Definition 6.2.1**

Eine reellwertige oder komplexwertige Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe der Absolutbeträge  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$  konvergent ist.

Da die Summanden der Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$  nicht-negative reelle Zahlen sind, können wir die Methoden in Abschnitt 6.1.1 benutzen um zu verstehen, ob eine Reihe absolut konvergent ist oder nicht.

Diese Art der Konvergenz gibt uns auch Auskunft über die Konvergenz der Reihe selbst, wie der nächste Satz lautet:

**Satz 6.2.1**

*Eine Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ , die absolut konvergent ist, ist selbst konvergent.*

*Beweis:* Da  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$  konvergiert, impliziert das Cauchy - Kriterium (Satz 6.1.1), dass für alle  $\epsilon > 0$  eine  $n_0$  existiert, sodass für alle  $n \geq m \geq n_0$  gilt

$$||a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_{m+1}|| = |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_{m+1}| < \epsilon.$$

Nun genügt es zu bemerken, dass die Dreiecksungleichung impliziert, dass

$$|a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{m+1}| \leq |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_{m+1}|$$

und deshalb erfüllt die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  das Cauchy-Kriterium.  $\square$

**Bemerkung 6.2.1**

Die umgekehrte Implikation gilt nicht unbedingt, d.h. dass eine Reihe, die konvergent ist, nicht unbedingt absolut konvergent ist. Das ist der Fall für die Reihe  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$ : wir werden sehr bald sehen, dass sie konvergiert. Aber wir haben schon bewiesen, dass die Reihe  $\sum_{n \geq 1} |(-1)^n \frac{1}{n}| = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  gegen  $+\infty$  divergiert (siehe Beispiel 6.1.1).  $\diamond$

**Beispiel 6.2.1** 1. Die Reihe  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$  ist absolut konvergent für alle  $\alpha > 1$  (siehe Beispiel 6.1.6), und deshalb, wegen des Satzes 6.2.1, konvergent.

2. (**Exponentialreihe**) Es sei  $z$  eine (feste) komplexe Zahl. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent, für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dies ist eine direkte Folgerung aus Beispiel 6.1.5 2., weil  $|\frac{z^n}{n!}| = \frac{|z|^n}{n!}$ , und  $|z| \geq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Dann können wir eine neue Funktion, die **Exponentialfunktion**, definieren: für alle  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  als

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Um mehr Eigenschaften dieser sehr wichtigen Funktion zu verstehen, müssen wir mehr Theorie der Funktionsreihen entwickeln. Im Moment ist das folgende Ergebnis wichtig:

**Lemma 6.2.2**

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Wir werden dieses Lemma nicht beweisen; wir möchten nur bemerken, dass man beweisen sollte, dass

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad (6.2.1)$$

siehe Satz 4.1.8.



Eine **alternierende reellwertige Reihe** ist eine Reihe der Gestalt  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ , wobei  $a_n$  eine positive reelle Zahl ist, für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Das folgende Kriterium erlaubt uns die Konvergenz einiger alternierender Reihen zu verstehen:

**Satz 6.2.3**

(**Leibniz Kriterium**) Es sei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$  eine alternierende reellwertige Reihe, wobei  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nehmen wir an, dass

(i) die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist

(ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ .

*Beweis:* Es sei  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der Partialsumme, also ist  $s_n$  in diesem Fall

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n.$$

Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= s_{2n} - \overbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}^{(i) \Rightarrow \geq 0} \leq s_{2n} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} + \overbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}^{(i) \Rightarrow \geq 0} \geq s_{2n-1}. \end{aligned}$$

Also ist die Teilfolge  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend, und die Teilfolge  $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend. Dazu ist

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \geq 0 \quad (6.2.2)$$

und deshalb ist  $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_{2n-1} \geq \dots \geq s_1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Deshalb haben wir, dass die Teilfolge  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Dank des Satzes 4.1.7 können wir schließen, dass  $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen ihr Infimum  $l$  konvergiert. Da  $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist, besitzt sie einen Grenzwert, der entweder endlich oder  $+\infty$  ist. Aber aus (6.2.2) erhalten wir, dass

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_{2n} - a_{2n+1}) \stackrel{(ii)}{=} l - 0 = l.$$

Dann können wir schließen, dass die ganze Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $l$  konvergiert (warum ist es so? **Übung** für Sie!).  $\square$

### Beispiel 6.2.2

Mit diesem Satz können wir schließen, dass die Reihe  $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n}$  konvergent ist, obwohl sie nicht absolut konvergent ist. ♣

## 6.3 Assoziativität und Kommutativität

Wie wir schon wissen, ist die Addition zwischen endlichen reellen oder komplexen Zahlen kommutativ und assoziativ. Es ist dann sehr natürlich zu fragen, ob dies der Fall ist auch für unendliche Summen, also für Reihen. Die/Der sorgfältige Studierende wird bemerkt haben, dass diese Eigenschaften bisher nicht zur Manipulation der Reihen verwendet wurden.

In diesem Abschnitt werden wir nicht annehmen, dass die Reihe spezielle Eigenschaften erfüllt. Im Folgenden bezeichnet dann  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  eine Reihe mit reellen oder komplexen Summanden.

### Assoziativität

Zunächst betrachten wir die Assoziativität. Gegeben eine Reihe  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ , es sei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  eine Reihe, die aus  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  erhalten wird, in der einige der Summanden von  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  gruppiert werden, d. h.

$$\begin{aligned} b_0 &:= a_0 + a_1 \\ b_1 &:= a_2 + a_3 + a_4 \\ b_2 &:= a_5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Anzahl der Summanden in jedem  $b_i$  beliebig ist (hier oben ist es nur ein Beispiel). Es sei  $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der Partialsummen von  $\sum b_n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} s'_0 &= b_0 = (a_0 + a_1) \\ s'_1 &= b_0 + b_1 = (a_0 + a_1) + (a_2 + a_3 + a_4) \\ s'_2 &= b_0 + b_1 + b_2 = (a_0 + a_1) + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wenn die Assoziativität gelten würde, dann sollten die Reihen  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  dasselbe “Verhalten” haben. Dieses Lemma beantwortet diese Frage für spezielle Klassen von Reihen:

### Lemma 6.3.1

*Es sei  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  eine Reihe, und  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  eine Reihe, die aus  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  erhalten wird, in der einige ihrer Summanden gruppiert werden. Dann falls  $\sum a_n$  konvergiert, konvergiert auch  $\sum b_n$  gegen dieselbe Summe. Wenn die Summanden  $a_i$  reell sind für alle  $i \in \mathbb{N}$  und falls  $\sum a_n$  gegen  $+\infty$  divergiert, dann divergiert auch  $\sum b_n$  gegen  $+\infty$ .*

*Beweis:* Der Beweis basiert auf einer Beobachtung, nämlich dass die Folge von Partialsummen von  $b_n$  eine Teilfolge der von  $a_n$  ist. Der Beweis dieser Behauptung ist für Sie eine (einfache) **Übung**.  $\square$

Eine spezielle Klasse der Folgen, für die die Assoziativität gilt, ist dann die Klasse der konvergenten Folgen (oder divergenten gegen  $+\infty$ , im Fall, dass sie reelle Folgen sind). Falls die Folge keine Summe besitzt (also existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$  nicht), dann wird die Assoziativität nicht unbedingt erfüllt. Zum Beispiel es sei

$a_n = (-1)^n$ . Es ist einfach zu sehen, dass die Folge  $(s_n)$  genau die Folge  $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$  ist, die keinen Grenzwert besitzt. Aber, wenn wir die Summanden  $a_n$  so gruppieren:

$$\begin{aligned} b_0 &:= a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0 \\ b_1 &:= a_2 + a_3 = 1 - 1 = 0 \\ b_2 &:= a_4 + a_5 = 1 - 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dann erhalten wir die Reihe  $\sum 0$ , die natürlich gegen 0 konvergiert.

### Kommutativität

Betrachten wir nun die Kommutativität. Zuerst müssen wir klären, was eine Umordnung von Summanden in diesem Fall ist.

#### Definition 6.3.1

Es sei  $\sum a_n$  eine Reihe. Wir sagen, dass  $\sum b_n$  eine **Umordnung** der Reihe  $\sum a_n$  ist, wenn eine bijektive Abbildung  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  existiert, sodass

$$b_j = a_{\sigma(j)} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Was bedeutet dann für Reihen, dass die Kommutativität gilt? Es sollte bedeuten, dass  $\sum b_n$  dasselbe Verhalten von  $\sum a_n$  hat (also, falls  $\sum a_n$  konvergiert, dann konvergiert auch  $\sum b_n$  gegen denselben Grenzwert, falls  $\sum a_n$  eine reellwertige Reihe ist und sie gegen  $+\infty$  divergiert, dann divergiert gegen  $+\infty$  auch  $\sum b_n$ , falls der Grenzwert der Reihe  $\sum a_n$  nicht existiert, dann existiert nicht die Summe der Reihe  $\sum b_n$ ).

Für einige Umordnungen gilt immer die Kommutativität, wie die folgende Übung zeigt:

#### Übung 6.3.1

Es sei  $\sum b_n$  eine Umordnung von  $\sum a_n$ , wobei die bijektive Abbildung  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die die Umordnung definiert, die folgende Eigenschaft erfüllt: Es gibt eine *endliche* Teilmenge  $J \subseteq \mathbb{N}$ , sodass die Einschränkung der Abbildung  $\sigma$  auf  $\mathbb{N} \setminus J$  die Identität ist, nämlich  $\sigma(j) = j$  für alle  $j \in \mathbb{N} \setminus J$ . Beweisen Sie, dass für diese Umordnungen die Kommutativität gilt. ♠

Die Situation ist jedoch im Allgemeinen komplizierter, wie der folgende Satz uns zeigt:

#### Satz 6.3.2

(Satz von **Riemann–Dini**) Es sei  $\sum a_n$  eine reelle Reihe, die konvergent – aber nicht absolut konvergent – ist. Dann gegeben eine beliebige (!) reelle Zahl  $s$ , gibt es eine Umordnung, die gegen  $s$  konvergiert. Es gibt dazu Umordnungen, die gegen  $+\infty$  divergieren und Umordnungen, die nicht konvergent sind.

Aus Zeitmangel geben wir keinen Beweis für diesen schönen und mysteriösen Satz; Die/Der neugierige Studierende findet jedoch in jedem Lehrbuch von Analysis 1 einen Beweis. Aus den Hypothesen des Theorems kann abgeleitet werden, dass die Hypothese der absoluten Konvergenz der Reihen für die Kommutativität notwendig ist. Das nächste Ergebnis ist dann das, was man an dieser Stelle erwartet:

**Satz 6.3.3**

Es sei  $\sum a_n$  eine reellwertige Reihe, die absolut konvergent ist. Dann ist jede Umordnung absolut konvergent, und konvergiert gegen dieselbe Summe von  $\sum a_n$ .

*Beweis:* Wir betrachten zunächst den Fall, in dem alle Summanden  $a_n$  nicht-negativ sind. Dann, dank der Proposition 6.1.3 müssen wir beweisen, dass die Folge der Partialsummen der Umordnung beschränkt, und deshalb konvergent ist und dass der Grenzwert derselbe ist.

Es sei  $(s'_n)$  die Folge der Partialsummen der Umordnung von  $\sum a_n$ . Dann ist

$$s'_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n = a_{\sigma(0)} + a_{\sigma(1)} + \cdots + a_{\sigma(n)} \leq s_{M(n)}$$

wobei  $M(n) = \max\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$ . In der Tat sind die Summanden  $a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}$  nur einige der Summanden in  $s_{M(n)}$ , wobei die fehlenden Summanden nicht-negativ sind. Da die Folge  $(s_n)$  monoton steigend ist, haben wir dann, dass

$$s'_n \leq s_{M(n)} \leq s \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei  $s := \sup\{s_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$  und  $s = \sum a_n$ . Dann können wir schließen, dass die Folge  $(s'_n)$ , die auch monoton steigend ist, beschränkt ist, und deshalb gegen ein  $s'$  konvergiert (Proposition 6.1.3), mit  $s' \leq s$ . Wir müssen dann beweisen, dass  $s = s'$ . Aber wir können dasselbe Verfahren wie oben wiederholen, um zu beweisen, dass  $s_n \leq s'$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (es ist für Sie eine Übung, die Details zu geben), und deshalb erhalten wir, dass  $s = s'$ .

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Es sei  $\sum a_n$  eine (absolut konvergente) Reihe (in der die Summanden nicht unbedingt nicht-negativ sind) und  $\sum b_n$  eine Umordnung. Wir definieren für alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \max\{a_n, 0\} & a_n^- &:= \max\{-a_n, 0\} \\ b_n^+ &:= \max\{b_n, 0\} & b_n^- &:= \max\{-b_n, 0\} \end{aligned}$$

und wir bemerken, dass  $a_n = a_n^+ - a_n^-$  (bzw.  $b_n = b_n^+ - b_n^-$ ) und dass  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$  (bzw.  $|b_n| = b_n^+ + b_n^-$ ) (Warum ist das so? Übung!). Dazu gilt es, dass

$$0 \leq a_n^\pm \leq |a_n| \quad \text{und} \quad 0 \leq b_n^\pm \leq |b_n|.$$

Wir bemerken, dass  $\sum |b_n|$  eine Umordnung der Reihe  $\sum |a_n|$  ist. Deshalb, dank des ersten Schrittes dieses Beweises, können wir schließen, dass  $\sum |b_n|$  konvergent ist. Mit dem Majoranten-Kriterium (Satz 6.1.4), können wir schließen, dass die (vier) Reihen  $\sum a_n^\pm$ ,  $\sum b_n^\pm$  konvergent sind. Es sei

$$s^\pm := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^\pm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n a_n^\pm = \sum a_n^\pm$$

und

$$\tilde{s}^\pm := \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{s}_n^\pm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n b_n^\pm = \sum b_n^\pm$$

Wir bemerken, dass

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n (a_j^+ - a_j^-) = \sum_{j=0}^n a_j^+ - \sum_{j=0}^n a_j^- = s_n^+ - s_n^-, \quad (6.3.1)$$

wobei die dritte Gleichheit aus der Kommutativität einer endlichen Addition von reellen Zahlen folgt. Es sei  $s := \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ ; aus (6.3.1) erhalten wir, dass  $s = s^+ - s^-$ . Ähnlich haben wir, dass

$$\tilde{s}_n = \sum_{j=0}^n b_j = \sum_{j=0}^n (b_j^+ - b_j^-) = \sum_{j=0}^n b_j^+ - \sum_{j=0}^n b_j^- = \tilde{s}_n^+ - \tilde{s}_n^-. \quad (6.3.2)$$

Da  $\sum b_n^+$  und  $\sum b_n^-$  konvergent gegen bzw.  $\tilde{s}^+$  und  $\tilde{s}^-$  sind, erhalten wir aus (6.3.2), dass  $\sum b_n$  konvergent ist, und ihr Grenzwert  $\tilde{s}$  erfüllt  $\tilde{s} = \tilde{s}^+ - \tilde{s}^-$ . Nun genügt es zu bemerken, dass  $\sum b_n^+$  (bzw.  $\sum b_n^-$ ) eine Umordnung von  $\sum a_n^+$  (bzw.  $\sum a_n^-$ ) ist und deshalb, dank des ersten Teils dieses Beweises, ist  $s^+ = \tilde{s}^+$  (bzw.  $s^- = \tilde{s}^-$ ). Wir können endlich schließen, dass

$$\sum b_n = \tilde{s} = \tilde{s}^+ - \tilde{s}^- = s^+ - s^- = s = \sum a_n.$$

□

## 6.4 Zusätzliche Übungen

### Übung 6.4.1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und Divergenz:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2 + \sqrt{n}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n\sqrt{4n-1}}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 + n + 1)}{3^n + 1}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{8n^2 - 2}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n}}$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n}$$



### Übung 6.4.2

1. Es seien  $p \in \mathbb{R}$  und  $\sum a_n$  eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern  $a_n$ . Es sei

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p a_n .$$

Zeigen Sie:

- Wenn  $l \in (0, \infty)$  und  $p > 1$ , konvergiert die Reihe  $\sum a_n$ .
  - Wenn  $l \in (0, \infty)$  und  $p \leq 1$ , divergiert die Reihe  $\sum a_n$ .
  - Wenn  $l = 0$  und  $p > 1$ , konvergiert die Reihe  $\sum a_n$ .
  - Wenn  $l = \infty$  und  $p \leq 1$ , divergiert die Reihe  $\sum a_n$ .
2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe der vorherigen Aufgabe auf Konvergenz:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 1}{n^4 + n + 1}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n - 1}{3n^2 + 2}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$



### Übung 6.4.3

Bestimmen Sie jeweils alle  $a \in \mathbb{R}$ , für welche die Reihen

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + a^n}$ ,
- (b)  $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n^a}{\binom{n}{k}}$ ,
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin\left(b + \frac{a}{n}\right) \right]^n$  mit  $0 \leq b < \frac{\pi}{2}$

konvergent sind.



### Übung 6.4.4

Es seien  $N \in \mathbb{N}$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge, so dass

$$a_{n+N} = a_n$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Zeigen dass, die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

gegen

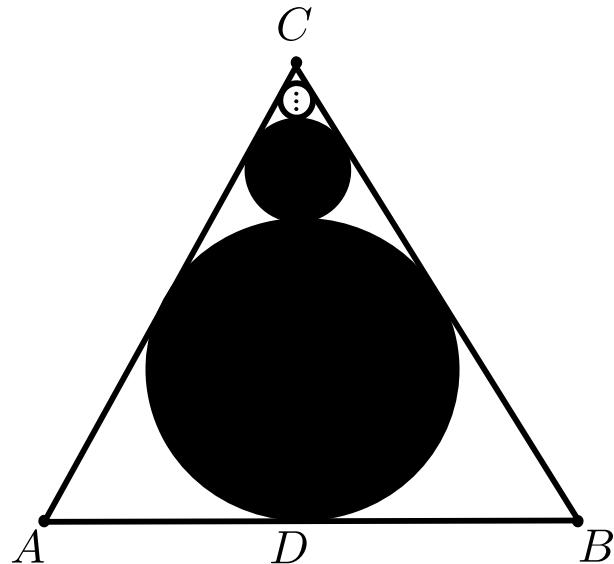
$$\frac{a_0 + a_1 q + \dots + a_{N-1} q^{N-1}}{1 - q^N}$$

konvergiert für  $|q| < 1$ .



**Übung 6.4.5**

Die Abbildung stellt ein gleichseitiges Dreieck mit der Höhe  $h = 1$  dar, die fortwährend Kreise mit möglichst großen Radien enthält, so dass der nächste kleinere Kreis die Seiten  $AC$  und  $BC$  des Dreiecks und den vorhergehenden Kreis jeweils in einen Punkt berührt, und die Mittelpunkten alle Kreise auf der Strecke  $DC$  liegen.



Bestimmen Sie die Summe der Flächeninhalte aller einbeschriebenen Kreise.

**Übung 6.4.6** 1. Es seien  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  und  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass die Folge

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_{n+i} - a_i)$$

konvergent ist und bestimmen Sie Ihre Summe.

## 2. Bestimmen Sie die Summe der folgenden Reihen mit Hilfe der vorherigen Aufgabe:

- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$
- $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^3 - i}$ . Hinweis:  $\frac{1}{i^3 - i} = \frac{1}{2(i+1)} + \frac{1}{2(i-1)} - \frac{1}{i}$ .
- $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a+i)(a+i)}$  mit  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .



**Übung 6.4.7**

Die Folge  $(a_n)$  sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k} \quad (n \geq 1).$$

Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergiert und  $a_n \rightarrow 0$  strebt.

**Übung 6.4.8**

Zeigen Sie, dass wenn eine Reihe  $\sum a_n$  absolut konvergiert, so konvergiert auch  $\sum a_n^2$ . Ist die Umkehrung richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.



---

---

## KAPITEL 7

---

### EINIGE ELEMENTARE FUNKTIONEN

## 7.1 Stetigkeit und strenge Monotonie

In diesem Abschnitt werden einige der Eigenschaften bezüglich der Stetigkeit einer Funktion weiter untersucht, die dann verwendet werden, um die Stetigkeit einiger Elementarfunktionen festzustellen.

### Definition 7.1.1

Eine Funktion  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist **strengh monoton wachsend** (bzw. **strengh monoton fallend**) falls, für alle  $x, y \in I$ ,  $x < y$  impliziert  $f(x) < f(y)$  (bzw.  $f(x) > f(y)$ ).

Aus der Definition lässt sich leicht ableiten, dass eine streng monotone Funktion injektiv ist. Ist das Gegenteil auch der Fall? Nämlich, gegeben eine injektive Funktion  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ist sie auch streng monoton? Im Allgemeinen ist die Antwort “nein”. Dies geht aus den Gegenbeispielen in Abbildung 7.1.1 hervor: Beachten Sie, dass die linke Funktion nicht stetig ist (und die Definitionsmenge ein Intervall ist), während die rechte Funktion stetig ist, aber die Definitionsmenge nicht zusammenhängend ist (was der Aussage entspricht, dass es sich nicht um ein Intervall handelt, siehe Satz 5.4.13).

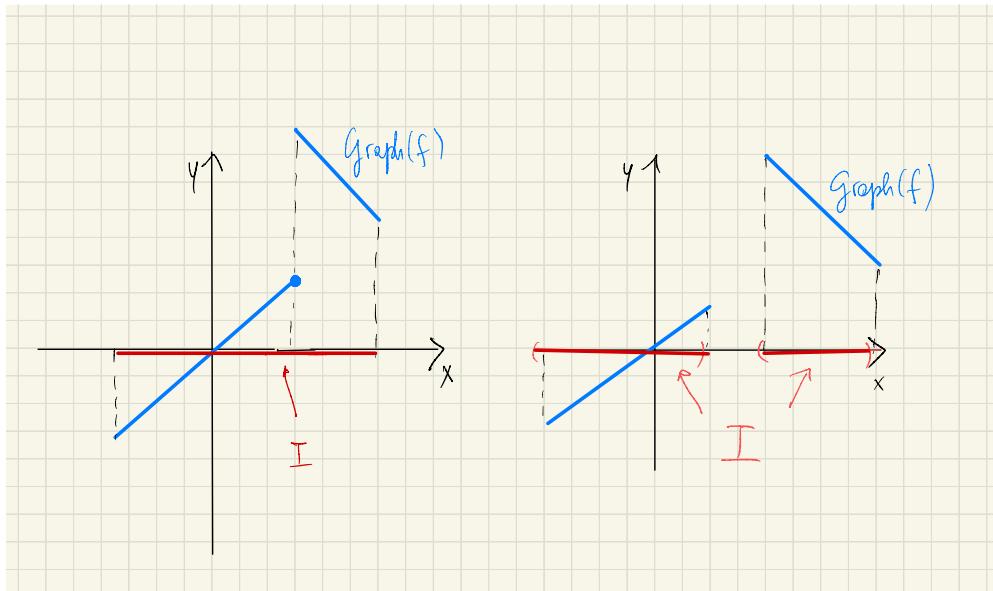


Figure 7.1.1

Das nächste Ergebnis ist daher das, was wir an dieser Stelle erwarten:

**Proposition 7.1.1**

*Es sei  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine injektive, stetige Funktion, wobei  $I$  ein Intervall ist. Dann ist  $f$  streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.*

Der Beweis dieser Proposition ist für Sie eine **Übung**. Sie können jedoch das folgende Lemma benutzen:

**Lemma 7.1.2**

*Es sei  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine injektive, stetige Funktion, wobei  $I$  ein Intervall ist, und  $x, y \in I$  mit  $x < y$ . Dann, wenn  $f(x) < f(y)$ , ist  $f(x) < f(z) < f(y)$  für alle  $z \in (x, y)$ . Wenn  $f(x) > f(y)$ , ist  $f(x) > f(z) > f(y)$  für alle  $z \in (x, y)$ .*

Mit anderen Worten, gegeben zwei beliebige Punkte  $x, y \in I$ , ist die Einschränkung von  $f$  auf  $[x, y]$  entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Um die Proposition zu beweisen, muss es gezeigt werden, dass es nicht zwei Intervalle geben kann, so dass die Funktion streng monoton wachsend in einem Intervall, aber streng monoton fallend im anderen Intervall ist.

*Beweis:* Es seien  $x, y \in I$  mit  $x < y$ . Da  $f$  injektiv ist, muss entweder  $f(x) < f(y)$  oder  $f(x) > f(y)$  sein. Nehmen wir an, dass  $f(x) < f(y)$  (der andere Fall wird sehr ähnlich behandelt). Da  $I$  ein Intervall ist, und  $x, y \in I$ , haben wir, dass  $[x, y] \subseteq I$  (siehe Bemerkung 5.4.4). Wir wollen zuerst beweisen, dass für alle  $z$  sodass  $x < z < y$  (und die daher in der Definitionsmenge von  $f$  sind) gilt  $f(x) < f(z) < f(y)$ . Nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist. Dann könnten wir einen  $z_0 \in (x, y)$  finden, sodass entweder  $f(z_0) \leq f(x)$  oder  $f(y) \leq f(z_0)$  ist. Da  $f$  injektiv ist, muss entweder  $f(z_0) < f(x)$  oder  $f(y) < f(z_0)$  gelten. Nehmen wir an, dass  $f(z_0) < f(x)$  (der andere Fall wird ähnlich behandelt), siehe Abbildung 7.1.2. Wir nehmen die Einschränkung der Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[z_0, y]$ , die auch stetig ist. Dann nimmt  $f$  im Intervall  $[z_0, y]$  alle Werte zwischen  $f(z_0)$  und  $f(y)$  (Korollar 5.5.5). Insbesondere, da  $f(z_0) < f(x) < f(y)$ , können wir einen  $z_1 \in [z_0, y]$  finden, sodass  $f(z_1) = f(x)$ . Aber  $z_1 \neq x$ , weil  $x < z_0 < z_1$ , und deshalb haben wir die Injektivität widersprochen. □

Wir können die bisher gemachten Überlegungen im folgenden Satz zusammenfassen:

**Satz 7.1.3**

*Es sei  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, wobei  $I$  ein Intervall ist. Dann ist  $f$  injektiv genau dann, wenn sie streng monoton ist.*

Gegeben  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, wobei  $I$  ein Intervall ist, können wir die Zielmenge auf  $f(I)$  einschränken, die ein Intervall  $J$  ist (siehe Sätze 5.4.13 und 5.5.3). Dann, falls  $f$  injektiv ist, ist die Einschränkung  $f: I \rightarrow J$  bijektiv. Die Frage, die nun sehr natürlich ist, ist: Es sei  $f^{-1}: J \rightarrow I$  die inverse Funktion. Ist sie auch stetig?

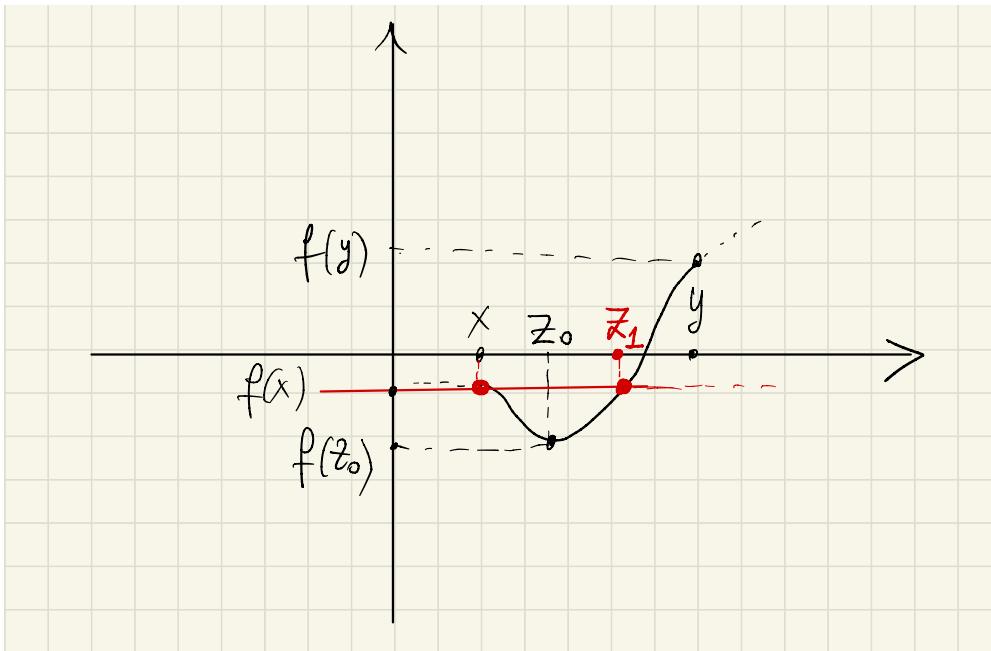


Figure 7.1.2

**Satz 7.1.4**

Es sei  $f: I \rightarrow J$  eine stetige Funktion und  $I$  ein offenes Intervall. Dann, falls  $f$  bijektiv ist, ist  $J$  ein offenes Intervall und die Umkehrabbildung  $f^{-1}: J \rightarrow I$  ist stetig.

Bemerken Sie, dass das Bild eines offenen Intervalls durch eine stetige Funktion nicht immer offen ist! Siehe Beispiel (a) auf Seite 179 in Abschnitt 5.5. Also spielt hier die Bijektivität von  $f$  eine wichtige Rolle.

*Beweis:* Dank der Sätze 5.4.13 und 5.5.3 wissen wir schon, dass  $J$  ein Intervall ist. Wir müssen beweisen, dass  $J$  offen ist. Die Intervalle, die nicht offen sind, sind der Gestalt:  $(a, b]$ ,  $[b, a)$ ,  $[a, b]$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $[b, \infty)$ ,  $\{b\}$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$ , mit  $a < b$ . Wir können den Fall, in dem  $J$  die Menge  $\{b\}$  ist, sofort ausschließen, weil in diesem Fall  $f$  konstant wäre, und eine konstante Funktion bijektiv sein kann, nur wenn die Definitionsmenge  $I$  nur einen Punkt besitzt; aber die Menge mit einem Punkt ist nicht offen (warum ist das so?) und wir haben angenommen, dass  $I$  offen ist. Auf jeden Fall, wenn  $J$  kein offenes Intervall wäre, ist aus der Liste der obigen Intervalle leicht zu sehen, dass  $f$  entweder ein Maximum oder ein Minimum  $b$  hätte. Es sei  $x_0 \in I$ , mit  $f(x_0) = b$ . Da  $I$  offen ist, können wir  $\epsilon > 0$  finden, sodass  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subseteq I$ . Aber die Einschränkung von  $f$  auf  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  ist injektiv und

stetig und deshalb, dank der Proposition 7.1.1, streng monoton. Wir erhalten dann den Widerspruch, weil eine streng monotone Funktion, definiert auf  $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  kein Maximum und kein Minimum im Punkt  $x_0$  haben kann (warum?).

Wir müssen nun beweisen, dass  $f^{-1}: J \rightarrow I \subseteq \mathbb{R}$  stetig ist. Dank des Satzes 5.4.7 müssen wir beweisen, dass für alle offene Mengen  $U$  in  $I$ , das Urbild  $(f^{-1})^{-1}(U)$  offen in  $J$  ist. Wir bemerken, dass,  $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U) \subseteq J$  und, da  $I$  und  $J$  offen sind, ist  $U$  offen in  $I$  genau dann, wenn sie offen in  $\mathbb{R}$  ist und ähnlich ist  $f(U)$  offen in  $J$  genau dann, wenn sie offen in  $\mathbb{R}$  ist (siehe Bemerkung 5.4.3(b)). Also müssen wir beweisen, dass das Bild  $f(U)$  einer offenen Menge  $U \subseteq I$  offen in  $\mathbb{R}$  ist. Es sei zunächst  $U$  ein Intervall  $U_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ . Da die Einschränkung von  $f$  auf  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  stetig und injektiv ist, können wir für den ersten Teil dieses Satzes schließen, dass  $f((x - \epsilon, x + \epsilon))$  offen ist.

Es sei nun  $U$  eine beliebige offene Menge in  $\mathbb{R}$ . Jede offene Menge ist die Vereinigung von offenen Umgebungen der Gestalt  $U_\epsilon(x)$  (wobei natürlich  $\epsilon$  von  $x$  abhängt), weil jeder Punkt ein innerer Punkt ist. Dann können wir schließen, dass

$$f(U) = f\left(\bigcup_{x \in U} U_\epsilon(x)\right) = \bigcup_{x \in U} f(U_\epsilon(x)),$$

wobei wir benutzt haben, dass das Bild einer beliebigen Vereinigung die Vereinigung der Bilder ist. Deshalb, da  $f(U)$  die Vereinigung einer Familie von offenen Mengen ist, ist sie selbst offen (siehe Lemma 5.4.2). Implikation (ii)  $\Rightarrow$  (i).  $\square$

### Übung 7.1.1

Es sei  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$  eine stetige, bijektive Funktion. Ist es wahr, dass falls  $I$  ein abgeschlossenes Intervall ist, dann ist  $f(I) = J$  abgeschlossen (in  $\mathbb{R}$ )? Wenn Ja, beweisen Sie diese Tatsache. Wenn Nein, finden Sie den Graph einer Funktion, das ein Gegenbeispiel ist.  $\spadesuit$

## 7.2 Exponentialfunktionen, Logarithmen und Potenzfunktionen

Der/die aufmerksame Studierende wird bemerkt haben, dass die rigorose Definition der Potenz  $a^q$  nur in dem Fall gegeben wurde, in dem  $a$  eine positive reelle Zahl ist, und  $q$  rational ist (siehe Abschnitt 2.3.2). Die Eigenschaften der Potenzen, die wir schon kennen, sind die folgenden: Es seien  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $c, d \in \mathbb{Q}$ , dann

- $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$ ,
- $a^{cd} = (a^c)^d$ ,
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$ .

**Übung 7.2.1**

Beweisen Sie, dass für eine beliebige  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $c, d \in \mathbb{Q}$ , gilt:

- $a^c > 0$ ,
- (“Monotonie”)  $c < d \implies a^c < a^d$ , falls  $a > 1$ , und  $a^c > a^d$ , falls  $0 < a < 1$ ,
- $a \leq b \implies a^c \leq b^c$ , für alle  $c > 0$  und  $a^c \geq b^c$ , für alle  $c < 0$ .



Wie könnte dann die Potenz  $a^x$  definiert werden, für beliebige  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $x \in \mathbb{R}$ ? Wir haben reelle Zahlen explizit als Dezimalzahlen definiert, also als  $x = p.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots$ , wobei  $p \in \mathbb{Z}$  und  $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ , für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Wir nehmen die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Dezimalzahlen  $x_0 := p$ ,  $x_n := p.\alpha_1\dots\alpha_n 000\dots$  für alle  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , die periodischen Dezimalzahlen sind, und deshalb mit rationalen Zahlen identifiziert werden können. Wir bemerken, dass

- die Folge der rationalen Zahlen  $(x_n)$  monoton steigend ist, und
- sie nach oben beschränkt ist.

(Es ist eine **Übung** für Sie, die oberen Tatsachen zu beweisen). Dann, aus der Monotonie (siehe Übung 7.2.1) und mit der Hilfe der oberen Bemerkung, können wir schließen, dass die Folge  $(a^{x_n})$  monoton wachsend und nach oben beschränkt ist. Dann erlaubt uns Lemma 2.2.1 zu sagen, dass  $(a^{x_n})$  stabilisiert ist, und wir definieren  $a^x$  als die Dezimalzahl, sodass

$$a^{x_n} \rightrightarrows a^x. \quad (7.2.1)$$

**Exponentialfunktion**

Wir können eine neue Funktion definieren, und zwar:

**Definition 7.2.1**

Es sei  $a > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist die **Exponentialfunktion**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Basis  $a$  die Funktion  $f(x) = a^x$ .

Diese Übung und ihr Inhalt sind sehr nützlich und wichtig für Sie, da sie eine gute Praxis sind, um mit dem Verstehen solcher Funktionen und ihrer Eigenschaften zu beginnen:

**Übung 7.2.2**

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $c, d \in \mathbb{R}$ , dann

1.  $a^{c+d} = a^c \cdot a^d,$
2.  $a^{cd} = (a^c)^d,$
3.  $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c,$
4.  $a^c > 0$  für alle  $c \in \mathbb{R};$
5.  $a \leq b \implies a^c \leq b^c$ , für alle  $c > 0$  und  $a^c \geq b^c$ , für alle  $c < 0.$
6. Für alle  $c < d$  ist  $a^c < a^d$  für  $a > 1$  und  $a^c > a^d$  für  $0 < a < 1.$

Deshalb, für alle  $a \neq 1$ , ist die Exponentialfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$  *streng monoton*, präziser gesagt, streng monoton wachsend im Fall  $a > 1$  und streng monoton fallend im Fall  $0 < a < 1$ . Dazu beweisen Sie, dass

7.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{falls } a > 1 \\ 0 & \text{falls } 0 < a < 1. \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{falls } a > 1 \\ +\infty & \text{falls } 0 < a < 1; \end{cases}$$

8.

die Exponentialfunktion *stetig* ist;

(*Hinweis:* Mit der Hilfe der Monotonie der Exponentialfunktion beweisen Sie zuerst, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1 \quad (\text{Stetigkeit in } x_0 = 0).$$

Für den allgemeineren Fall, bemerken Sie, dass  $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0}.$ )

9.

Für alle  $a \neq 1$  die Exponentialfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  *bijektiv* ist;

(Bemerken Sie, dass wir die Zielmenge eingeschränkt haben) (*Hinweis:* Für die Injektivität muss man die Monotonie benutzen. Für die Surjektivität, muss man irgendwie den Zwischenwertsatz (Korollar 5.5.4) verwenden, zusammen mit Punkt 6. dieser Übung; siehe auch Übung 5.5.1). ♠

Falls  $a = e$ , die Eulersche Zahl, erhalten wir die wichtige **Exponentialfunktion** mit Basis  $e$ ,  $f(x) = e^x$ . Wie ist diese Funktion mit der Funktion, die wir in Beispiel 6.2.1 definiert haben, verbunden? Da sie denselben Namen hat, sollte sie dieselbe Funktion bezeichnen. Das ist eigentlich der Fall. Wir werden diese Tatsache später in der Vorlesung beweisen (in der Erklärung hier unten, folgt Gleichheit (7.2.6) aus (7.2.5), die wir nicht beweisen). Im Moment bemerken wir das folgende:

**Übung 7.2.3** (a) Es sei  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge, sodass  $b_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und sodass  $b_n \rightarrow +\infty$ . Dann, für alle  $x \in \mathbb{R}$  beweisen Sie, dass

$$\left(1 + \frac{x}{b_n}\right)^{b_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^x. \quad (7.2.2)$$

*Hinweise:*

- Betrachten Sie zuerst den Fall, in dem  $x > 0$ , und bemerken Sie, dass

$$\left(1 + \frac{x}{b_n}\right)^{b_n} = \left(\left(1 + \frac{x}{b_n}\right)^{\frac{b_n}{x}}\right)^x.$$

Es sei  $\alpha_n = \frac{b_n}{x}$ . Dann genügt es zu beweisen, dass für eine beliebige reellwertige Folge  $(\alpha_n)$ , sodass  $\alpha_n \neq 0$  für alle  $n$  und  $\alpha_n \rightarrow +\infty$  gilt:

$$\gamma_n := \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e. \quad (7.2.3)$$

- Definieren Sie

$$A_n := \left(1 + \frac{1}{[\alpha_n] + 1}\right)^{[\alpha_n]} \quad \text{und} \quad B_n := \left(1 + \frac{1}{[\alpha_n]}\right)^{[\alpha_n] + 1}$$

und beweisen Sie, dass  $A_n \rightarrow e$  und  $B_n \rightarrow e$ .

- Schließen Sie, dass  $\gamma_n \rightarrow e$ .
- Für den Fall, in dem  $x < 0$ , könnte es nützlich sein, den folgenden Grenzwert zu beweisen:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1}$$

und dann zu schreiben  $x = -|x| \dots$

- (b) Für  $x \rightarrow +\infty$  oder  $x \rightarrow -\infty$  beweisen Sie, dass

$$f(x) := \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x \rightarrow e^\alpha \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7.2.4)$$



Es gibt eine Verallgemeinerung der Gleichheit (6.2.1) (ohne Beweis), und zwar

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (7.2.5)$$

Diese, zusammen mit (7.2.2) für die Folge  $a_n = n$ ,  $n \geq 1$ , beweist das folgende:  
Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$e^x \stackrel{(7.2.2)}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \stackrel{(7.2.5)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x), \quad (7.2.6)$$

also sind die “zwei Exponentialfunktionen” (glücklich) dieselben.

**Bemerkung 7.2.1**

Diese zwei Definitionen haben natürlich ihre Vorteile und Nachteile. Einer der Vorteile der ‘direkten’ Definition von  $e^x$  (als ‘Grenzwert’ von  $e^{x_n}$ , wobei  $(x_n)$  die ‘spezielle’ Folge von rationalen Zahlen, die wir definiert haben, ist, mit  $x_n \rightarrow x$ ) ist, dass die Stetigkeit nicht zu schwer zu beweisen ist. Natürlich ist diese Definition weniger elegant, da sie sehr spezifische Konzepte und Auswahlmöglichkeiten verwendet: die Darstellung einer reellen Zahl als Dezimalzahl und die Wahl der speziellen Folge  $(x_n)$ . Wenn in der Mathematik so genaue Entscheidungen getroffen werden, um ein Objekt zu definieren, wird normalerweise gesagt, dass die Definition nicht sehr *elegant* ist (weil es schwierig ist, sie zu verallgemeinern, und man nach einer ‘natürlicheren’ Definition suchen möchte).

Die Definition der Exponentialfunktion mit Reihen, die wir in Beispiel 6.2.1 gegeben haben, ist sicher ‘eleganter’, da die Exponentialfunktion mit komplexen Exponenten definiert werden kann und nicht nur mit reellen. Die wichtigen und schönen Eigenschaften der Funktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  werden in Zukunft analysiert. Aber der Nachteil ist, dass die Stetigkeit schwerer zu beweisen ist: man sollte hier das Konzept von *gleichmäßiger Konvergenz von Funktionenreihen* einführen, das vorerst außerhalb unseres Rahmens liegt. ◇

## Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit Basis  $a > 0$  und  $a \neq 1$  (nämlich  $f(x) = a^x$ ) ist bijektiv (Übung 7.2.29.). Ihre Surjektivität und Injektivität können so formuliert werden:

Für alle  $a > 0$  und  $a \neq 1$  und jede (feste)  $y > 0$  besitzt die Gleichung

$$a^x = y$$

eine eindeutige Lösung  $x \in \mathbb{R}$ . Also, für alle  $y > 0$  gibt es genau einen Exponenten  $x \in \mathbb{R}$ , sodass  $a^x = y$ .

**Definition 7.2.2**

Gegeben zwei positive reelle Zahlen  $a \neq 1$  und  $b$ , ist der **Logarithmus** von  $b$  zur Basis  $a$  der (einige) Exponent  $c \in \mathbb{R}$ , sodass  $a^c = b$ . Wir bezeichnen den Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$  mit  $\log_a b$ .

Deshalb ist die folgende Gleichheit  $a^{\log_a b} = b$  eine Identität.

**Übung 7.2.4**

Es sei  $a, b$  und  $c$  beliebige positive reelle Zahlen, mit  $a \neq 1$ . Beweisen Sie, dass

1.  $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ ;

2.  $\log_a(b^c) = c \log_a b$  ;
3. für  $b \neq 1$ ,  $b^{c \log_b a} = a^c$  ;
4. für  $b$  und  $c \neq 1$ ,  $\log_c b \cdot \log_b a = \log_c a$ , und deshalb

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

(Bemerken Sie, dass  $\log_c b \neq 0$  für alle  $b \neq 1$ ; warum?)



Falls die Basis  $a$  die Eulersche Zahl  $e$  ist, wird der Logarithmus mit Basis  $e$  auch **natürlicher Logarithmus** genannt, und wird einfach mit "log" oder "ln" bezeichnet.

Gegeben eine (feste) positive reelle Zahl  $a \neq 1$ , können wir dann die **Logarithmusfunktion** zur Basis  $a$  definieren, und zwar  $\log_a: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\log_a(x) := \log_a x$ . Aus ihrer Definition folgt es sofort, dass  $\log_a$  die inverse Funktion  $f^{-1}$  der Exponentialfunktion  $f$  mit Exponent  $a$  ist, also

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a(a^x) = x \iff (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_{>0}, \quad a^{\log_a y} = y \iff (f \circ f^{-1})(y) = y$$

Der folgende Satz ist eine einfache Konsequenz der Tatsachen, die wir bis jetzt diskutiert haben, und des Satzes 7.1.4:

### Satz 7.2.1

Die Logarithmusfunktion  $\log_a: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Basis  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , erfüllt folgende Eigenschaften:

1.  $\log_a$  ist streng monoton wachsend falls  $a > 1$  und streng monoton fallend falls  $0 < a < 1$ ;

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \log_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } a > 1 \\ +\infty & \text{falls } 0 < a < 1 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } a > 1 \\ -\infty & \text{falls } 0 < a < 1 \end{cases}$$

3.  $\log_a: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, für alle  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

*Beweis:* Der Beweis dieses Satzes ist für Sie eine einfache **Übung.**

□

### Potenzfunktion

Es sei nun  $\alpha$  eine feste reelle Zahl. Dann ist  $x^\alpha$  für alle  $x > 0$  wohldefiniert. Natürlich, für spezielle Werte von  $\alpha$ , kann die Funktion  $x^\alpha$  eine größere Definitionsmenge haben, zum Beispiel: falls  $\alpha \in \mathbb{N}$  dann ist  $x^\alpha$  wohldefiniert für alle  $x \in \mathbb{R}$ ; falls  $\alpha \in \mathbb{Z}_{<0}$  dann ist  $x^\alpha$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  wohldefiniert. Falls  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , was kann gesagt werden? Wir bemerken, zum Beispiel, dass  $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert ist,  $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$  für  $x \geq 0$  definiert ist und  $x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$  für alle  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  definiert ist (warum ist das so?)

### Übung 7.2.5

Finden Sie die größten Definitionsmengen der Potenzfunktionen  $x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$ , in Abhängigkeit mit den Werten von  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . (Es könnte nützlich sein,  $p$  und  $q$  teilerfremd zu nehmen.) ♠

Falls  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  können wir nicht hoffen, die Definitionsmenge  $\mathbb{R}_{>0}$  der Funktion  $x^\alpha$  zu erweitern, da  $x^\alpha$  als Grenzwert von  $(x^{\alpha_n})$  definiert wird, wobei  $\alpha_n$  rationalen Zahlen sind, und wir haben fast keine Kontrolle darüber, wie diese ganze Menge von rationalen Zahlen aussehen könnte.

Es sei dann  $\alpha \in \mathbb{R}$  fest. Die **Potenzfunktion**  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  ist definiert als  $f(x) := x^\alpha$ . Dank der Eigenschaft 5. der Übung 7.2.2 können wir sehen, dass sie streng monoton wachsend für alle  $\alpha > 0$  ist und streng monoton fallend für alle  $\alpha < 0$  ist. Natürlich, für  $\alpha = 0$  erhalten wir die konstante Funktion  $f(x) = x^0 = 1$  für alle  $x$ . Wir beschränken uns also auf den Fall, in dem  $\alpha \neq 0$ .

### Übung 7.2.6

Es sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  die Potenzfunktion  $f(x) = x^\alpha$ . Beweisen Sie, dass

1.

die Potenzfunktion  $f(x) = x^\alpha$  stetig in  $\mathbb{R}_{>0}$  ist

(*Hinweis:* Beweisen Sie zunächst, dass, falls  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $f$  stetig ist; dann beweisen Sie diese Tatsache mit  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , und dann mit  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Endlich, benutzen Sie die strenge Monotonie der Exponentialfunktion, um zu beweisen, dass  $\lim_{x \rightarrow 1} x^\alpha = 1$ , und bemerken Sie, dass für die Stetigkeit in einem beliebigen Punkt  $x_0 > 0$ , wir haben  $x^\alpha = (x/x_0)^\alpha x_0^\alpha$ .)

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{falls } \alpha < 0 \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \alpha > 0 \\ 0 & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$$



### 7.3 Einige wichtige Grenzwerte

Wir schließen dieses Kapitel mit einigen wichtigen Grenzwerten.

**Proposition 7.3.1** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha$ , für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1$  ;

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = \log a$  und deshalb  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ ;

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ , für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$

*Beweis:* 1. Wir bemerken, dass

$$(1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{\alpha}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Nun ist die Idee Satz 5.3.4 zu benutzen. Wir bemerken zunächst, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ existiert nicht!!}$$

In der Tat ist  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{1}{x} = +\infty$  und  $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{1}{x} = -\infty$  (falls Sie diese Tatsache nicht schon bewiesen haben, bitte machen Sie jetzt!). Aber in beiden Fällen können wir (7.2.4), zusammen mit Satz 5.3.4, benutzen und erhalten, dass

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e^\alpha, \quad \text{für } x \rightarrow 0.$$

2. Es sei  $f(x) := \frac{\log(1+x)}{x}$ . Wir beweisen zuerst, dass  $e^{f(x)} \rightarrow e$  für  $x \rightarrow 0$ . Dann benutzen wir die inverse Funktion der Exponential, der Logarithmus, und Satz 5.3.4, um zu schließen, dass  $f(x) = \log(e^{f(x)}) \rightarrow \log(e) = 1$ . Um zu beweisen, dass  $e^{f(x)} \rightarrow e$ , genügt es zu bemerken, dass  $e^{\frac{\log(1+x)}{x}} = e^{\log((1+x)^{\frac{1}{x}})} = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ , und deshalb können wir (7.2.4) benutzen mit  $\alpha = 1$ , um zu schließen, dass  $e^{\frac{\log(1+x)}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e$ .

3. Es sei  $y = a^x - 1$  und deshalb  $x = \log_a(y + 1) = \frac{\log(y + 1)}{\log a}$ , wobei die letzte Gleichheit eine Konsequenz von Übung 7.2.4 ist. Dann erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(y + 1)} \log a = \log a$$

wobei die erste Gleichheit aus Satz 5.3.4 kommt, und die letzte aus 2. dieser Proposition.

4. Es sei  $f(x) := (1+x)^\alpha - 1$ . Dann  $\log(1+f(x)) = \log((1+x)^\alpha) = \alpha \log(1+x)$ . Deshalb haben wir, dass

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{f(x)}{x} \frac{\log(1+x)}{\log(1+f(x))} = \frac{f(x)}{\log(1+f(x))} \frac{\log(1+x)}{x} \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

wobei, um den Grenzwert zu berechnen, haben wir 2. dieser Proposition zusammen mit Satz 5.3.4 benutzt (beachten Sie, dass  $f(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ ).  $\square$



---

---

## KAPITEL 8

---

### DIFFERENTIALRECHNUNG

## 8.1 Differenzierbarkeit: erste Eigenschaften und Beispiele

Um das Konzept der Ableitung einzuführen, gehen wir von einem geometrischen Problem aus. Betrachten wir den Graphen einer Funktion  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall ist, wie in der Abbildung.

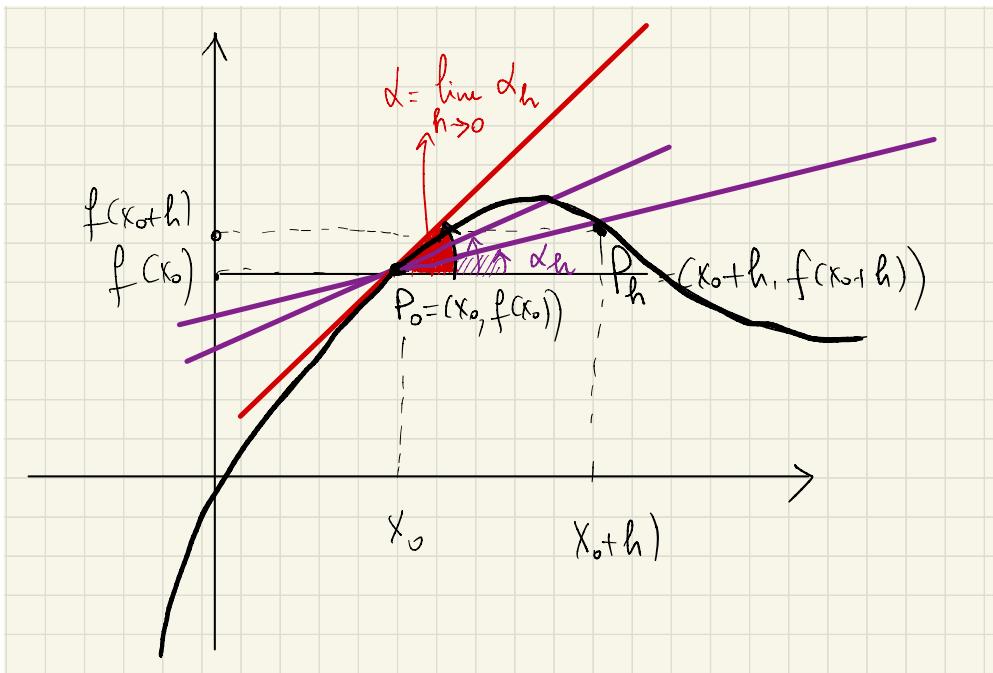


Figure 8.1.1

Wir fixieren einen Punkt  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  auf dem Graph von  $f$  und nehmen einen Punkt  $P_h \neq P_0$  auf dem Graph von  $f$  nahe genug an  $P_0$ . Wir bezeichnen die Koordinaten von  $P_h$  mit  $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ , wobei  $h \neq 0$ . Da  $P_0 \neq P_h$  ist, gibt es genau eine Gerade durch  $P_0$  und  $P_h$ , deren **Steigung** gegeben ist durch

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Es ist auch nützlich, sich daran zu erinnern, dass diese Steigung genau die Tangente des Winkels  $\alpha_h$  in der Abbildung ist, also dass

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan \alpha_h.$$

Die Differenzierbarkeit der Funktion  $f$  in  $x_0$  bedeutet genau, dass es eine “Grenzgerade” gibt, die **Tangente** genannt wird, deren Steigung der Grenzwert

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tan \alpha_h$  ist, falls der Grenzwert existiert und endlich ist. Genauer gesagt haben wir:

### Definition 8.1.1

Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist und  $x_0 \in I$ . Dann heißt  $f$  **differenzierbar** in  $x_0$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert wird **Ableitung** von  $f$  in  $x_0$  genannt und mit  $f'(x_0)$  bezeichnet.

Es werden auch andere Notationen für die Ableitung in  $x_0$  verwendet, zum Beispiel wird  $\frac{df}{dx}(x_0)$  oft in anderen Büchern benutzt. Wir können dann eine neue Funktion definieren, und zwar: es sei  $J \subseteq I$  die Teilmenge von  $I$ , sodass für alle  $x_0 \in J$  die Ableitung  $f'(x_0)$  existiert. Die **Ableitungsfunktion** (oder kurz **Ableitung**) ist die Funktion  $f': J \rightarrow \mathbb{R}$ , die zu jedem Punkt  $x_0$  die Ableitung  $f'(x_0)$  zuordnet.

### Bemerkung 8.1.1

Wir werden bald sehen, dass  $J$  leer sein könnte, d.h. dass es Funktionen existieren, die zu keinem Punkt differenzierbar sind (siehe Beispiel 8.1.2).  $\diamond$

Wir erinnern daran, dass die Gleichung einer (nicht vertikalen) Gerade durch einen Punkt  $(x_0, y_0)$  mit Steigung  $a$  gegeben ist durch

$$y = y_0 + a(x - x_0).$$

Daher, dank der Bedeutung der Ableitung in  $x_0$ , ist die folgende Definition sehr natürlich:

### Definition 8.1.2

Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist und  $x_0 \in I$ . Falls  $f'(x_0)$  existiert, ist die **Tangente** an dem Graphen von  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  die Gerade, deren Gleichung gegeben ist durch

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (8.1.1)$$

Es sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , deren Graph genau die Tangente an dem Graphen von  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  ist. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Differenzierbarkeit von  $f$  in  $x_0$  nicht nur bedeutet, dass  $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ , für  $x \rightarrow x_0$  (das bedeutet nur, dass  $f(x_0) = g(x_0)$ ): sie bedeutet etwas stärker, und zwar, dass

$$\frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Dann können wir die Differenzierbarkeit so umformulieren:

**Satz 8.1.1**

Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall ist und  $x_0 \in I$ . Dann ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$  genau dann, wenn ein  $a \in \mathbb{R}$  existiert, sodass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Fall ist  $a$  genau  $f'(x_0)$ .

**Bemerkung 8.1.2**

Mit diesem Satz und der vorherigen Bemerkung kann geschlossen werden, dass die Tangente zum Graphen von  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$  unter allen Geraden, die durch  $(x_0, f(x_0))$  verlaufen, die beste ist, die sich dem Graphen von  $f$  annähert. Tatsächlich nehmen wir an, dass  $f$  stetig in  $x_0$  ist (wir werden bald sehen, dass falls  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist, dann muss sie auch stetig in  $x_0$  sein). Dann haben die Geraden dieses Geradenbündels Gleichung  $y = f(x_0) + b(x - x_0)$ , und da sie durch  $(x_0, f(x_0))$  verlaufen, erfüllen sie  $f(x) - f(x_0) - b(x - x_0) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$ . Aber unter ihnen gibt es nur eine, die nicht nur  $f(x) - f(x_0) - b(x - x_0) \rightarrow 0$ , sondern auch  $\frac{f(x) - f(x_0) - b(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$  erfüllt, und zwar die Gerade mit  $b = f'(x_0)$ .

Warum behandeln wir diese zweite Bedingung als stärker als die erste? Da dies die erste Bedingung impliziert (wenn  $f(x) - f(x_0) - b(x - x_0)$  nicht gegen Null ging, konnte  $\frac{f(x) - f(x_0) - b(x - x_0)}{x - x_0}$  auch nicht gegen Null gehen; warum?)  $\diamond$

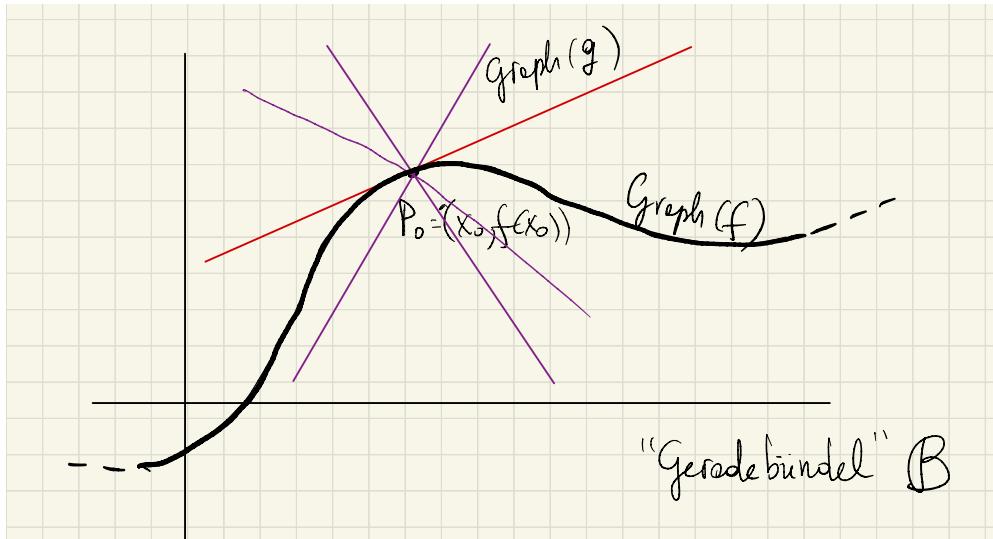


Figure 8.1.2

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

*Beweis:* Falls  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist, dann wissen wir, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert und gleich  $f'(x_0)$  ist. Dann nehmen wir  $a = f'(x_0)$  und bemerken, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right)$$

Dann, da der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert und gleich  $f'(x_0)$  ist (und natürlich existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$ , weil  $f'(x_0)$  eine Konstante ist), erlaubt uns Satz 5.3.3 zu schließen, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Die Argumentation in der umgekehrten Richtung ist sehr ähnlich, und zwar: angenommen, dass es ein  $a \in \mathbb{R}$  gibt, sodass  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$ , dann schreiben wir

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a + a = \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} + a$$

und nochmal dank des Satzes 5.3.3 erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} + a = 0 + a = a.$$

Dann ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$  mit Ableitung  $a$ . □

### Bemerkung 8.1.3

Wie für die Stetigkeit (siehe Bemerkung 5.2.1), ist die Differenzierbarkeit eine *lokale Eigenschaft* d.h.:

Es seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen und  $a \in I$ , sodass  $f$  und  $g$  gleich in einer Umgebung von  $a$  sind, oder mit anderen Worten

$$\exists \tilde{\delta} > 0, \text{ sodass } f(x) = g(x), \text{ für alle } x \in U_{\tilde{\delta}(a)}.$$

Dann ist  $f$  in  $a$  differenzierbar genau dann, wenn  $g$  in  $a$  differenzierbar ist und gilt  $f'(a) = g'(a)$ .

Der Beweis ist für Sie eine einfache **Übung**. ◊

Es ist Zeit, einige Beispiele zu nennen:

**Beispiel 8.1.1** 1. Die konstante Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \alpha$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist differenzierbar, mit Ableitung  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dies ergibt sich direkt aus der Definition der Ableitung als Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , da in diesem einfachen Fall,  $f(x) - f(x_0) = 0$  für alle  $x, x_0 \in \mathbb{R}$  ist.

Die richtigste Überlegung ist jedoch die geometrische (siehe Bemerkung 8.1.2): Der Graph der konstanten Funktion ist (schon) eine Gerade, deshalb "heuristisch" sollte die Tangente Gerade zum Graph von  $f$  in einem beliebigen Punkt  $(x_0, f(x_0))$ , die dem Graph von  $f$  am besten entspricht, der Graph von  $f$  selbst sein, dessen Steigung Null ist.

2. Ähnlich, es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f(x) = y_0 + b(x - x_0)$ , für ein  $b \in \mathbb{R}$ . Da der Graph eine Gerade ist, ist die tangentie Gerade zum Graph von  $f$  in einem beliebigen Punkt  $(x_0, f(x_0))$  die Gerade  $y = y_0 + b(x - x_0)$  selbst, die Steigung  $b$  hat. Mit dem Satz 8.1.1 erhalten wir tatsächlich, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - b(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y_0 + b(x - x_0) - y_0 - b(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

3. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben bei  $f(x) = x^2$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = 2x_0h + h^2$ , und deshalb

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0.$$

Dann ist die Ableitungsfunktion  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  genau  $f'(x) = 2x$ .

4. **Potenzfunktionen** (mit natürlichem Exponenten):

Im Allgemeinen sei  $f(x) = x^n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Dann, mit der Hilfe des Binomischen Satzes (Satz 1.4.6) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= (x_0 + h)^n - x_0^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} - x_0^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} = \\ &= \binom{n}{1} h x_0^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k} = n h x_0^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k} \end{aligned}$$

und deshalb

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( n x_0^{n-1} + h \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k} \right) = n x_0^{n-1}.$$

Wir haben dann bewiesen, dass  $f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist durch  $f'(x) = n x^{n-1}$ . Also haben wir gezeigt, dass

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die Ableitung der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$  gegeben durch

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

Wir bemerken, dass falls  $n = 0$ ,  $f$  konstant ist, und diese Formel gibt uns  $f' = 0$ , die widerspruchsfrei mit 1. ist.

5. **Exponentialfunktionen:** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Exponentialfunktion mit Basis  $a > 0$ ,  $f(x) = a^x$ . Wir bemerken, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \frac{a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0}.$$

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

Dann, dank der Proposition 7.3.1 3. und des Satzes 5.3.4 können wir schließen, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = a^{x_0} \log a.$$

Also haben wir bewiesen, dass

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Exponentialfunktion,  $f(x) = a^x$ , wobei  $a > 0$ , dann

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} a^x = a^x \log a.$$

6. **Logarithmus:** Es sei  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  die Logarithmusfunktion  $f(x) = \log x$ . Wir bemerken, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{\log\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)} = \frac{1}{x_0} \frac{\log(1 + g(x))}{g(x)}$$

wobei  $g(x) = \frac{x}{x_0} - 1$ . Dann, dank der Proposition 7.3.1 2. und des Satzes 5.3.4 erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log(x) - \log(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y)}{y} = \frac{1}{x_0}.$$

Also haben wir bewiesen, dass:

Es sei  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  die Logarithmusfunktion,  $f(x) = \log(x)$ , dann

$$f': \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}.$$

Mit Übung 7.2.4 4. können wir auch schließen, dass gegeben  $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \log_a x$  für ein  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , dann ist

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \log a}$$

7. **Sinus- und Cosinusfunktionen:** Zunächst erinnern wir uns an folgende Formeln:

Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \tag{8.1.2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \tag{8.1.3}$$

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Sinusfunktion,  $f(x) = \sin x$  und mit der Hilfe der ersten Identität hier oben bemerken wir, dass

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2 \frac{\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{x - x_0}.$$

Da  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$  und die Cosinusfunktion stetig ist, dank des Satzes 5.3.4 erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \cos x_0,$$

wobei natürlich ist  $y = \frac{x-x_0}{2}$ . Dann

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Sinusfunktion,  $f(x) = \sin(x)$ , dann

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$

Mit der zweiten Formel hier oben kann es bewiesen werden, dass

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Cosinusfunktion,  $f(x) = \cos(x)$ , dann

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x).$$

Bisher haben wir die Ableitung von Funktionen gefunden, so dass die Definitionsmenge der Ableitung die gleiche ist wie die der Funktion. Dies ist offensichtlich nicht immer der Fall, wie das folgende Beispiel zeigt:

**8. Betragsfunktion:** Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Betragsfunktion,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Es sei  $x_0 > 0$ . Da  $(0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$  offen ist, für jeden  $x_0 \in (0, +\infty)$  können wir eine (offene) Umgebung  $U(x_0)$  von  $x_0$  finden, die ganz in  $(0, +\infty)$  liegt. Dann, in der Definition des Grenzwertes für  $x \rightarrow x_0$ , Definition 5.3.2, können wir immer annehmen, dass die Umgebungen  $U_\delta(x_0)$  ganz in  $(0, +\infty)$  liegen. In der Tat, wenn nicht, können wir  $U_\delta(x_0)$  mit  $U_\delta(x_0) \cap U(x_0)$  ersetzen, die noch eine offene Umgebung von  $x_0$  ist. Mit dieser Wahl erhalten wir, dass  $f(x) = x$  für alle  $x \in U_\delta(x_0)$ , und deshalb

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \text{für alle } x_0 \in (0, +\infty).$$

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

Ähnlich für jeden  $x_0 \in (-\infty, 0)$  können wir in Definition 5.3.2 immer Umgebungen  $U_\delta(x_0)$  von  $x_0$  wählen, sodass  $f(x) = -x$  für alle  $x \in U_\delta(x_0)$ , und deshalb

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = -1 \quad \text{für alle } x_0 \in (0, +\infty).$$

Was passiert in  $x_0 = 0$ ? Der Ursprung ist ein Randpunkt der beiden Intervallen  $(0, +\infty)$  und  $(-\infty, 0)$ , und deshalb schneidet jede Umgebung von 0 beide Intervalle. Deshalb können wir nicht annehmen, dass wir immer Umgebungen finden können, wo die Funktion  $f$  immer  $x$  oder  $-x$  ist, was impliziert, dass: Für jede Umgebung  $U$  von 0 gibt es Punkte  $x \in U$ , in denen  $\frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{x}{x} = 1$  und Punkte, in denen  $\frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{-x}{x} = -1$ . Deshalb kann der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  nicht existieren! (Warum ist das so? **Übung**).

Also können wir schließen, dass

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Betragsfunktion,  $f(x) = |x|$ , dann

$$f': \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$



Bis jetzt sind alle betrachteten Funktionen stetig. Was ist dann die Beziehung zwischen dem Konzept von Stetigkeit und Differenzierbarkeit?

### Satz 8.1.2

*Es sei  $f: I \rightarrow J$  eine Funktion, die differenzierbar in  $x_0 \in I$  ist, wobei  $I$  ein offenes Intervall ist. Dann ist  $f$  stetig in  $x_0$ .*

*Beweis:* Um die Stetigkeit im Punkt  $x_0$  zu beweisen, benutzen wir die Charakterisierung der Stetigkeit gegeben in Satz 5.3.1: da  $x_0 \in I$  und  $I$  offen ist, sind alle Punkte Häufungspunkte, und deshalb müssen wir nur beweisen, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  oder, äquivalent gesagt, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$  (**Übung:** Beweisen Sie diese Äquivalenz). Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die dritte Gleichheit gilt, weil wir bereits wissen, dass die beiden Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$  existieren.  $\square$

**Beispiel 8.1.2**

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die definiert ist durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig (siehe Seite 151) und deshalb in keinem Punkt differenzierbar.

Es gibt aber Funktionen, die in jedem Punkt der ihren Definitionsmengen stetig sind, und in keinem Punkt differenzierbar! Ein solches Beispiel wurde von Weierstraß gegeben und ist daher als *Weierstraß-Funktion* bekannt. Die Konstruktion dieses Beispiels und die Überprüfung seiner Eigenschaften erfordern mehr Techniken als wir zur Verfügung haben und werden später durchgeführt. Wir werden hier nur das Bild (aus Wikipedia) geben: Der Graph der Funktion sieht aus wie ein Fraktal und zeigt an jedem Punkt das gleiche Problem wie die Betragsfunktion bei  $x = 0$ , siehe Beispiel 8.1.1 8. und Abbildung 8.1.3. ♣

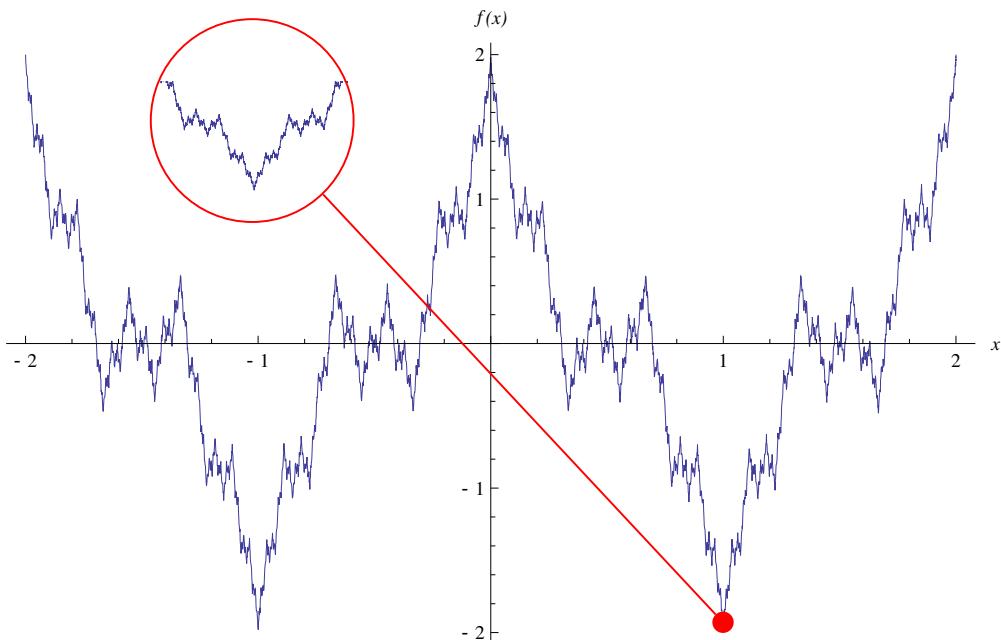


Figure 8.1.3: Von Eeyore22 - Own work, Public Domain,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5075959>

Um die Ableitungen von “komplizierteren” Funktionen zu berechnen, müssen wir zwei Sätze einführen und beweisen: Der erste veranschaulicht die sogenannte

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

“Algebra der Ableitungen” (Wie verhalten sich die Ableitungen von Summen, Produkten und Quotienten von Funktionen?), während wir im zweiten untersuchen, wie sich die Ableitung einer Verknüpfung von zwei Funktionen verhält.

### Satz 8.1.3

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $x_0 \in I$ . Seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen, die in  $x_0$  differenzierbar sind mit Ableitungen  $f'(x_0)$  und  $g'(x_0)$ . Dann folgt daraus, dass

1.  $f + g$  differenzierbar in  $x_0$  ist mit Ableitung

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

2. für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \cdot f$  differenzierbar in  $x_0$  ist mit Ableitung

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0);$$

3.  $f \cdot g$  differenzierbar in  $x_0$  ist mit Ableitung

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

4. falls  $g(x_0) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  differenzierbar in  $x_0$  ist mit Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

*Beweis:* Es sei  $x_0$  wie oben fest, und  $\Delta f: I \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $\Delta f(x) := f(x) - f(x_0)$  und wir bemerken, dass

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x)}{x - x_0}.$$

1. Wir bemerken einfach, dass  $\Delta(f + g) = \Delta(f) + \Delta(g)$ , und deshalb ist

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta(f + g)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta(f) + \Delta(g)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta g}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0), \end{aligned}$$

wo wir in der dritten Gleichheit Satz 5.3.3 (i) verwendet haben.

2. Dies lässt sich leicht ableiten, wenn man beobachtet, dass  $\Delta(\alpha f) = \alpha\Delta(f)$ . Dann kann man wie oben Satz 5.3.3 (ii) benutzen, um die Behauptung zu schließen. Die Details bleiben dem Leser überlassen.
3. Wir bemerken zunächst, dass es *nicht* wahr ist, dass  $\Delta(f \cdot g) = \Delta(f)\Delta(g)$ ! In der Tat haben wir, dass

$$\begin{aligned}\Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) = \\ &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) = \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)) = \\ &= \Delta f(x)g(x) + f(x_0)\Delta g(x).\end{aligned}$$

Dazu bemerken wir, dass  $g$  stetig in  $x_0$  ist (Satz 8.1.2) und deshalb  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ , weil  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $I$  ist (siehe Satz 5.3.1). Dann, mit der Hilfe von Satz 5.3.3 (i) und (iii), gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta(f \cdot g)(x)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f(x)g(x) + f(x_0)\Delta g(x)}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Ableitung der Funktion  $\alpha f$ , wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$ , mit der Hilfe dieser Berechnung und des Beispiels 8.1.1 1. berechnet werden kann.

4. Wir bemerken zunächst, dass, falls  $g(x_0) \neq 0$ , es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, in der  $g(x) \neq 0$  für alle  $x \in U$  (warum ist das so?). Dann ist die Funktion  $\frac{1}{g}(x)$  wohldefiniert in  $U$ , und so ist  $\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x)$ . Wir bemerken, dass für alle  $x \in U$  gilt

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} = -\frac{\Delta g(x)}{g(x)g(x_0)},$$

und deshalb, da  $g$  stetig in  $x_0$  ist (Satz 8.1.2), mit der Hilfe von Sätzen 5.3.1 und 5.3.3 schließen wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{\Delta g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \quad (8.1.4)$$

Deshalb ist  $\frac{1}{g}(x)$  in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ .

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

Um zu beweisen, dass  $\frac{f}{g}$  differenzierbar in  $x_0$  ist und um die Ableitung zu berechnen, genügt es zu verwenden, was wir in 3. dieses Satzes bewiesen haben zusammen mit (8.1.4). In der Tat haben wir, dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) \stackrel{3.\text{und } (8.1.4)}{=} f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

□

### Satz 8.1.4

**(Kettenregel)** Es seien  $I$  und  $J$  offene Intervalle und  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $g(I) \subseteq J$ . Es sei  $x_0 \in I$  und nehmen wir an, dass  $g$  in  $x_0$  und  $f$  in  $g(x_0)$  differenzierbar sind. Dann ist  $f \circ g$  in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung gegeben durch

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

*Beweis:* Die anfängliche (falsche!!) Idee ist die folgende: Schreiben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

und dann bemerken wir, dass für  $x \rightarrow x_0 \implies g(x) \rightarrow g(x_0)$  und deshalb, dank des Satzes 5.3.4, sollte der obige Grenzwert genau  $f'(g(x_0))g'(x_0)$  sein.

Was ist dann das Problem? Das Problem ist, dass, um den Grenzwert einer Funktion für  $x \rightarrow x_0$  zu berechnen, müssen wir zuerst wissen, dass die Funktion in  $U \setminus \{x_0\}$  definiert ist, wobei  $U$  eine Umgebung von  $x_0$  ist. In diesem Fall wissen wir apriori nicht, ob es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt, sodass die Funktion  $\frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$  wohldefiniert in  $U \setminus \{x_0\}$  ist. Mit anderen Worten, könnte es sein, dass  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $\{x \in I \mid g(x) - g(x_0) = 0\}$  ist (also, dass  $x_0$  kein isolierter Punkt der Menge der Nullstelle der Funktion  $g(x) - g(x_0)$  ist; siehe die Hypothesen von Satz 5.3.4).

Dann wird der folgende Trick verwendet: Wir definieren die Funktion

$$F(y) := \begin{cases} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} & \text{für } y \neq g(x_0) \\ f'(g(x_0)) & \text{für } y = g(x_0). \end{cases}$$

Wir bemerken, dass  $F$  wohldefiniert in  $J$  ist und dass

$$\lim_{y \rightarrow g(x_0)} F(y) = \lim_{y \rightarrow g(x_0)} \frac{f(y) - f(g(x_0))}{y - g(x_0)} = f'(g(x_0)) = F(g(x_0)) \quad (8.1.5)$$

weil  $f$  differenzierbar in  $g(x_0)$  ist (warum gilt die erste Gleichheit?). Dehalb ist  $F$  stetig in  $y = g(x_0)$ . Aus Satz 8.1.5, aus der Stetigkeit von  $g$  in  $x_0$  (Satz 8.1.2) und aus Satz 5.2.4 folgt es, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(g(x)) = F(g(x_0)) = f'(g(x_0)). \quad (8.1.6)$$

Dazu gilt für alle  $x \in I$ , dass

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = F(g(x))(g(x) - g(x_0)). \quad (8.1.7)$$

In der Tat, falls  $g(x) = g(x_0)$ , sind beide Seiten Null. Falls nicht, dann ist  $F(g(x))$  genau  $\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}$ .

Endlich, mit der Hilfe von Satz 5.3.3 können wir schließen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &\stackrel{(8.1.7)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} F(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} F(g(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{(8.1.6)}{=} f'(g(x_0))g'(x_0), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit die Differenzierbarkeit von  $g$  in  $x_0$  benutzt wird.  $\square$

Mit den Sätzen 8.1.3 und 8.1.4 und mit den Ableitungen, die wir schon in Beispiel 8.1.1 berechnet haben, können wir die Ableitungen vieler Funktionen berechnen:

**Beispiel 8.1.3 • Tangens- und Kotangensfunktion:** Es sei  $\tan: \mathbb{R} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$  die Tangensfunktion, wobei  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Aus der Trigonometrie wissen wir, dass  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Deshalb haben wir, dass

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{(\cos x)^2 - (-\sin x)(\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$

Also haben wir bewiesen, dass

Es sei  $\tan: \mathbb{R} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$  die Tangensfunktion. Dann

$$(\tan)': \mathbb{R} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\tan)'(x) = \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2.$$

Ähnlich kann es bewiesen werden, dass

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

Es sei  $\cot: \mathbb{R} \setminus D' \rightarrow \mathbb{R}$  die Kotangensfunktion, wobei  $D' = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Dann

$$(\cot)': \mathbb{R} \setminus D' \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\cot)'(x) = \frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{(\sin x)^2} = -1 - (\cot x)^2.$$

- **Potenzfunktionen** (mit reellem Exponenten):

Es sei  $h: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $h(x) = x^\alpha$ , für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wir haben schon bewiesen (siehe Beispiel 8.1.1 4.), dass, falls  $\alpha \in \mathbb{N}$ , ist  $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ . Wir beweisen, dass diese Tatsache auf reelle Exponenten verallgemeinert wird. In der Tat können wir  $x^\alpha$  als  $e^{\log(x^\alpha)}$  schreiben (weil der Logarithmus die inverse Funktion des Exponential ist) und  $e^{\log(x^\alpha)} = e^{\alpha \log x}$  (Übung 7.2.4 2.). Dann definieren wir  $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \alpha \log(x)$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(y) = e^y$ . Es ist leicht zu bemerken, dass  $f \circ g = h$ . Mit der Hilfe der Ableitungen der Logarithmusfunktion und Exponentialfunktion, die wir schon in Beispiel 8.1.1 berechnet haben, und mit Satz 8.1.4, können wir dann schließen, dass

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{\alpha \log x} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Also haben wir bewiesen, dass

Es sei  $h: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  die Potenzfunktion  $h(x) = x^\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dann

$$h': \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$



Ein weiterer wichtiger Satz ist der, mit dem wir die Ableitung der Umkehrfunktion berechnen können:

### Satz 8.1.5

#### (Ableitung der Umkehrfunktion)

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow J$  eine bijektive, stetige Funktion. Nehmen wir an, dass  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist mit Ableitung  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $f^{-1}: J \rightarrow I$  in  $y_0 := f(x_0)$  differenzierbar mit Ableitung

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \quad (8.1.8)$$

*Beweis:* Für  $y \rightarrow y_0$  mit  $y \neq y_0$  müssen wir beweisen, dass der Grenzwert

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

existiert und wie in (8.1.8) gegeben ist. Es sei  $x = f^{-1}(y)$ . Wir bemerken, dass wenn  $y \neq y_0$  dann auch  $x \neq x_0$  ist (Injektivität von  $f^{-1}$ ). Also haben wir, dass für alle  $y \neq y_0$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}. \quad (8.1.9)$$

Es sei  $G(x) := \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$ , definiert für alle  $x \neq x_0$ . Dann, nach (8.1.9), ist  $G(f^{-1}(y))$  genau  $\frac{x - x_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}$ . Da  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist und  $f'(x_0) \neq 0$ , erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dazu impliziert Satz 7.1.4, dass  $f^{-1}$  stetig ist und deshalb, falls  $y \rightarrow y_0$ , strebt auch  $x = f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(y_0) = x_0$ . Mit Satz 5.3.4 können wir schließen, dass

$$\frac{1}{f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} G(f^{-1}(y)) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}.$$

Deshalb ist  $f^{-1}$  in  $y_0$  differenzierbar mit Ableitung  $\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ .  $\square$

#### Beispiel 8.1.4

In diesen Beispielen diskutieren wir die trigonometrischen Funktionen, die, obwohl sie nicht invertierbar sind (weil sie periodisch sind), bei entsprechender Einschränkung invertierbar sind, und berechnen die Ableitung der Inversen.

- (i) Der **Arkussinus**: Die Sinusfunktion  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist nicht invertierbar. Aber wir wollen zeigen, dass die Einschränkung  $\sin: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1)$  invertierbar ist. Wir zeigen, dass sie in der Tat *streng monoton wachsend* in  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ist, d.h. für jede  $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$  ist  $\sin(x) < \sin(y)$ , die die Injektivität impliziert. Die Surjektivität ist eine einfache **Übung** für Sie.

Wir bemerken zunächst, dass

$$\sin(y) - \sin(x) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right).$$

Aus  $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$  erhalten wir, dass  $-\frac{\pi}{2} < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2}$  und deshalb ist, für solche Werte von  $x$  und  $y$ ,  $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) > 0$ . Wir erhalten auch, dass

$0 < y - x < \pi$  und wir haben in diesem Fall, dass  $\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) > 0$ . Dann können wir schließen, dass für jede  $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$  ist  $\sin(y) - \sin(x) > 0$ .

Die Umkehrfunktion der Sinusfunktion,  $\sin: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (-1, 1)$  heißt

**Arkussinus** und wird mit  $\arcsin$  bezeichnet. Also ist  $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

Wir haben schon bewiesen, dass die Sinusfunktion stetig ist (siehe Beispiel 5.2.1 (iii)) und deshalb, dank des Satzes 7.1.4, ist auch  $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  stetig. Da  $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) > 0$  für alle  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , können wir schon aus Satz 8.1.5 schlussfolgern, dass der Arkusinus differenzierbar ist. Dazu, wenn wir mit  $f$  die Sinusfunktion bezeichnen, ist die Ableitung von  $\arcsin = f^{-1}$  genau

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Wir können diese Ergebnisse so zusammenfassen:

Der Arkusinus  $\arcsin: (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  ist in jedem Punkt  $y \in (-1, 1)$  differenzierbar, mit Ableitung gegeben durch

$$\frac{d}{dy} \arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(ii) Der **Arkuskosinus**: Es ist für Sie eine **Übung** zu beweisen, dass

1.  $\cos: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton fallend ist und deshalb injektiv;

*Hinweis:* Benutzen Sie die Formel aus der Trigonometrie:

$$\cos(y) - \cos(x) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

2.  $\cos: (0, \pi) \rightarrow (-1, 1)$  bijektiv ist;

3. Die Umkehrabbildung  $\arccos: (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$ , die **Arkuskosinus** genannt wird, ist in jedem Punkt  $y \in (-1, 1)$  differenzierbar und gilt

$$\frac{d}{dy} \arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

4. Aus diesen Formeln erhalten wir, dass

$$\frac{d}{dy} \arccos(y) + \frac{d}{dy} \arcsin(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in (-1, 1).$$

Finden Sie einen geometrischen Grund für die obige Gleichheit.

Mit dieser Übung haben Sie bewiesen, dass

Der Arkuskosinus  $\arccos: (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$  ist in jedem Punkt  $y \in (-1, 1)$  differenzierbar, mit Ableitung gegeben durch

$$\frac{d}{dy} \arccos(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

- (iii) Der **Arkustangens**: Es sei  $\tan: \mathbb{R} \setminus D \rightarrow \mathbb{R}$  die Tangensfunktion, wobei  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ . Da sie periodisch ist, ist sie nicht injektiv. Aber die Einschränkung  $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  ist bijektiv und streng monoton wachsend. Der Beweis dieser zwei Tatsachen ist für Sie eine **Übung**.

*Hinweis:* Für die strenge Monotonie, benutzen Sie die Formel aus der Trigonometrie:

$$\tan(y) - \tan(x) = \tan(y-x)(1 + \tan x \tan y).$$

Dann ist  $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  invertierbar, und die Umkehrfunktion  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  heißt **Arkustangens**. Aus Satz 7.1.4 können wir schon schließen, dass der Arkustangens stetig ist. Aber Satz 8.1.5 impliziert sofort, dass der Arkustangens in jedem Punkt differenzierbar ist. In der Tat ist die Tangensfunktion differenzierbar mit Ableitung  $\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + (\tan x)^2$ , die immer strikt positiv ist. Dann ist die Formel der Ableitung von Arkustangens gegeben durch

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(y)))^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Deshalb haben wir bewiesen, dass

Der Arkustangens  $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ist in jedem Punkt  $y \in \mathbb{R}$  differenzierbar, mit Ableitung gegeben durch

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

- (iv) Der **Arkuskotangens**: Es ist für Sie eine **Übung** zu beweisen, dass

1. Die Kotangensfunktion  $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  bijektiv ist (für die Injektivität, beweisen Sie, dass der Kotangens streng monoton fallend ist);
2. Die Umkehrabbildung  $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ , die **Arkuskotangens** genannt wird, ist in jedem Punkt  $y \in \mathbb{R}$  differenzierbar und gilt

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccot}(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

## 8.1. DIFFERENZIERBARKEIT: ERSTE EIGENSCHAFTEN UND BEISPIELE

3. Aus diesen Formeln erhalten wir, dass

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) + \frac{d}{dy} \operatorname{arccot}(y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Finden Sie einen geometrischen Grund für die obige Gleichheit.

Mit dieser Übung haben Sie bewiesen, dass

Der Arkuskotangens  $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  ist in jedem Punkt  $y \in \mathbb{R}$  differenzierbar, mit Ableitung gegeben durch

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccos}(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$



Wir schließen dieses Kapitel mit einer natürlicher Definition:

### Definition 8.1.3

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die differenzierbar in  $I$  ist. Nehmen wir an, dass  $f': I \rightarrow \mathbb{R}$  wieder differenzierbar in  $I$  ist. Dann heißt  $f$  *zweimal differenzierbar* und die Funktion

$$f'': I \rightarrow \mathbb{R} \quad f''(x) := (f')'(x)$$

wird **zweite Ableitung** genannt.

Mit einer induktiven Argumentation können alle höheren Ableitungen definiert werden, nämlich: Gegeben  $n \in \mathbb{N}$ , definieren wir  $f^{(0)} := f$ . Dann nehmen wir an, dass  $f^{(n-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert wird und dass sie differenzierbar in  $I$  ist. Dann definiert man

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})',$$

die  $n$ -te Ableitung genannt wird.

Gegeben  $I$  offenes Intervall und eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $f^{(k)}: I \rightarrow \mathbb{R}$  existiert für alle  $0 \leq k \leq n$ , sagen wir, dass  $f$   **$n$ -Mal differenzierbar** in  $I$  ist. Falls alle höheren Ableitungen existieren, dann sagen wir, dass  $f$  **unendlich oft differenzierbar** ist.

### Beispiel 8.1.5

Die Exponentialfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  ist unendlich oft differenzierbar, mit höheren Ableitungen gegeben durch  $f^{(n)}(x) = e^x$ .



**Übung 8.1.1** 1. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Potenzfunktion  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Beweisen Sie (mit Induktion), dass sie unendlich oft differenzierbar ist mit höheren Ableitungen gegeben durch

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & \text{für alle } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{für alle } k > n. \end{cases}$$

2. Beweisen Sie, dass die Sinus- und Kosinusfunktion unendlich oft differenzierbar sind, und finden Sie eine Formel für ihre höheren Ableitungen.
3. Es seien  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind. Beweisen Sie die folgende Formel (die **Leibnizsche Regel** genannt wird):

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}. \quad (8.1.10)$$



Gegeben ein offenes Intervall  $I$ , wird die Menge aller Funktionen  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $n$ -Mal differenzierbar sind und sodass die  $n$ -te Ableitung stetig ist, mit  $C^n(I, \mathbb{R})$  bezeichnet, für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Menge der Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind, wird mit  $C^\infty(I, \mathbb{R})$  bezeichnet. Wir bemerken, dass falls  $f^{(k)}$  existiert, impliziert Satz 8.1.2, dass  $f^{(k-1)}$  stetig ist, für alle  $k \geq 1$ . Dazu bemerken wir, dass alle Ableitungen einer Funktion in  $C^\infty(I, \mathbb{R})$  stetig sind. Deshalb sind die Mengen  $C^{(n)}(I, \mathbb{R})$  in Zusammenhang gebracht:

$$C^0(I, \mathbb{R}) \supseteq C^1(I, \mathbb{R}) \supseteq C^2(I, \mathbb{R}) \supseteq \cdots \supseteq C^\infty(I, \mathbb{R}).$$

## 8.2 Funktionseigenschaften und Ableitungen

In diesem sehr wichtigen Abschnitt wollen wir einige Funktionseigenschaften, wie zum Beispiel die Monotonie, die Existenz der (lokalen) Maxima und Minima mit der Ableitung in Verbindung bringen.

### 8.2.1 Erste Ableitung, Extrema und Monotonie

In Definition 5.5.1 haben wir schon globale Maxima und Minima einer Funktion definiert. Wir wiederholen ihre Definition in diesem Zusammenhang und definieren lokale Maxima und Minima.

#### Definition 8.2.1

Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{R}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in I$ .

- $x_0$  ist ein **globales Maximum** von  $f$  in  $I$ , falls  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in I$ ;
- $x_0$  ist ein **globales Minimum** von  $f$  in  $I$ , falls  $f(x_0) \leq f(x)$  für alle  $x \in I$ ;
- $x_0$  ist ein **lokales Maximum** von  $f$ , falls eine Umgebung  $U_\delta(x_0)$  existiert, sodass  $f(x_0) \geq f(x)$  für alle  $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ ;
- $x_0$  ist ein **lokales Minimum** von  $f$ , falls eine Umgebung  $U_\delta(x_0)$  existiert, sodass  $f(x_0) \leq f(x)$  für alle  $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ ;

Lokale bzw. globale Maxima oder Minima werden **lokale bzw. globale Extrema** genannt.

Wir wollen nun die Ableitung von  $f$  (wenn sie existiert) benutzen, um Informationen über die Extrema von  $f$  zu erhalten. Eine erste wichtige Bemerkung ist, dass die Ableitung als Grenzwert für  $x \rightarrow x_0$  definiert wurde. Dehalb kann uns die Ableitung nur Informationen geben für Punkte, die *Häufungspunkte* für  $I$  sind. Falls  $x_0$  ein innerer Punkt von  $I$  ist, dann ist er sicher ein Häufungspunkt und die Ableitung kann definiert werden. Im nächsten Satz werden wir dann das Verhalten der Ableitung analysieren, für Extrema, die innere Punkte sind.

### Satz 8.2.1

(*Satz von Fermat*) Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und nehmen wir an, dass  $x_0$  ein Extremum ist. Wenn

(i)  $x_0$  ein innerer Punkt von  $I$  ist und

(ii)  $f'(x_0)$  existiert,

dann muss  $f'(x_0) = 0$  sein.

Die intuitive geometrische Idee ist die Folgende: Falls  $x_0$  ein inneres Extremum ist und falls die Tangente von  $f$  in  $x_0$  existiert, dann muss die Tangente horizontal sein, siehe Abbildung 8.2.1.

Bevor wir den Satz beweisen, machen wir ein paar Bemerkungen.

**Bemerkung 8.2.1** • Angenommen, dass  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist und dass  $x_0$  ein innerer Punkt ist, ist die Bedingung, dass  $f'(x_0) = 0$ , nur eine *notwendige Bedingung*. Zum Beispiel, gegeben  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , kann es einfach gesehen werden, dass  $f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$  ist, und dass alle Punkte in  $\mathbb{R}$  innere Punkte sind. Dann suchen wir eine Lösung von  $f'(x) = 0$  und, da  $f'(x) = 3x^2$ , finden wir  $f'(x) = 0 \iff x = 0$ . Aber 0 ist kein Extremum von  $f$ , weil  $f(x) > 0$  für  $x > 0$  und  $f(x) < 0$  für  $x < 0$ . Diese Funktion hat

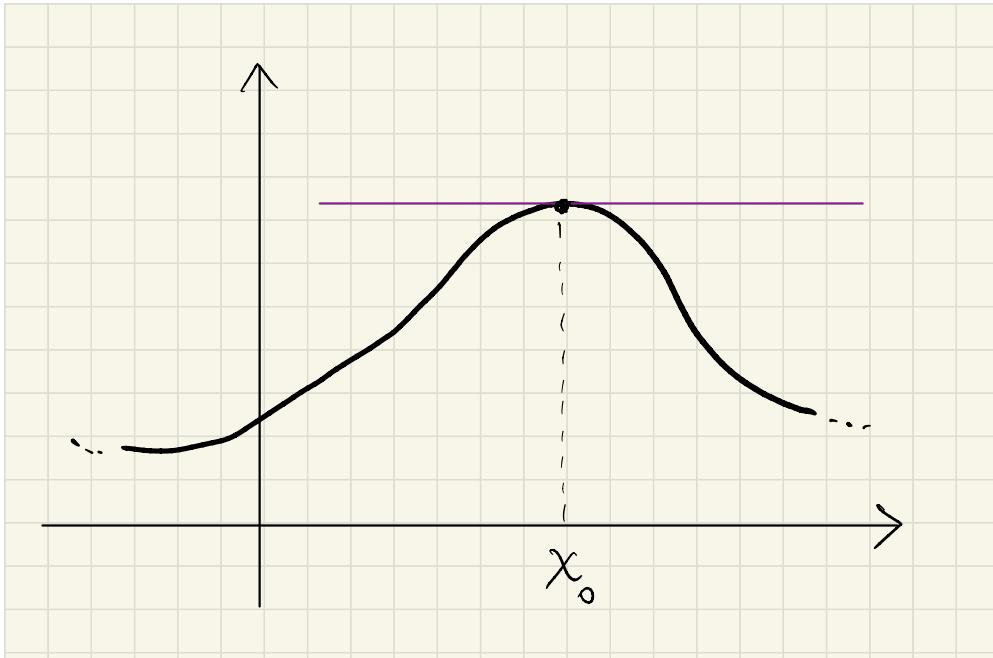


Figure 8.2.1

in der Tat keine Extrema, da sie in  $\mathbb{R}$  definiert wird, und sie streng monoton wachsend ist.

Also: falls wir alle Punkte mit Ableitung 0 finden, müssen wir noch irgendwie verstehen, ob sie Extrema sind oder nicht.

- Der Satz kann nicht benutzt werden für Punkte, die keine inneren Punkte sind, oder für Punkte, wo die Funktion nicht differenzierbar ist. Diese zwei Fälle müssen ohne Hilfe der Ableitung betrachtet werden.

◊

Für den Beweis brauchen wir die Formalisierung einiger Konzepte, die wir schon irgendwie gesehen haben:

Es sei  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $I$ . Der **linksseitige Grenzwert** (bzw. **rechtsseitige Grenzwert**) von  $h$  für  $x \rightarrow x_0$  wird mit  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x)$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x)$ ) bezeichnet und so definiert:

Wir schreiben, dass  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = l \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = l \in \mathbb{R}$ ) falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I \text{ ist } |f(x) - l| < \epsilon$$

(bzw. falls

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I \text{ ist } |f(x) - l| < \epsilon )$$

Ähnliche Konzepte können für den Fall  $l = +\infty$  oder  $l = -\infty$  eingeführt werden (Sie können versuchen die rigorosen Definitionen zu geben.) Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen, und der Beweis ist für Sie eine **Übung**:

**Lemma 8.2.2**

Es sei  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dann existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$  genau dann, wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x)$  existieren und sie gleich sind. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x).$$

Mit Lemma 4.1.4 und Satz 5.3.2 oder direkt aus den Definitionen der (linksseitigen/rechtsseitigen) Grenzwerte, ist der Beweis des folgenden Satzes unkompliziert:

**Satz 8.2.3**

Es sei  $h, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen und  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $I$ .

- Nehmen wir an, dass die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existieren. Falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$h(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad \text{dann ist } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

- Nehmen wir an, dass die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$ ) existieren. Falls ein  $\delta > 0$  existiert, so dass

$$h(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{dann ist } \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$$

(bzw. falls ein  $\delta > 0$  existiert, sodass

$$h(x) \leq g(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad \text{dann ist } \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x).)$$

*Beweis (des Satzes 8.2.1):* Es sei  $x_0$  ein Extremum, das innerer Punkt von  $I$  ist, und wobei die Ableitung existiert. Wir nehmen an, dass  $x_0$  ein lokales oder globales Maximum ist (der Fall, in dem  $x_0$  ein lokales oder globales Minimum ist, ist ganz ähnlich). Wir bemerken zuerst, dass jedes globale Extremum auch ein lokales Extremum ist, und dass die Behauptung " $f'(x_0) = 0$ " eine "lokale Behauptung" ist, nämlich: Um zu verstehen, ob die Ableitung von  $f$  in  $x_0$  gleich Null ist, genügt es, die Funktion  $f$  nur in einer Umgebung von  $x_0$  zu berücksichtigen. Dann nehmen wir eine Umgebung  $U$  von  $x_0$ , die erfüllt:

- $f(x) \leq f(x_0)$  für alle  $x \in U \subseteq I$ .

Es sei

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{für } x \in U \setminus \{x_0\},$$

wobei  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , für ein  $\delta > 0$ . Dann haben wir, dass  $f(x) - f(x_0) \leq 0$  in  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , aber natürlich  $x - x_0 \leq 0$  für  $x \leq x_0$  und  $x - x_0 \geq 0$  für  $x \geq x_0$ . Deshalb ist

$$g(x) \geq 0 \quad \text{für } x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \text{und} \quad g(x) \leq 0 \quad \text{für } x \in (x_0, x_0 + \delta). \quad (8.2.1)$$

Aus Satz 8.2.3 und (8.2.1) erhalten wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \leq 0. \quad (8.2.2)$$

Da wir angenommen haben, dass  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, muss der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existieren und aus Lemma 8.2.2 muss deshalb gelten, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(8.2.2)}{\geq} 0 \quad (8.2.3)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{(8.2.2)}{\leq} 0 \quad (8.2.4)$$

und deshalb erhalten wir, dass  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ .  $\square$

### Bemerkung 8.2.2

Was ist die geometrische Bedeutung von (8.2.1)? Sie bedeutet, dass falls  $x_0$  ein lokales Maximum ist, dann ist die Steigung der Geraden durch  $P = (x, f(x))$  und  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  größer oder gleich Null, falls  $x \leq x_0$  und kleiner oder gleich Null, falls  $x \geq x_0$ , wobei  $x$  in  $U$  liegt. Deshalb muss die Steigung der “Grenz-geraden”, die Tangente in  $P_0$ , Null sein. Siehe Abbildung 8.2.2  $\diamond$

### Definition 8.2.2

Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in I$  ein innerer Punkt von  $I$ . Nehmen wir an, dass  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist, und dass  $f'(x_0) = 0$ . Dann wird  $x_0$  ein **kritischer** oder **stationärer Punkt** von  $f$  genannt.

Der Satz von Fermat (Satz 8.2.1) kann so umformuliert werden:

*Jedes Extremum, das innerer Punkt ist und in dem  $f$  differenzierbar ist, ist ein kritischer Punkt.*

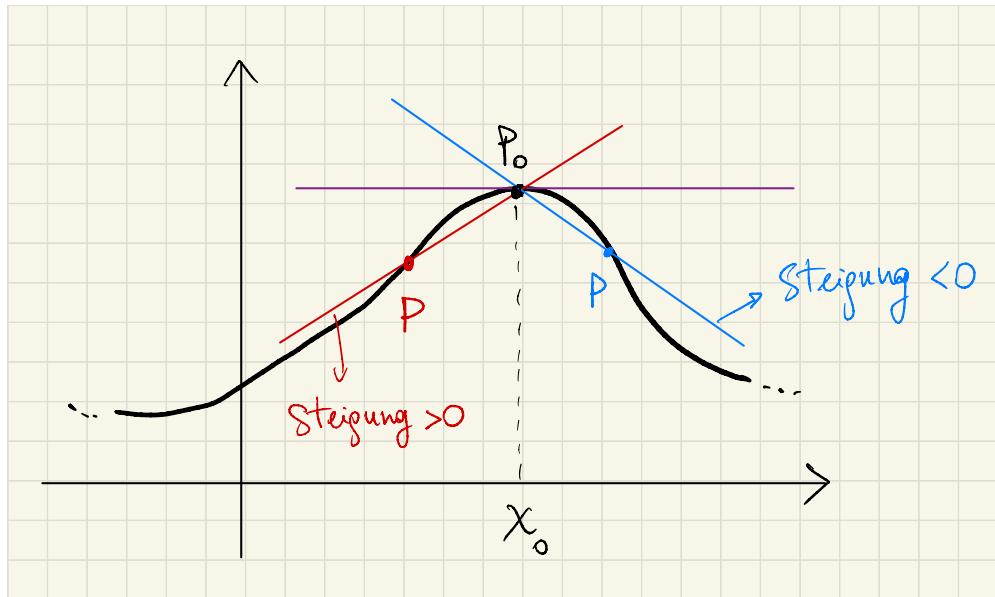


Figure 8.2.2

Wie schon bemerkt, ist nicht jeder kritische Punkt ein Extremum.

Die Suche nach kritischen Punkten einer Funktion (was einer der grundlegenden Schritte für die Suche nach ihren Extremen ist) kann kompliziert sein, da die Gleichung  $f'(x) = 0$  gelöst werden muss. Wenn zum Beispiel  $f(x)$  ein Polynom in  $x$  von sehr hohem Grad ist, ist  $f'(x)$  auch ein Polynom in  $x$  von hohem Grad, und daher können wir nicht hoffen, eine explizite Lösung von  $f'(x) = 0$  zu erhalten.

Der nächste wichtige Satz gibt uns Bedingungen, die, wenn sie durch die Funktion  $f$  erfüllt sind, die Existenz eines kritischen Punktes sicherstellen.

#### Satz 8.2.4

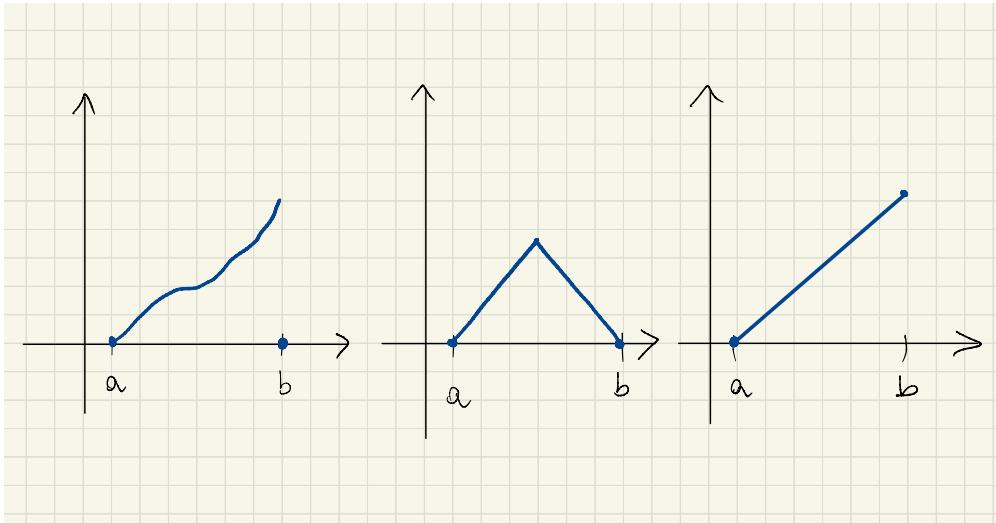
(*Satz von Rolle*)

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig;
- (ii)  $f$  ist differenzierbar in  $(a, b)$ ;
- (iv)  $f(a) = f(b)$ .

Dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , sodass  $f'(c) = 0$ .

Wenn eine der oben genannten Bedingungen nicht erfüllt ist, ist die Behauptung möglicherweise nicht wahr, siehe die folgenden Abbildungen:



*Beweis:* Da  $[a, b]$  kompakt ist, impliziert Korollar 5.5.2 dass  $f$  ein (globales) Maximum  $M = f(x_M)$  und ein (globales) Minimum  $m = f(x_m)$  hat. Dann haben wir zwei Fälle:

1. Falls  $m = M$ , dann muss  $f$  konstant sein, und deshalb ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .
2. Falls  $m < M$ , dann muss entweder  $x_m$  oder  $x_M$  ein innerer Punkt sein und in diesem Fall folgt die Behauptung aus dem Satz von Fermat (Satz 8.2.1).

□

Dieser wichtige Satz hat grundlegende Konsequenzen, und zwar

### Satz 8.2.5

(**Satz von Cauchy - Der Mittelwertsatz I**) Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i)  $f$  und  $g$  sind stetig in  $[a, b]$ ;
- (ii)  $f$  und  $g$  sind differenzierbar in  $(a, b)$ .

Dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , sodass

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \quad (8.2.5)$$

*Beweis:* Es sei  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $h(x) := [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$ . Dann ist  $h$  in  $[a, b]$  stetig (Satz 5.2.2) und in  $(a, b)$  differenzierbar (Satz 8.1.3). Dazu

liegt eine einfache Berechnung zu schließen, dass  $h(a) = h(b)$ . Der Satz von Rolle (Satz 8.2.4) erlaubt uns zu schließen, dass ein  $c \in (a, b)$  existiert, in dem  $h'(c) = 0$ . Aber  $h'(c)$  ist genau  $[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c)$ .  $\square$

### Bemerkung 8.2.3

Nehmen wir an, dass  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Dann muss  $g(a) \neq g(b)$  sein: dies ist eine Folgerung aus dem Satz von Rolle. In diesem Fall können wir Satz 8.2.5 so umschreiben:

Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i)  $f$  und  $g$  sind stetig in  $[a, b]$ ;
- (ii)  $f$  und  $g$  sind differenzierbar in  $(a, b)$ ;
- (iii)  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ .

Dann existiert ein  $c \in (a, b)$ , sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (8.2.6)$$

$\diamond$

Nun eine Folgerung des Mittelwertsatzes I:

### Satz 8.2.6

(*Satz von Lagrange - Mittelwertsatz II*)

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

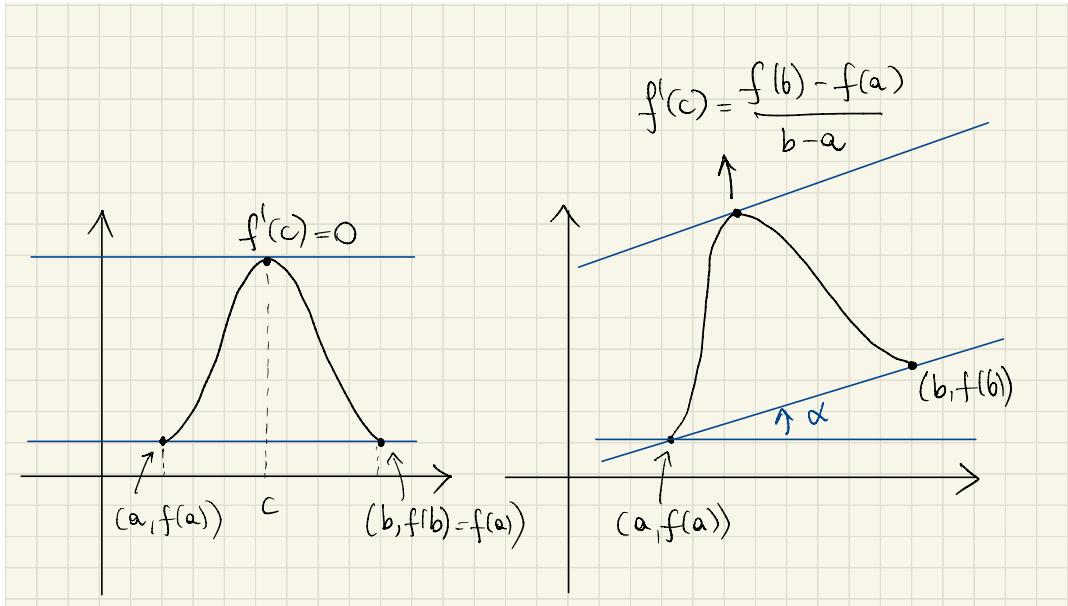
- (i)  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig;
- (ii)  $f$  ist differenzierbar in  $(a, b)$ .

Dann gibt es ein  $c \in (a, b)$ , sodass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (8.2.7)$$

*Beweis:* Es genügt die Funktion  $g(x) = x$  in (8.2.6) zu nehmen, die offensichtlich die erforderlichen Bedingungen erfüllt.  $\square$

Aus der folgenden Abbildung geht hervor, dass der Satz von Lagrange kein anderer ist als der Satz von Rolle, bei dem eine Drehung eines Winkels  $\alpha$  auf den Graphen von  $f$  angewendet wurde, so dass  $\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , siehe diese Abbildung:



Nun werden wir einige Konsequenzen dieser wichtigen Sätze ansehen.  
Wir beginnen mit dem folgenden Korollar:

**Korollar 8.2.7**

*Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die differenzierbar in  $(a, b)$  ist.*

1.  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  monoton wachsend;
2.  $f'(x) \leq 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  monoton fallend;
3.  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b) \implies f$  streng monoton wachsend;
4.  $f'(x) < 0$  für alle  $x \in (a, b) \implies f$  streng monoton fallend;
5.  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b) \iff f$  konstant in  $(a, b)$  ist.

*Beweis:* 1. Nehmen wir an, dass  $f$  monoton wachsend ist. Dann ist die Funktion  $g: (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

immer größer oder gleich Null. Deshalb muss

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

größer oder gleich Null sein (Satz 8.2.3).

Nun nehmen wir an, dass  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Es sei  $x, y \in (a, b)$  mit  $x < y$ ; wir müssen beweisen, dass  $f(x) \leq f(y)$ . Die Einschränkung der Funktion  $f$  auf  $[x, y]$  erfüllt die Hypothesen des Satzes von Lagrange (Satz 8.2.6), und deshalb können wir ein  $c \in (x, y)$  finden, sodass

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Da, nach Voraussetzung,  $f'(c) \geq 0$  ist, und da  $y - x > 0$ , erhalten wir, dass  $f(y) \geq f(x)$ . Wir bemerken, dass  $x$  und  $y$  beliebig sind, und deshalb ist  $f$  monoton wachsend in  $(a, b)$ .

2. Der Beweis von 2. ist sehr ähnlich, und bleibt dem Leser überlassen.
3. Der Beweis dieses Punktes ist eine Adaptierung der ähnlichen Implikation in 1. (im obigen Beweis impliziert  $f'(c) > 0$ , dass  $f(y) - f(x) > 0$ ).
4. Der Beweis bleibt dem Leser überlassen.
5. Eine Richtung ist klar: falls  $f$  konstant ist, dann ist  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . In der anderen Richtung müssen wir nochmal den Satz von Lagrange (Satz 8.2.6) benutzen: Es seien  $x, y$  beliebige Punkte in  $(a, b)$ . Dann erfüllt die Einschränkung von  $f$  auf  $[x, y]$  die Hypothesen des Satzes von Lagrange im Intervall  $[x, y]$ . In der Tat, da  $f$  differenzierbar in  $(a, b)$  ist, ist sie auch stetig in  $(a, b)$ , und deshalb stetig in  $[x, y]$ , und natürlich differenzierbar in  $(x, y)$ . Also gibt es ein  $c \in (x, y)$ , sodass

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Da, nach Voraussetzung,  $f'(c) = 0$  ist für alle  $c \in (a, b)$ , schließen wir, dass  $f(x) = f(y)$ . Da  $x$  und  $y$  beliebig sind, haben wir die Behauptung bewiesen.

□

#### Bemerkung 8.2.4

Wir haben in 3. gesagt, dass  $f'(x) > 0$  für alle  $x$  impliziert, dass  $f$  streng monoton wachsend ist. Ist die umgekehrte Richtung war? Also, falls  $f$  streng monoton wachsend ist, ist  $f'(x) > 0$  für alle  $x$ ? Nein!! Ein Gegenbeispiel ist durch  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , gegeben: diese Funktion ist streng monoton wachsend, aber  $f'(0) = 0$ . Was ist also falsch an einer möglichen Anpassung des Beweises von 1.? Warum kann dieser Beweis nicht adaptiert werden? Was *nicht wahr* ist, ist, dass wenn  $g(x)$  positiv in  $(a, b) \setminus \{x_0\}$  ist, dann ist auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f'(x_0)$  positiv: der Grenzwert einer positiven Funktion ist größer oder gleich Null! ◇

Hier ist ein **Kriterium zur Bestimmung lokaler Extrema**:

**Proposition 8.2.8**

Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $x_0 \in (a, b)$  mit  $f'(x_0) = 0$ . Wenn eine Umgebung  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  von  $x_0$  existiert, so dass  $f'(x) \geq 0$  (bzw.  $f'(x) \leq 0$ ) für alle  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  und  $f'(x) \leq 0$  (bzw.  $f'(x) \geq 0$ ) für alle  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , dann ist  $x_0$  ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum).

Mit anderen Worten: Wenn  $x_0$  ein Punkt ist, an dem die Ableitung das Vorzeichen ändert, dann ist es ein lokales Extremum.

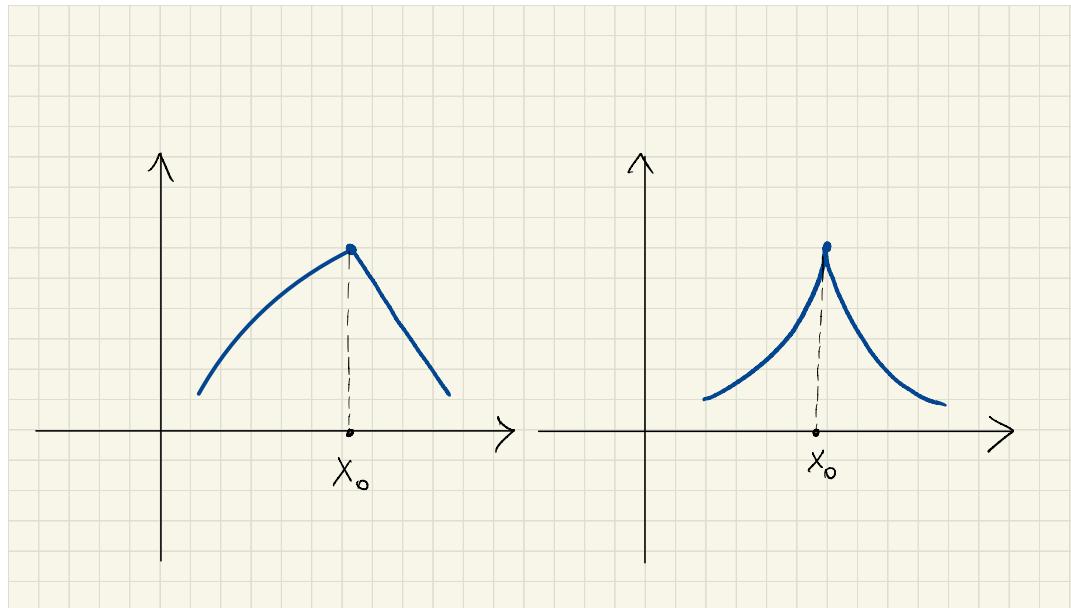
*Beweis:* Der Beweis ist für Sie eine **Übung**. □

**Übung 8.2.1**

Verallgemeinern Sie die vorherige Proposition:

Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion,  $x_0 \in (a, b)$  und nehmen Sie an, dass  $f: (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist. Wenn eine Umgebung  $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  von  $x_0$  existiert, so dass  $f'(x) \geq 0$  (bzw.  $f'(x) \leq 0$ ) für alle  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  und  $f'(x) \leq 0$  (bzw.  $f'(x) \geq 0$ ) für alle  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , dann ist  $x_0$  ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum). ♠

Fälle, in denen die Hypothesen in der Übung auftauchen und nicht die der Proposition 8.2.8 sind in diesen beiden Abbildungen dargestellt:



## 8.3 Taylorapproximation und Taylorpolynome

Das Problem, mit dem wir uns hier befassen werden, besteht darin, eine Funktion (ausreichend oft differenzierbar) mit einem Polynom lokal zu approximieren. Dies bedeutet: Wenn eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, die in  $x_0 \in I$  eine bestimmte Anzahl von Malen differenziert werden kann, suchen wir nach einem Polynom  $P(x)$ , so dass in einer Umgebung von  $x_0$  die Differenz zwischen  $f$  und  $P$  ausreichend klein ist. Wir wollen natürlich diese Konzept formalisieren, und beginnen wir dazu mit einer neuen Notation und einem Beispiel.

In diesem Abschnitt wird die folgende Notation sehr nützlich sein.

### Definition 8.3.1

Es seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen,  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $x_0$  Häufungspunkt für  $I$ .

Es sei  $g(x) \neq 0$  in  $I \setminus \{x_0\}$ . Dann sagen wir, dass

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, \quad \text{wenn} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ähnlich, falls existiert  $N > 0$ , sodass  $g(x) \neq 0$  für alle  $x > N$  (bzw.  $g(x) \neq 0$  für alle  $x < N$ ), dann

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \rightarrow \pm\infty, \quad \text{wenn} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Das Symbol “o” ist ein sogenanntes *Landau-Symbol*, und lautet “klein o”.

Wenn  $f(x) \rightarrow 0$  und  $g(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$  (bzw.  $x \rightarrow \pm\infty$ ), bedeutet  $f(x) = o(g(x))$ , dass “ $f$  schneller als  $g$  gegen Null geht” und daher in Bezug auf  $g$  “vernachlässigbar” ist.

Wenn  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  und  $g(x) \rightarrow \pm\infty$  für  $x \rightarrow x_0$  (bzw.  $x \rightarrow \pm\infty$ ), bedeutet  $f(x) = o(g(x))$ , dass “ $g$  schneller als  $f$  gegen  $\pm\infty$  geht”. Zum Beispiel,

$$f(x) = o(1) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \quad \text{bedeutet, dass} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

und deshalb, dass  $f$  *infinitesimal* für  $x \rightarrow x_0$  ist. Es ist auch einfach zu sehen, dass

$$(x - x_0)^k = o((x - x_0)^h) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, \quad \text{für alle } k > h,$$

und dass

$$\frac{1}{|x - x_0|^h} = o\left(\frac{1}{|x - x_0|^k}\right) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, \quad \text{für alle } k > h.$$

### Übung 8.3.1

Beweisen Sie, dass falls  $f(x) = o((x - x_0)^k)$  für  $x \rightarrow x_0$ , für ein  $k \geq 1$ , dann ist  $f(x) = o((x - x_0)^h)$  für  $x \rightarrow x_0$ , für alle  $0 \leq h \leq k$ . ♠

Dank des Satzes [8.1.1], wenn  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist, können wir sagen, dass

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0), \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Wir können diese Gleichheit so umformulieren: Es sei  $T_1(x)$  das Polynom ersten Grades

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Dann ist

$$f(x) - T_1(x) = o(x - x_0), \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Also ist es nicht nur wahr, dass  $f(x) - T_1(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$ , aber  $\frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$ , die eine “bessere Bedingung ist”, d.h.

$$\frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \implies f(x) - T_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

(Siehe Bemerkung [8.1.2] und Übung [8.3.1]). Auf diese Weise können wir die obigen Konzepte umformulieren:

### Lemma 8.3.1

*Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die in  $x_0 \in I$  differenzierbar ist. Dann gibt es genau ein Polynom ersten Grades  $T_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$ , sodass*

$$f(x) - T_1(x) = o(x - x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \tag{8.3.1}$$

und zwar (8.3.1) gilt genau dann, wenn  $a_0 = f(x_0)$  und  $a_1 = f'(x_0)$ .

*Beweis:* Der Beweis dieses Lemmas sollte eine Übung für Sie sein, aber der Vollständigkeit halber schreiben wir seinen Beweis. (Offensichtlich wird Sie niemand aufhalten, wenn Sie versuchen wollen, das Lemma zu beweisen, bevor Sie diesen Beweis lesen!)

Beweisen wir zunächst, dass  $a_0$  muss  $f(x_0)$  sein. Dank der Übung [8.3.1] (die Sie an dieser Stelle lösen müssen) haben wir, dass  $f(x) - T_1(x) = o(1)$  für  $x \rightarrow x_0$  also, dass  $f(x) - T_1(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow x_0$ . Da  $f$  differenzierbar in  $x_0$  ist, ist sie stetig in  $x_0$  (Satz [8.1.2]) und deshalb

$$0 = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - T_1(x)) = f(x_0) - a_0$$

woraus ableiten wir, dass  $a_0$  muss  $f(x_0)$  sein. Die Existenz, Eindeutigkeit und Definition von  $a_1$  sind genau der Inhalt von Satz [8.1.1].

□

Noch eine Umformulierung des Lemmas [8.3.1]

Unter allen Polynomen ersten Grades, ist  $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  das beste Polynom, das  $f(x)$  in einer Umgebung von  $x_0$  approximiert.

Die Einführung von Taylor-Polynomen wird durch die folgende Frage motiviert: Können wir es besser machen? Das heißt, können wir ein Polynom  $T_k(x)$  finden, sodass

$$f(x) - T_k(x) = o\left((x - x_0)^k\right) \quad \text{für } x \rightarrow x_0, \quad (8.3.2)$$

wobei ist nun  $k > 1$ ?

Wir gehen dann *heuristisch* vor und wollen zuerst die folgende Intuition formalisieren: Da wir versuchen,  $f$  mit einem Polynom zu approximieren, sollte das approximierende Polynom die Funktion selbst sein, wenn  $f$  selbst ein Polynom ist! Also, es sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $f$  ein Polynom  $n$ -ten Grades, das immer in dieser Gestalt geschrieben werden kann (warum?):

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n. \quad (8.3.3)$$

Es sei  $k \in \mathbb{N}$  und definieren wir das Polynom

$$T_k(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^k a_i(x - x_0)^i & \text{falls } k \leq n \\ \sum_{i=0}^n a_i(x - x_0)^i & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

und bemerken wir, dass

$$f(x) - T_k(x) = \begin{cases} \sum_{i=k+1}^n a_i(x - x_0)^i, & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n, \end{cases}$$

und in beiden Fällen gilt  $f(x) - T_k(x) = o\left((x - x_0)^k\right)$  für  $x \rightarrow x_0$ .

### Bemerkung 8.3.1

Warum haben wir nicht direkt  $T_k(x) = f(x)$  genommen? Denn mit dieser Definition ist  $T_k$  das Polynom des Mindestgrades, das (8.3.2) erfüllt, und wir werden bald sehen, dass, wenn  $f$  eine beliebige Funktion ist, je höher  $k$  in (8.3.2) ist, desto mehr Bedingungen für  $f$  erforderlich sein müssen. ◇

Welche Bedeutung haben die Koeffizienten  $a_i$  für  $f$ ? Das heißt, wenn  $f$  durch (8.3.3) gegeben ist, können wir eine neue Interpretation dieser Koeffizienten in Bezug

auf lokale Informationen der Funktion  $f$  finden? Zum Beispiel von ihren Ableitungen? Die Antwort ist ‘‘Ja’’, und ist hier unten gegeben. Wir bemerken zunächst, dass für  $f(x)$  gegeben durch (8.3.3) wir haben

$$\begin{aligned} f(x) &= f^{(0)}(x) = \sum_{h=0}^n a_h(x - x_0)^h & \implies f(x_0) &= a_0 \\ f'(x) &= f^{(1)}(x) = \sum_{h=1}^n h a_h(x - x_0)^{h-1} & \implies f'(x_0) &= 1 \cdot a_1 \\ f''(x) &= f^{(2)}(x) = \sum_{h=2}^n h(h-1)a_h(x - x_0)^{h-2} & \implies f''(x_0) &= 2 \cdot 1 \cdot a_2 \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

### Übung 8.3.2

Beweisen Sie, dass im Allgemeinen gilt

$$f^{(k)}(x) = \sum_{h=k}^n h(h-1)(h-2)\cdots(h-k+1)a_h(x - x_0)^{h-k} \quad (8.3.4)$$

und deshalb, dass

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k. \quad (8.3.5)$$

(*Hinweis:* Induktionsbeweis) ♠

Also, kann ein Polynom  $n$ -ten Grades  $f$  mit Entwicklungspunkt  $x_0$  als

$$f(x) = \sum_{h=0}^n \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h$$

geschrieben werden und das Polynom  $T_k(x)$ , dessen Grad höchstens  $k$  ist, das sich  $f(x)$  in einer Umgebung von  $x_0$  am besten annähert, ist gegeben durch

$$T_k(x) = \sum_{h=0}^k \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h.$$

Wir haben daher ein Polynom  $T_k(x)$  mit Grad höchstens  $k$  gefunden, das sich einem Polynom des Grades  $n$  in einer Umgebung von  $x_0$  mit Restglied  $f(x) - T_k(x)$  annähert, das eine Funktion  $\mathcal{O}((x-x_0)^k)$  ist. Die nächste Definition ist daher von dieser Tatsache inspiriert: Wir definieren unten ein Polynom  $T_k(x)$  für eine Funktion, die bestimmte Eigenschaften erfüllt, und verallgemeinern das, was wir gerade gesehen haben:

**Definition 8.3.2**

Es sei  $I$  ein offenes Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ . Nehmen wir an, dass  $f$   $n$ -mal differenzierbar in  $x_0$  ist, für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Das  **$n$ -te Taylorpolynom** von  $f$  bei  $x_0$  ist definiert durch

$$T_n(x) = \sum_{h=0}^n \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h.$$

Wenn  $x_0 = 0$  wird  $T_n(x)$  auch  **$n$ -te Mac Laurin-Polynom** genannt.

**Definition 8.3.3**

Es seien  $I$  ein offenes Intervall,  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Funktionen und  $x_0 \in I$  ein Punkt, in dem  $f^{(k)}(x_0)$  und  $g^{(k)}(x_0)$  existieren, für alle  $0 \leq k \leq n$ . Dann haben  $f$  und  $g$  eine **Berühring  $n$ -ter Ordnung** in  $x_0$ , falls

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq n.$$

Die folgende Proposition gibt uns eine charakterisierung des Taylorpolynomes von  $f$  bei  $x_0$ :

**Proposition 8.3.2**

Es sei  $I$  ein offenes Intervall,  $x_0 \in I$  und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die  $n$ -Mal differenzierbar in  $x_0$  ist. Dann ist  $T_n(x)$  das einzige Polynom, sodass  $f$  und  $T_n$  eine Berühring  $n$ -ter Ordnung in  $x_0$  haben.

Man könnte auch diese Proposition benutzen, um das  $n$ -te Taylorpolynom zu definieren.

*Beweis:* Der Beweis ist für Sie eine **Übung**. □

Wir haben schon  $C^n(I, \mathbb{R})$  definiert als die Menge der Funktionen, die  $n$ -Mal differenzierbar sind, mit  $n$ -te Ableitung stetig. Wir bemerken, dass der “Ableitungsoperator”  $\frac{d}{dx}$  als eine Abbildung von  $C^n(I, \mathbb{R})$  nach  $C^{n-1}(I, \mathbb{R})$  betrachtet werden kann.

Es sei nun  $\mathbb{R}[x]$  die Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten. Es sei  $x_0 \in I$  ein fester Punkt und definieren wir

$$\mathcal{T}_n: C^n(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]$$

die Abbildung, sodass  $\mathcal{T}_n[f]$  das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  bei  $x_0$  ist, also

$$\mathcal{T}_n[f] := T_n(x) = \sum_{h=0}^n \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} (x - x_0)^h.$$

Dann gelten für  $\mathcal{T}_n$  die folgenden Eigenschaften:

**Proposition 8.3.3**

Es seien  $f, g \in C^n(I, \mathbb{R})$ . Dann

- (i) für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathcal{T}_n(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{T}_n[f] + \beta \mathcal{T}_n[g]$ ;
- (ii)  $\mathcal{T}_{n-1}[\frac{d}{dx}(f)] = \frac{d}{dx}(\mathcal{T}_n[f])$ .

Der Beweis dieser Proposition ist für Sie eine **Übung**.

**Bemerkung 8.3.2**

Eigenschaft (i) kann interpretiert werden, indem gesagt wird, dass die Abbildung  $\mathcal{T}_n$  eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen  $C^n(I, \mathbb{R})$  und  $\mathbb{R}[x]$  ist. ◇

Nun müssen wir verstehen, wie gut die Approximation der Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  ist, wenn wir diese durch ihr Taylorpolynom ersetzen. Natürlich gibt uns die Definition des Taylorpolynomes keine Vorstellung davon, wie gut sich das Polynom  $T_n$  die Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  annähert: wie für die Polynomfunktionen, möchten wir, dass das **Restglied**

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

eine Funktion ist, die  $o((x - x_0)^n)$  für  $x \rightarrow x_0$  ist. Der nächste Satz gibt uns ein Kriterium, um das Restglied abzumessen:

**Satz 8.3.4**

*(Satz von Taylor)*

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die  $n$ -Mal differenzierbar in  $I$  ist. Es sei  $x_0 \in I$ . Dann

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \quad (\textbf{Peano-Restglied}) \quad (8.3.6)$$

Der Beweis dieses Satzes braucht zunächst ein Lemma:

**Lemma 8.3.5**

Es sei  $f: [x_0, z] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die in  $(x_0, z)$  differenzierbar ist. Es sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Dann gibt es für jedes  $x \in (x_0, z)$  ein  $\xi = \xi(x)$ , sodass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f'(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}}.$$

*Beweis:* Es sei  $h: [0, (z - x_0)^n] \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $h(y) = x_0 + \sqrt[n]{y}$  und  $g: [0, (z - x_0)^n] \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f \circ h$  (bemerken Sie, dass die Definitionsmenge von  $h$  gewählt wurde, sodass  $f \circ h$  Sinn macht; warum?). Dann ist  $g$  stetig in  $[0, (z - x_0)^n]$ ,

da sie Verknüpfung von stetigen Funktionen ist. Dazu, dank des Satzes [8.1.4], ist  $g$  differenzierbar in  $(0, (z - x_0)^n)$  mit Ableitung  $g'(y)$  gegeben durch

$$g'(y) = f'(h(y))h'(y) = f'(x_0 + \sqrt[n]{y}) \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Es sei dann  $y \in (0, (z - x_0)^n)$  fest und nehmen wir die Funktion  $g$  im Intervall  $[0, y]$ . Da sie die Hypothesen des Satzes von Lagrange erfüllt (Satz [8.2.6]), schließen wir, dass ein  $c \in (0, y)$  existiert, sodass

$$\frac{g(y) - g(0)}{y} = g'(c)$$

oder, mit anderen Worten, dass

$$\frac{f(x_0 + \sqrt[n]{y}) - f(x_0)}{y} = f'(x_0 + \sqrt[n]{c}) \frac{1}{n} c^{\frac{1}{n}-1}.$$

Nun genügt es zu bemerken, dass  $x = h(y) = x_0 + \sqrt[n]{y}$  impliziert, dass  $y = (x - x_0)^n$  und zu setzen  $\xi := x_0 + \sqrt[n]{c}$ , um zu schließen, dass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f'(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}}.$$

□

*Beweis des Satzes [8.3.4].* Wir nehmen an, dass  $x > x_0$ . Der Beweis des Falles  $x < x_0$  ist für Sie eine Übung (Sie müssen nur diesen Beweis zu diesem zweiten Fall adaptieren).

Im Folgenden werden wir verwenden, dass  $f$  und  $T_n$  eine Berührungs  $n$ -ter Ordnung in  $x_0$  haben, also, dass  $f^{(k)}(x_0) - T_n^{(k)}(x_0) = 0$  für alle  $0 \leq k \leq n$ .

Wir benutzen Lemma [8.3.5] für die Funktion  $f - T_n: [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$  (die die Hypothesen des Lemmas erfüllt). Dann können wir ein  $x_1 \in (x_0, x)$  finden, sodass

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f(x) - T_n(x) - (f(x_0) - T_n(x_0))}{(x - x_0)^n} = \frac{f'(x_1) - T'_n(x_1)}{n(x_1 - x_0)^{n-1}}. \quad (8.3.7)$$

Falls  $n > 1$  wiederholen wir dasselbe Verfahren für die Funktion  $f' - T'_n: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nochmal die Hypothesen des Lemmas [8.3.5] erfüllt, und finden  $x_2 \in (x_0, x_1)$ , sodass

$$\frac{f'(x_1) - T'_n(x_1)}{(x_1 - x_0)^{n-1}} = \frac{f'(x_1) - T'_n(x_1) - (f'(x_0) - T'_n(x_0))}{(x_1 - x_0)^{n-1}} = \frac{f''(x_2) - T''_n(x_2)}{(n-1)(x_2 - x_0)^{n-2}}. \quad (8.3.8)$$

Mit der Hilfe von (8.3.7) und (8.3.8) können wir schließen, dass falls  $f$  mindestens zwei Mal differenzierbar ist, ist

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{f''(x_2) - T''_n(x_2)}{(x_2 - x_0)^{n-2}}.$$

Mit der Wiederholung des gleichen Verfahrens (oder genauer gesagt durch Induktion) wird es bewiesen, dass falls  $f$  mindestens  $(n-1)$ -Mal differenzierbar ist, dann existieren  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , sodass  $x_0 < x_{n-1} < x_{n-2} < \dots < x_1 < x$  und

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n(n-1)\cdots 2} \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - T_n^{(n-1)}(x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_0)}. \quad (8.3.9)$$

Es ist nun für Sie eine Übung zu beweisen, dass

$$T_n^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)$$

und deshalb erhalten wir aus (8.3.9), dass

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - (f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x_{n-1} - x_0))}{(x_{n-1} - x_0)}. \quad (8.3.10)$$

Bis jetzt haben wir nur benutzt, dass  $f$   $(n-1)$ -Mal differenzierbar in  $I$  ist. Nun benutzen wir, dass  $f$  in der Tat  $n$ -Mal differenzierbar ist. Wir bemerken zuerst, dass  $x_i$  eine Funktion von  $x$  ist für alle  $i = 1, \dots, n-1$ , und dass  $x_i(x) \rightarrow x_0$  falls  $x \rightarrow x_0$  (weil  $x_0 < x_i < x$  für alle  $i = 1, \dots, n-1$ ). Dazu impliziert die Differenzierbarkeit von  $f^{(n-1)}$  in  $x_0$  und Satz 8.1.1, dass

$$\lim_{x_{n-1} \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - (f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x_{n-1} - x_0))}{(x_{n-1} - x_0)} = 0.$$

Deshalb, da  $x_{n-1}(x) \rightarrow x_0$  für  $x \rightarrow x_0$ , erlaubt uns Satz 5.3.4 zusammen mit dem obigen Grenzwert und (8.3.10) zu schließen, dass

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x_{n-1} \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - (f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x_{n-1} - x_0))}{(x_{n-1} - x_0)} = 0.$$

(**Übung:** Prüfen Sie nach, dass die Hypothesen des Satzes 5.3.4 erfüllt sind, und dass er den obigen Grenzwert impliziert.)

Wir haben dann bewiesen, dass

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

□

Der Satz von Taylor gibt uns eine qualitative Schätzung des Restgliedes. Der folgende Satz gibt uns eine Schätzung, die quantitativ ist.

**Satz 8.3.6**

Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die  $(n+1)$ -Mal differenzierbar ist und  $x_0 \in (a, b)$ . Dann für alle  $x \in (a, b)$ , gibt es ein  $c$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\textbf{Lagrange-Restglied}) \quad (8.3.11)$$

*Beweis:* Nehmen wir an, dass  $x_0 < x$  (der andere Fall wird ähnlich betrachtet). Wir definieren die Funktion  $F: [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$F(t) := f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Da  $f$   $(n+1)$ -Mal differenzierbar ist, aus Satz 8.1.2 sind die Ableitungen  $f^{(k)}$  stetig in  $[x_0, x]$ , für alle  $k$ , sodass  $0 \leq k \leq n$ . Diese Tatsache impliziert, dass  $F$  stetig in  $[x_0, x]$  ist. Dazu ist  $F$  differenzierbar in  $(x_0, x)$ .

Es sei nun  $G: [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die differenzierbar in  $(x_0, x)$  ist, und sodass  $G'(t) \neq 0$  für alle  $t \in (x_0, x)$ . Dann können wir die Umformulierung des Satzes von Cauchy benutzen (siehe 8.2.6), um zu schließen, dass ein  $c \in (x_0, x)$  existiert, sodass

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}.$$

Nun bemerken wir, dass  $F(x)$  genau  $f(x)$  ist, und dass  $F(x_0)$  genau  $T_n(x)$  ist, also

$$F(x) - F(x_0) = f(x) - T_n(x) = R_n(x).$$

Wir berechnen  $F'(t)$ : Es ist einfach zu sehen (**Übung** für Sie), dass  $F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$  und deshalb, aus den obigen zwei Gleichheiten,

$$R_n(x) = F(x) - F(x_0) = \frac{F'(c)}{G'(c)}(G(x) - G(x_0)) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \frac{G(x) - G(x_0)}{G'(c)}. \quad (8.3.12)$$

Nun genügt es die Funktion  $G$  als  $G(t) = (x-t)^{n+1}$  zu definieren. Sie erfüllt  $G(x) = 0$ ,  $G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$  und  $G'(t) = -(n+1)(x-t)^n$  und deshalb sind die Voraussetzungen, die wir für  $G$  angefordert haben, erfüllt. Dann aus 8.3.12 erhalten wir, dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

□

Es ist Zeit, viele Beispiele zu sehen:

**Beispiel 8.3.1** 1. Es sei  $f(x) = e^x$ . Dann ist  $f$  unendlich oft differenzierbar, und deshalb können wir  $T_n(x)$  für eine beliebige  $n \in \mathbb{N}$  berechnen.

Da  $f^{(k)}(x) = f(x) = e^x$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und daher  $f^{(k)}(0) = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , ist das  $n$ -te Taylorpolynom  $T_n(x) = \mathcal{T}_n[e^x]$  bei  $x_0 = 0$  gegeben durch

$$\mathcal{T}_n[e^x] = T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Nach dem Satz von Taylor (Satz 8.3.4) erhalten wir, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  (warum?) gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \quad (8.3.13)$$

2. Es sei  $f(x) = \sin(x)$ , die auch unendlich oft differenzierbar ist. Wir bemerken, dass

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x),$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \quad f^{(5)}(x) = \cos(x) \quad \dots$$

und deshalb, dass  $f^{(n+4k)}(x) = f^{(n)}(x)$ , für alle  $n, k \in \mathbb{N}$ . Insbesondere, für  $x_0 = 0$ , gilt  $f^{(2k)}(0) = 0$  und  $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ . Wir haben endlich, dass

$$\mathcal{T}_{2n+1}[\sin(x)] = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Da alle geraden Ableitungen bei 0 verschwinden, haben wir, dass  $T_{2n+2}(x) = T_{2n+1}(x)$  und deshalb gibt uns der Satz von Taylor, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  (warum?)

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \quad (8.3.14)$$

3. Es ist für Sie eine **Übung** zu zeigen, dass für die Funktion  $f(x) = \cos(x)$  gilt  $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$  und  $f^{(2k+1)}(0) = 0$ , und deshalb ist das Taylorpolynom bei  $x_0 = 0$  gegeben durch

$$\mathcal{T}_{2n}[\cos(x)] = T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = T_{2n+1}(x).$$

Dazu gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \quad (8.3.15)$$

Bemerken Sie, dass das Taylorpolynom der Funktion Kosinus auch mit der Hilfe der Proposition 8.3.3 (ii) und mit dem Taylorpolynom der Funktion Sinus berechnet werden könnte.

4. Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $f(x) = \log(1+x)$ , wobei  $I = (-1, +\infty)$ . Dann bemerken wir zunächst, dass  $f$  unendlich oft differenzierbar in  $I$  ist, da sie die Verknüpfung von Funktionen ist, die in ihren Definitionsmengen unendlich oft differenzierbar sind. Dazu ist

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}, \dots$$

Durch Induktion kann es dann bewiesen werden, dass für alle  $k \geq 1$  gilt

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)! \frac{1}{(1+x)^k} \quad \text{und deshalb} \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$$

und natürlich ist  $f(0) = \log(1) = 0$ . Wir schließen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{T}_n[\log(1+x)] = T_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

und dass

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \quad (8.3.16)$$

Mit der Hilfe von Proposition 8.3.3 (ii) können wir das Taylorpolynom der Funktion  $g(x) = \frac{1}{1+x}$  bei  $x_0 = 0$  berechnen. In der Tat, da  $g(x) = \frac{d}{dx} \log(x)$ , ist

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n\left[\frac{1}{1+x}\right] &= \mathcal{T}_n\left[\frac{d}{dx} \log(x)\right] = \frac{d}{dx}(\mathcal{T}_{n+1}[\log(x)]) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \end{aligned}$$



Mit demselben Verfahren können Sie die folgende Übung lösen:

**Übung 8.3.3**

Finden Sie das Taylorpolynom der Funktionen  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^h}$  bei  $x_0 = 0$ , für alle  $h \in \mathbb{N}$ . ♠

Die folgende Proposition (ohne Beweis) kann benutzt werden, um viele Taylorpolynome zu berechnen und ist eine Verallgemeinerung des Lemmas 8.3.1.

**Proposition 8.3.7**

Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die  $n$ -Mal differenzierbar in  $(a, b)$  ist. Dann ist das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  bei  $x_0$  das einzige Polynom  $T(x)$ , das höchstens Grad  $n$  hat, das die folgende Gleichheit erfüllt:

$$f(x) = T(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad (8.3.17)$$

Bevor wir mehr Beispiele sehen, sollten Sie die folgende Übung lösen:

**Übung 8.3.4**

Prüfen Sie nach, dass das Landau-Symbol "o" für  $x \rightarrow 0$  die folgenden Eigenschaften erfüllt: Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$

1.  $\text{o}(x^n) + \text{o}(x^n) = \text{o}(x^n);$
2.  $\text{o}(x^n) + \text{o}(x^m) = \text{o}(x^n)$  für alle  $m > n;$
3.  $a \cdot \text{o}(x^n) = \text{o}(a \cdot x^n) = \text{o}(x^n)$ , wobei  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$
4.  $\text{o}(x^n) - \text{o}(x^n) = \text{o}(x^n);$
5.  $x^m \cdot \text{o}(x^n) = \text{o}(x^{n+m})$
6.  $\text{o}(x^n) \cdot \text{o}(x^m) = \text{o}(x^{n+m});$
7.  $\text{o}(\text{o}(x^n)) = \text{o}(x^n);$
8.  $\text{o}(x^n + \text{o}(x^n)) = \text{o}(x^n).$

Diese Übung kann adaptiert werden, um die ähnlichen Eigenschaften für das Landau-Symbol  $\text{o}((x - x_0)^h)$  zu erhalten, für  $x \rightarrow x_0$ . ♠

Mit der Hilfe von Proposition 8.3.7 und Übung 8.3.4 kann die folgende sehr nützliche Proposition bewiesen werden, die uns einfach erlaubt zu erhalten, was das Taylorpolynom von  $f \circ g$  in Bezug auf die Taylorpolynome von  $f$  und  $g$  ist. Nunächst bemerken wir, dass gegeben zwei offene Intervalle  $I$  und  $J$  und zwei  $n$ -Mal differenzierbare Funktionen  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $g(I) \subseteq J$ , dann ist  $f \circ g$   $n$ -Mal differenzierbar. Dies ist eine Folgerung aus dem Satz 8.1.4 und aus der Leibnizschen Regel (8.1.10).

**Proposition 8.3.8**

Es seien  $I$  und  $J$  zwei offene Intervalle und  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f: J \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $n$ -differenzierbare Funktionen, sodass  $g(I) \subseteq J$ . Es sei  $\mathcal{T}_n[f](y)$  das Taylorpolynom von  $f$  bei  $y_0 \in J$  und  $\mathcal{T}_n[g](x)$  das Taylorpolynom von  $g$  bei  $x_0$ , wobei  $y_0 = g(x_0)$ . Dann ist das  $n$ -te Polynom von  $f \circ g$  bei  $x_0$  gegeben durch

$$\mathcal{T}_n[f \circ g](x) = [\mathcal{T}_n[f](\mathcal{T}_n[g](x))]_n$$

wobei, gegeben ein Polynom  $P$ ,  $[P]_n$  die Summe der Polynomglieder bis zum Grad  $n$  bezeichnet.

Also, kürzer gesagt, ist das Taylorpolynom einer Verknüpfung die Trunkierung (bis zum Grad  $n$ ) der Verknüpfung der Taylorpolynome.

**Beispiel 8.3.2** 1. Wir möchten beweisen, dass

$$(\sin x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \quad (8.3.18)$$

Wir wissen schon, dass  $g(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ . Es sei  $f(y) = y^2$  und bemerken wir, dass das  $n$ -te Taylorpolynom von  $f$  genau  $f$  ist, für alle  $n \geq 2$ . Dann ist  $(f \circ g)(x)$  genau  $(\sin x)^2$  und deshalb erhalten wir, dass

$$(\sin x)^2 = \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + (o(x^4))^2 - \frac{x^4}{3} + 2x o(x^4) - \frac{x^3}{3} o(x^4).$$

Nun bemerken wir, dass  $\frac{x^6}{36} = o(x^5)$ ,  $(o(x^4))^2 = o(x^8)$ ,  $2x o(x^4) = o(x^5)$  und  $-\frac{x^3}{3} o(x^4) = o(x^7)$  (siehe Übung 8.3.4) und deshalb ist

$$\frac{x^6}{36} + (o(x^4))^2 + 2x o(x^4) - \frac{x^3}{3} o(x^4) = o(x^5) + o(x^8) + o(x^5) + o(x^7) = o(x^5).$$

(Magie oder Mathe?)

Also können wir schließen, dass (8.3.18) gilt.

2. Wir möchten Zeigen, dass

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \quad (8.3.19)$$

Wir nehmen zunächst die Funktion  $g(x) = e^x$ , für die wissen wir schon, dass  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  für  $x \rightarrow 0$ . Es sei dann  $f(y) = \frac{1}{1+y}$  und einfach erhalten wir, dass  $(f \circ g)(x) = \frac{1}{1+e^x}$ . Wichtig ist es nun zu bemerken, dass für  $x_0 = 0$  ist  $e^{x_0} = 1$ . Deshalb müssen wir die Entwicklung des Taylorpolynoms

der Funktion  $f(y) = \frac{1}{1+y}$  für  $y_0 = 1$ . Gegeben das Taylorpolynom von  $f(y)$  bei  $y_0 = 0$ , nämlich (siehe Beispiel [8.3.1] 4.)

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + o(y^2) \quad \text{für } y \rightarrow 0$$

können wir die Entwicklung von  $f$  bei  $y = 1$  so erhalten: Schreiben

$$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{2 + (y-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{y-1}{2}\right)}$$

und deshalb (erklären Sie sich den Grund, warum diese Implikation gilt)

$$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{y-1}{2} \right) + \left( \frac{y-1}{2} \right)^2 \right] + o((y-1)^2) \quad \text{für } y \rightarrow 1.$$

Also erhalten wir für  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= (f \circ g)(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2} \right) + \left( \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{2} \right)^2 + o(x^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

♣

### 8.3.1 Verwendung von Taylorpolynomen bei der Berechnung von Grenzwerten

Eine nützliche Anwendung des Satzes von Taylor (Satz [8.3.4]) ist durch das folgende Korollar gegeben:

#### Korollar 8.3.9

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $n$ -Mal differenzierbare Funktionen. Es sei  $x_0 \in I$  und nehmen wir an, dass

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{8.3.20}$$

und dass  $g^{(n)}(x_0) \neq 0$  gilt. Dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

*Beweis:* Es seien  $\mathcal{T}_n[f]$  und  $\mathcal{T}_n[g]$  die  $n$ -ten Taylorpolynome für  $f$  und  $g$  bei  $x_0$ . Dann impliziert (8.3.20), dass

$$\mathcal{T}_n[f](x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_n[g](x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

und impliziert Satz 8.3.4, dass

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Deshalb können wir schließen, dass

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n}}{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n}} = \frac{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + 0}{\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + 0} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \end{aligned}$$

□

Die Grenzwerten, die wir bisher berechnen können, sind relativ gering: Abgesehen von denen, die sich aus der Stetigkeit ergeben, haben wir nur wenige wichtige Grenzwerten gezeigt, zum Beispiel die von Proposition 7.3.1 oder, dass  $\frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow 0$ . Aber, wie könnten wir den folgenden Grenzwert berechnen?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4}$$

Dieser Grenzwert ist der Gestalt " $\frac{0}{0}$ ". Dehalb sollte wir verstehen, "wie schnell"  $(\sin x)^2 - \sin(x^2) \rightarrow 0$  geht. Wir können diese Frage so umformulieren: gibt es ein  $n$ , sodass  $(\sin x)^2 - \sin(x^2)$  so schnell wie  $x^n$  gegen Null geht? Die Antwort ist ja,  $n$  muss 4 sein, und wir benutzen den Satz von Taylor, um diese "Geschwindigkeit" zu verstehen.

In der Tat, ist  $(\sin x)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$  (siehe (8.3.18)) und es ist einfach zu sehen (**Übung** für Sie), dass  $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)$ .

Deshalb ist  $(\sin x)^2 - \sin(x^2) = -\frac{x^4}{3} + o(x^5)$  für  $x \rightarrow 0$ , und wir haben

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin(x^2)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{3} + o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$

Warum gilt die letzte Gleichheit? Man sollte beweisen, dass  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^5)}{x^4} = 0$ . Das ist in der Tat so, weil  $o(x^5)$  per definitionem eine Funktion  $g(x)$  ist, sodass  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^5} = 0$ , also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot x}{x^5} = 0.$$

### Übung 8.3.5

Im Allgemeinen beweisen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^m} = 0 \quad \text{für alle } m \leq n.$$



Und jetzt können Sie Spaß haben...

### Übung 8.3.6

Mit der Hilfe der Taylorpolynome beweisen Sie die folgenden Gleichheiten:

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \log(\cos x)}{x^4} = -\frac{1}{8}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{3}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^2} = \frac{1}{2}$$



## 8.3.2 Ein Blick auf die Taylorreihen

Wir haben bereits das Beispiel einer Funktion gesehen, die durch eine Funktionenreihe definiert ist (siehe Beispiel 6.2.1 2.) und zwar

$$\exp(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Wir haben danach bemerkt, dass in der Tat  $\exp(x) = e^x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt (siehe (7.2.6)). Wir bemerken dazu, dass das  $n$ -te Taylorpolynom bei  $x_0 = 0$  für die Funktion  $e^x$  gegeben ist durch  $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  (siehe Beispiel 8.3.1 1.). Also ist im Fall der Exponentialfunktion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (8.3.21)$$

**Definition 8.3.4**

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist. Die **Taylorreihe** von  $f$  um  $x_0$  ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Deshalb ist die Behauptung in [8.3.21], dass die Taylorreihe der Exponentialfunktion genau die Funktion ist, für alle  $x \in \mathbb{R}$ ! Ist es immer der Fall? Natürlich ist die Antwort “Nein”. Beginnen wir mit dem folgenden Beispiel:

Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

des Übungsblattes 10, Hausaufgabe 2.2. Dann ist  $f$  unendlich oft differenzierbar mit Ableitungen  $f^{(n)}(x)$ , die  $f^{(n)}(0) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  erfüllen (warum ist das so? Also, warum ist  $f$  unendlich oft differenzierbar?). Dann ist selbstverständlich die Taylorreihe um  $x_0 = 0$  gegeben durch  $\sum_{n=0}^{+\infty} 0 \cdot x^n = 0$ , aber die Funktion  $f$  ist nicht Null für  $x \neq 0$ . Also ist dies ein Beispiel einer Funktion, deren Taylorreihe um  $x_0$  ungleich die Funktion ist, für alle  $x \neq x_0$  (natürlich gilt es immer, dass die Taylorreihe in Punkt  $x_0$  die Funktion  $f$  in  $x_0$  ist, warum?).

Es gibt auch Beispiele von Funktionen, die unendlich oft differenzierbar in  $I$  sind, aber deren Taylorreihen um einen Punkt  $x_0 \in I$  nur in einer Umgebung von  $x_0$  gegen  $f(x)$  konvergieren. Ein Beispiel ist durch die Funktion  $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{1-x}$  gegeben. In der Tat, aus Beispiel 8.3.1 4. und Proposition 8.3.7 (oder nach direkter Berechnung) haben wir, dass

$$\mathcal{T}_n \left[ \frac{1}{1-x} \right] = \sum_{k=0}^n x^k.$$

Wir sollten in der Tat eine solche Formel erwarten, da wir bereits wissen, dass die Summe der geometrischen Reihen  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  genau  $g(x)$  ist. Aber die Reihe  $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  konvergiert nur für  $|x| < 1$ ! Deshalb macht es nur Sinn zu sagen, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{für alle } |x| < 1.$$

Was ist die allgemeine Theorie der Taylorreihen? Wie im Titel erwähnt, wollen wir nur eine Vorstellung davon geben, was los ist, und wir verschieben die genauere Untersuchung dieser Art von Reihen auf die Vorlesung “Analysis II”. Diese Bemerkungen sind jedoch sehr natürlich:

**Bemerkung 8.3.3** • Damit eine Taylorreihe gegen die entsprechende Funktion in einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  konvergiert, müssen wir haben, dass

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty, \quad \text{für alle } x \in U.$$

- Wie können wir verstehen, wenn  $R_n(x)$  gegen Null konvergiert? In Satz 8.3.6 haben wir eine nützliche “quantitative” Formel für das Restglied (das in diesem Fall “Lagrange Restglied” heißt) gegeben und zwar

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

für ein  $c$  zwischen  $x$  und  $x_0$ . Deshalb sei es  $U$  eine Umgebung von  $x_0$  und  $C_{n+1} \in \mathbb{R}$ , sodass

$$|f^{(n+1)}(c)| \leq C_{n+1} \quad \text{für alle } c \in U$$

und nehmen wir an, dass

$$\frac{C_{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow +\infty, \quad \text{für alle } x \in U. \quad (8.3.22)$$

Dann erhalten wir, dass

$$|f(x) - T_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{C_{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow +\infty, \quad \text{für alle } x \in U.$$

Deshalb konvergiert  $T_n(x)$  gegen  $f(x)$  in  $U$ .

- Unter welchen Bedingungen gilt (8.3.22)? Wir geben ein einfaches Beispiel. Es sei  $U$  eine Umgebung von  $x_0$  und nehmen wir an, dass existieren  $\alpha, C \in \mathbb{R}_{>0}$ , sodass

$$|f^{(n)}(x)| \leq \alpha C^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in U. \quad (8.3.23)$$

Dann gilt (8.3.22). In der Tat gilt, dass

$$|R_n(x)| \leq \alpha \frac{C^{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow +\infty, \quad \text{für alle } x \in U.$$

(Warum konvergiert die Folge auf der rechten Seite gegen Null?). Wir können die obige Argumentation so zusammenfassen:

**Lemma 8.3.10**

*Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die unendlich oft differenzierbar ist. Es seien  $x_0 \in I$  und  $U$  eine Umgebung von  $x_0$ , sodass  $\alpha, C \in \mathbb{R}_{>0}$  existieren, mit*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \alpha C^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in U.$$

*Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{für alle } x \in U.$$

◇

Die Theorie der Taylorreihen ist sehr reichhaltig, aber wir hören hier für den Moment auf.

## 8.4 Konvexität und zweite Ableitung

In diesem Abschnitt führen wir das Konzept von Konvexität einer Funktion ein, das mit der Konvexität einer Menge zusammenhängt: Eine Menge  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  wird als **konvex** bezeichnet, wenn bei zwei beliebigen Punkten  $z_0, z_1 \in D$  das Segment, das sie verbindet, ganz in der Menge  $D$  enthalten ist. Mit Symbolen können wir dann diese Bedingung beschreiben:

$$\forall z_0, z_1 \in D, \quad \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = (1-t)z_0 + tz_1, t \in [0, 1]\} \subseteq D.$$

Bemerken Sie, dass die Menge der Punkte  $z \in \mathbb{R}^n$  mit  $z = tz_0 + (1-t)z_1$  für ein  $t \in [0, 1]$  genau die Punkte der Strecke zwischen  $z_0$  und  $z_1$  bezeichnet, und  $t$  kann als ein Parameter betrachtet werden. Die Beschreibung dieser Punkte als  $tz_0 + (1-t)z_1$  für ein  $t \in [0, 1]$  heißt *Konvexitätskombination* von  $z_0$  und  $z_1$ <sup>1</sup>

### Definition 8.4.1

Es sei  $I$  ein Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Sie heißt **konvex**, falls für alle  $x_0 \neq x_1 \in I$  gilt

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1). \quad (8.4.1)$$

Sie heißt **konkav**, falls das umgekehrte Ungleichheitszeichen gilt.

Eine Funktion heißt **strikt konvex** (bzw. **strikt konkav**), falls Gleichheit in (8.4.1) nur gilt, falls  $t = 0$  und  $t = 1$ .

Diese Bedingung besagt geometrisch, dass jeder Punkt  $(x, y)$  in der Strecke zwischen  $z_0 = (x_0, f(x_0))$  und  $z_1 = (x_1, f(x_1))$ , der als

$$(1-t)z_0 + tz_1 = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)f(x_0) + tf(x_1)) \quad \text{für ein } t \in [0, 1]$$

beschrieben werden kann, immer über dem Punkt  $((1-t)x_0 + tx_1, f((1-t)x_0 + tx_1))$  des Graphen von  $f$  steht, siehe Abbildung 8.4.1

Wir möchten beobachten, dass eine konvexe Funktion (bzw. konkav), die nicht streng konvex ist (bzw. nicht streng konkav ist), Teile ihres Graphen aufweist, die mit Segmenten übereinstimmen, siehe Abbildung 8.4.2.

In diesem Abschnitt wollen wir eine Beziehung finden zwischen der Konvexität (bzw. Konkavität) einer Funktion und ihrer zweiten Ableitung. Wir beweisen zunächst das folgende:

---

<sup>1</sup>Präziser gesagt, es sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Abbildung  $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$ ; dann ist das Bild von  $\gamma$  genau die Strecke zwischen  $z_0$  und  $z_1$  in  $\mathbb{R}^n$ . Da dieses Segment eine Kurve ist, die als  $t$  variiert beschrieben wird, nennen wir  $t$  den ‘‘Parameter’’ (der die Kurve beschreibt), der kann als ‘‘Zeit’’ gedacht werden.

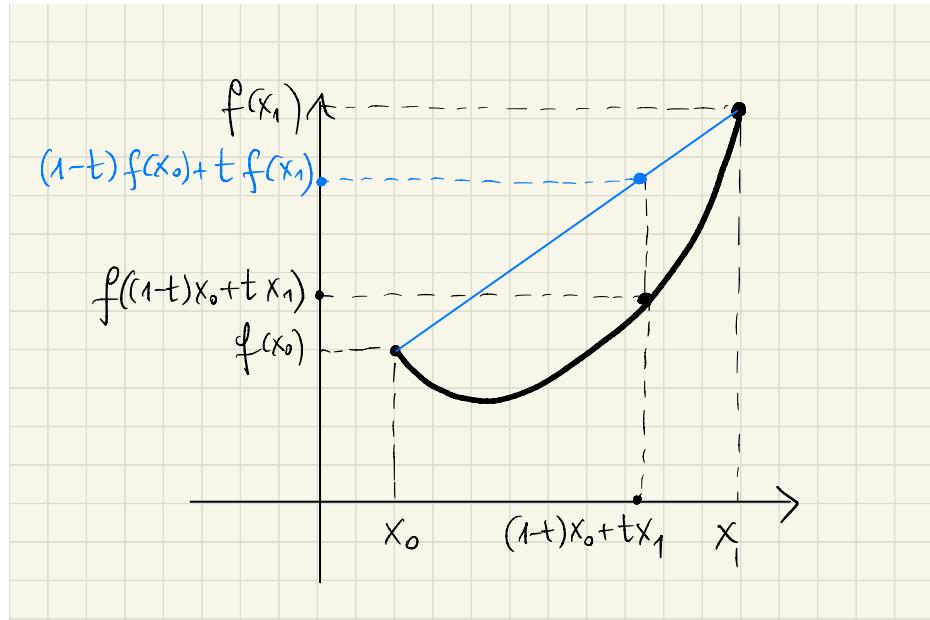


Figure 8.4.1

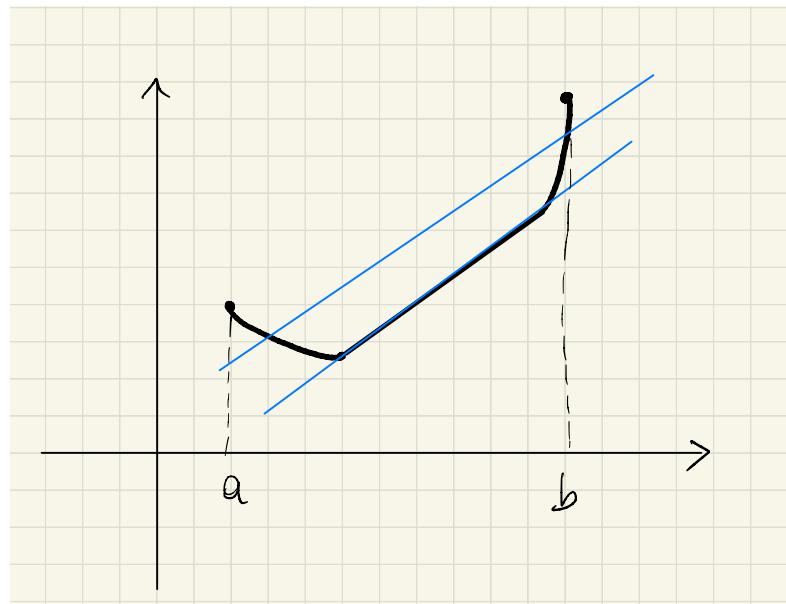


Figure 8.4.2

**Lemma 8.4.1**

Es sei  $g: (I \times I) \setminus \{(x, x), x \in I\}$  die Abbildung  $g(x, x') := \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ . Die Funktion  $f$  ist konvex genau dann, wenn

$$g(x_0, x) \leq g(x_0, x_1) \leq g(x, x_1) \quad \text{für alle } x_0 < x < x_1. \quad (8.4.2)$$

Die geometrische Bedeutung dieses Lemmas ist in Abbildung [8.4.3] erklärt.

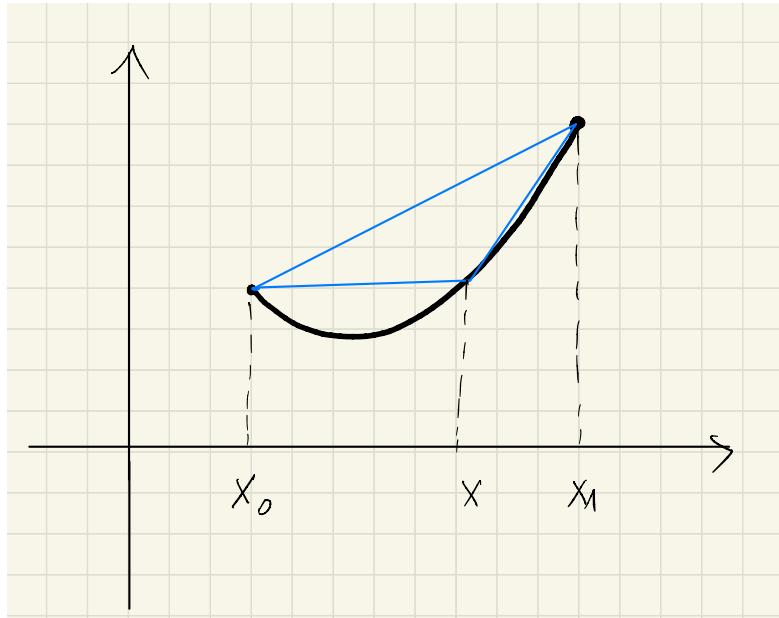


Figure 8.4.3

*Beweis:* Es sei  $x := (1-t)x_0 + tx_1$ , dann muss gelten  $0 < t < 1$  (weil wir angenommen haben, dass  $x_0 < x < x_1$ ). Wir bemerken, dass  $x - x_0 = t(x_1 - x_0) > 0$ . Deshalb ist

$$\begin{aligned} f \text{ konvex} &\iff f(x) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \\ &\iff f(x) - f(x_0) \leq t(f(x_1) - f(x_0)) \\ &\iff \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{t(f(x_1) - f(x_0))}{t(x_1 - x_0)} \\ &\iff g(x_0, x) \leq g(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Der Beweis der Ungleichheit  $g(x_0, x_1) \leq g(x, x_1)$  ist ähnlich und ist dem Leser überlassen.  $\square$

Wir sind nun bereit den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 8.4.2**

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Mal differenzierbar. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i)  $f$  ist konvex in  $I$ ;
- (ii)  $f'$  ist monoton wachsend in  $I$ ;
- (iii)  $f'' \geq 0$  in  $I$ .

Die Aussage und ihr Beweis können angepasst werden, um zu sagen, dass diese drei Bedingungen äquivalent sind:

- (i)  $f$  ist konkav in  $I$ ;
- (ii)  $f'$  ist monoton fallend in  $I$ ;
- (iii)  $f'' \leq 0$  in  $I$ .

*Beweis:* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Es sei  $f$  konvex. Aus Lemma 8.4.1 wissen wir, dass gegeben  $x_0 < x_1$  fest, für alle  $x \in (x_0, x_1)$ , (8.4.2) gilt. Wir bemerken nun, dass  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x, x_0)$  (bemerken Sie, dass  $g(x, x') = g(x', x)$  für alle  $x \neq x'$ ) und  $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} g(x, x_1)$ . Dann

$$g(x, x_0) \leq g(x_0, x_1) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x, x_0) \leq g(x_0, x_1)$$

und

$$g(x_0, x_1) \leq g(x, x_1) \Rightarrow f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} g(x, x_1) \geq g(x_0, x_1).$$

Deshalb erhalten wir, dass  $f'(x_0) \leq f'(x_1)$ ; da  $x_0 < x_1$  beliebig sind, schließen wir, dass  $f'$  monoton wachsend ist.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Es sei  $f'$  monoton wachsend und  $x_0 < x_1$  fest. Wir definieren  $g_0(x) := g(x_0, x)$  für  $x \in (x_0, x_1)$ . Dann ist

$$g'_0(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{x - x_0} \left[ f'(x) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right].$$

Nun bemerken wir, dass die Einschränkung der Funktion  $f$  auf  $[x_0, x]$  die Hypothesen des Satzes von Lagrange (Satz 8.2.6) erfüllt. Deshalb existiert  $\xi \in (x_0, x)$  sodass  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$ . Da  $x_0 < \xi < x$  ist und  $f'$  ist nach Voraussetzung monoton wachsend, erhalten wir, dass

$$\frac{1}{x - x_0} \left[ f'(x) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \frac{1}{x - x_0} [f'(x) - f'(\xi)] \geq 0.$$

Deshalb ist  $g'_0(x) \geq 0$ , die impliziert, dass  $g_0(x)$  monoton wachsend ist (Korollar 8.2.7). Also können wir schließen, dass

$$g(x_0, x) = g_0(x) \leq g_0(x_1) = g(x_0, x_1).$$

Ähnlich kann man beweisen, dass  $g(x_0, x_1) \leq g(x, x_1)$  gilt. Nun erlaubt uns Lemma 8.4.1 zu schließen, dass  $f$  konvex ist.

Die Äquivalenz zwischen (ii) und (iii) ist durch Korollar 8.2.7 gegeben.  $\square$

### Übung 8.4.1

Beweisen Sie, dass gegeben eine zwei Mal differenzierbare Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I$  ein offenes Intervall ist, dann gilt:

1.  $f''(x) > 0$  für alle  $x \in I \implies f$  strikt konvex;
2.  $f''(x) < 0$  für alle  $x \in I \implies f$  strikt konkav.

Gelten die umgekehrten Implikationen?



## 8.5 Zusätzliche Übungen

### Übung 8.5.1

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, so dass  $f(1) > 0$  und

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt.

Zeigen Sie:

- (a) Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt  $f(n) = f(1)^n$ .
- (b) Für alle  $p \in \mathbb{Q}$  gilt  $f(p) = f(1)^p$ .
- (c) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $f(x) = f(1)^x$ .



**Übung 8.5.2** (a) Es seien  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $t \in [0, 1]$ . Zeigen Sie, dass

$$\left(1 + \frac{t\lambda}{n}\right)^n - t\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \leq 1 - t$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  gilt. Schließen Sie daraus, dass

$$e^{t\lambda} - te^\lambda \leq 1 - t$$

gilt.

(b) Es seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  mit  $t_1 + t_2 = 1$ . Zeigen Sie, dass

$$e^{t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2} \leq t_1 e^{\lambda_1} + t_2 e^{\lambda_2}$$

gilt.

(c) Es seien  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  und  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$  mit  $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$ . Zeigen Sie, dass

$$e^{t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 + \dots + t_n\lambda_n} \leq t_1 e^{\lambda_1} + t_2 e^{\lambda_2} + \dots + t_n e^{\lambda_n}$$

gilt. Schließen Sie daraus, dass

$$\sqrt[n]{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} \leq \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}$$

für  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt.



**Übung 8.5.3**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + 1/x).$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \alpha x\right)^{\frac{t}{x}} (\alpha, t \in \mathbb{R}).$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1 + x)}{3^x - 1}\right)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 2^{-x} - 2}{x^2}\right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{mx} - 1}{b^{nx} - 1}, \quad n \neq 0$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{mx} - b^{nx}}{\sin(kx)}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log(x) - \log(a)}{x - a}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x}.$$

**Übung 8.5.4**

Es sei  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ein Polynom.

(i) Zeigen Sie, dass

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

für  $a \in \mathbb{R}$  gilt.

(ii) Die *Vielfachheit* einer Nullstelle  $a$  von  $P$  ist definiert als der höchste Exponent  $k$ , für den sich  $P$  ohne Rest durch  $(x - a)^k$  dividieren lässt.

Zeigen Sie, dass eine Nullstelle  $a$  von  $P$  genau dann Vielfachheit  $k$  hat, wenn

$$P(a) = 0, P'(a) = 0, \dots, P^{(k-1)}(a) = 0, P^{(k)}(a) \neq 0$$

gilt.



**Übung 8.5.5**

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a)  $\sec(x)$

(b)  $\operatorname{cosec}(x)$

(c)  $\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  (*Hyperbelsinus*)

(d)  $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  (*Hyperbelkosinus*)

(e)  $\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$  (*Hyperbeltangens*)

(f)  $\operatorname{arsinh}(x) := \sinh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  mit  $x \in \mathbb{R}$  (*Areasinus hyperbolicus*)

(g)  $\operatorname{arcosh}(x) := \cosh^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$  für  $x \geq 1$  (*Areakosinus hyperbolicus*)

(h)  $\operatorname{artanh}(x) := \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  für  $|x| \geq 1$  (*Areatangens hyperbolicus*)

(i)  $\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$  ( $x \geq 0$ )

(j)  $(\sinh(x))^3$

(k)  $\arctan\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$  ( $|x| \neq 1$ )

(l)  $\log(\tan(x))$

(m)  $\arcsin\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$  ( $x \geq 0$ )

(n)  $xe^{-\frac{1}{x}}$  ( $x \neq 0$ )

(o)  $2^{(\arccos(3x))}$  ( $|x| \leq 1/3$ )



**Übung 8.5.6**

Bestimmen Sie alle Werte  $\alpha \in \mathbb{R}$ , für welche die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

differenzierbar in  $x = 0$  ist. Für welchen dieser Werte  $\alpha$  ist die Ableitungsfunktion  $f'$  stetig? ♠

**Übung 8.5.7**

Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass  $f^{(k)}(0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. ♠

**Übung 8.5.8** (a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = x^x \quad (x > 0)$$

mit Hilfe der Gleichung

$$y = e^{\log(y)} \quad (y > 0).$$

- (b) Es seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen, so dass  $g$  eine positive Funktion ist. Verallgemeinern Sie die vorherige Teilaufgabe und bestimmen Sie eine Formel für die Ableitung der Funktion

$$\begin{aligned} h : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto [g(x)]^{f(x)}. \end{aligned}$$

- (c) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$h(x) = (1/x)^{x^2} \quad (x > 0).$$

**Übung 8.5.9**

Zeigen Sie, dass wenn eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0 \in I$  ist und  $f(x_0) \neq 0$  gilt, dann

$$\frac{d}{dx} \left( \log |f(x)| \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

gilt. ♠

**Übung 8.5.10**

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gerade*, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = f(x)$$

gilt, und sie heißt *ungerade*, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -f(x)$$

gilt. Die Funktion  $f$  heißt *periodisch mit der Periode T*, wenn  $T \neq 0$  und

$$f(x) = f(x + T) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine überall differenzierbare Funktion. Zeigen Sie:

- (a) Wenn  $f$  gerade ist, ist  $f'$  ungerade.
- (b) Wenn  $f$  ungerade ist, ist  $f'$  gerade.
- (c) Wenn  $f$  periodisch mit der Periode  $T$  ist, ist  $f'$  periodisch mit der Periode  $T$ .

**Übung 8.5.11**

Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema jeder der folgenden Funktionen:

(a)  $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$  für  $x \in [0, 2]$ .

(b)  $f_2(x) = 3x + \frac{1}{x}$  für  $x \in (0, 3]$ .

(c)  $f_3(x) = x^{2/3}(x - 5)$  für  $x \in [0, 4]$ .

(d)  $f_4(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$  für  $x \in [-4, 3]$ .

(e)  $f_5(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$  für  $x \in \mathbb{R}$  (mit  $a \neq 0$ ).

**Übung 8.5.12**

Es sei  $s$  eine positive reelle Zahl. Bestimmen Sie zwei positive Zahlen deren Summe  $s$  ist und deren Produkt so groß wie möglich ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

**Übung 8.5.13**

Zeigen Sie die folgende Version des Satzes von Rolle:

Es sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig;
- (ii)  $f$  ist differenzierbar in  $(a, \infty)$ ;
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(a)$ .

Dann gibt es ein  $c \in (a, \infty)$ , so dass  $f'(c) = 0$  gilt.



#### Übung 8.5.14

Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die zweimal differenzierbare in  $(a, b)$  ist. Nehmen Sie an, dass es  $c \in (a, b)$  gibt, so dass  $f(a) = f(c) = f(b)$  gilt. Zeigen Sie, dass es  $\xi \in (a, b)$  existiert, so dass

$$f''(\xi) = 0$$

gilt.



#### Übung 8.5.15

Es sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass wenn alle Funktionswerte von  $(f \cdot f')$  in  $(a, b)$  das gleiche Vorzeichen haben, dann haben alle Funktionswerte von  $f$  in  $(a, b)$  das gleiche Vorzeichen.



#### Übung 8.5.16

Wenden Sie den Satz von Lagrange auf die Funktion

$$\begin{aligned} f &: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

an, um die Schätzung

$$\frac{13}{12} < \sqrt[3]{2} < \frac{4}{3}$$

zu zeigen.



#### Übung 8.5.17

Es sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Nehmen Sie an, dass es  $L > 0$  existiert, so dass

$$|f'(x)| \leq L$$

für alle  $x \in (a, b)$  gilt. Zeigen Sie, dass  $f$  Lipschitz stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$  ist.



**Übung 8.5.18**

Beweisen Sie, dass die Ungleichung

$$\log(x) \leq x - 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt. Schließen Sie daraus, dass die Ungleichung

$$\log(x) \leq n(x^{1/n} - 1)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**Übung 8.5.19**

Es sei  $p > 1$ . Zeigen Sie, dass

$$x^p + y^p \leq (x + y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$$

für alle  $x, y \geq 0$  gilt.

**Übung 8.5.20**

Erinnern Sie sich an die folgende Aussage:

“Eine differenzierbare Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  ist konstant genau dann, wenn

$$f'(x) = 0$$

für alle  $x \in (a, b)$  gilt”.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Aussage die folgenden Gleichungen:

(a)  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ , für  $x > 0$ .

(b)  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ , für  $x < 0$ .

(c)  $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\pi}{4} + \arctan(x)$ , für  $x < 1$ .

(d)  $\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ , für  $x \in \mathbb{R}$ .

(e)  $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ , für  $x \in (-1, 1)$ .

(f)  $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ , für  $x \in (-1, 1)$ .

**Übung 8.5.21**

Zeigen Sie:

- $\log(\cos(x)) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$  für  $x \rightarrow 0$
- $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$  für  $x \rightarrow 0$



### Übung 8.5.22

Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( (1 + e^{1/n})^{-1} - \frac{2n-1}{4n} \right),$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2} - 1}{\log(\sqrt[n]{n})},$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{1/n} - 1}{\log(\sqrt[n]{n})},$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2n(n-1) - n^3 \log \left( 1 + \sin \left( \frac{2}{n} \right) \right) \right)$



### Übung 8.5.23

- Zeigen Sie, dass

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \leq 2$$

für alle  $n \geq 2$  gilt. Schließen Sie daraus, dass

$$e < 4.$$

- Es sei

$$R_n(x) := e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

das  $n$ -te Peano-Restglied von  $e^x$  in  $x_0 = 0$ .

Zeigen Sie, dass

$$|R_n(x)| \leq \frac{4^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

- Finden Sie eine natürliche Zahl  $n$ , so dass

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq 10^{-4}.$$

gilt. Berechnen Sie die ersten vier Stellen der Dezimalbruchentwicklung von  $e$ .

- Zeigen Sie, dass  $e$  eine irrationale Zahl ist.

*Hinweis:* Bemerken Sie, dass

$$0 < n!|R_n(1)| < 1$$

für  $n > 3$  gilt und

$$\frac{n!a}{b} - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \quad (\text{mit } a, b \in \mathbb{N}, n > b, a > 0)$$

eine ganze Zahl ist.



**Übung 8.5.24** • Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktionen  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$  um  $x_0 = 0$ , für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

- Finden Sie eine Funktion, deren Taylorreihe um  $x_0 = 0$  ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 x^n.$$

- Es sei  $d \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass es ein Polynom  $P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0$  von Grad  $d$  existiert, so dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^d x^n$$

die Taylorreihe um  $x_0 = 0$  von

$$\frac{P(x)}{(1-x)^{d+1}} = \frac{a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0}{(1-x)^{d+1}}$$

ist. *Hinweis:* Untersuchen Sie die Taylorreihe von  $\frac{1}{(1-x)^{d+1}}$  um  $x_0 = 0$  und argumentieren Sie mittels Induktion.



**Übung 8.5.25**

Die Fibonacci-Folge  $f_1, f_2, f_3, \dots$  ist durch das rekursive Bildungsgesetz

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 3$$

mit den Anfangswerten

$$f_1 = f_2 = 1$$

definiert.

- Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von  $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$  um  $x_0 = 0$  gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n$$

ist.

*Hinweis:* Berechnen Sie die  $n$ -te Ableitung von  $(1-x-x^2)F(x)$  in  $x = 0$  mit der Hilfe der Leibnizregel.

- Es seien  $a$  und  $b$  zwei verschiedene reelle Zahlen, die ungleich Null sind. Zeigen Sie, dass die Taylorreihe von  $G(x) = \frac{1}{(a-x)(b-x)}$  um  $x_0 = 0$  gegeben ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}} \right) x^n.$$

- Zeigen Sie, dass

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.



**Übung 8.5.26** • Es sei  $I$  ein offenes Interval und  $f$  eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion. Es sei  $x_0 \in I$  und nehmen wir an, dass

$$f^k(x_0) = 0 \quad \text{für alle } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} & \text{falls } x \neq x_0, \\ \frac{f^n(x_0)}{n!} & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$$

stetig ist.

- Geben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  an, so dass  $f(0) = 0$  gilt aber die Funktion

$$F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

nicht differenzierbar in  $x = 0$  ist.



**Übung 8.5.27** • Es sei  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$  die Taylorreihe von der Funktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

um  $x = 0$ . Die Koeffizienten  $B_n$  heißen *Bernoulli-Zahlen*.

Zeigen Sie, dass die Bernoulli-Zahlen  $B_n$  die Gleichung

$$\sum_{n=0}^m \binom{m+1}{n} B_n = 0$$

für  $m \geq 1$  erfüllen. *Hinweis:* Berechnen Sie die  $m + 1$ -te Ableitung von  $F(x)(e^x - 1)$  in  $x = 0$  mit der Hilfe der Leibnizregel.

- Bestimmen Sie die Bernoulli Zahlen  $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$ .



**Übung 8.5.28**

Es sei  $I$  ein offenes Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei mal differenzierbar. Es sei  $x_0 \in I$  und nehmen wir an, dass  $f'(x_0) = 0$  gilt. Zeigen Sie:

- Wenn  $f''(x_0) > 0$ , ist  $x_0$  ein lokales Minimum von  $f$ .
- Wenn  $f''(x_0) < 0$ , ist  $x_0$  ein lokales Maximum von  $f$ .





---

---

## KAPITEL 9

---

DAS RIEMANNSCHE INTEGRAL

## 9.1 Definitionen und erste Eigenschaften

Im folgenden werden wir sagen, dass  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion ist, falls das Bild  $f([a, b])$  eine beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist. Zum Beispiel, ist jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  automatisch beschränkt (warum?).

### Definition 9.1.1

Es sei  $[a, b]$  ein kompaktes Intervall. Eine **Zerlegung**  $Z$  von  $[a, b]$  ist eine Menge  $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$  von reellen Zahlen, so dass

$$a = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{n-1} < z_n = b.$$

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$U(Z, f) := \sum_{k=0}^{n-1} \inf f([z_k, z_{k+1}]) \cdot (z_{k+1} - z_k)$$

die **Untersumme von  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$**  und

$$O(Z, f) := \sum_{k=0}^{n-1} \sup f([z_k, z_{k+1}]) \cdot (z_{k+1} - z_k)$$

heißt die **Obersumme von  $f$  bezüglich der Zerlegung  $Z$** .

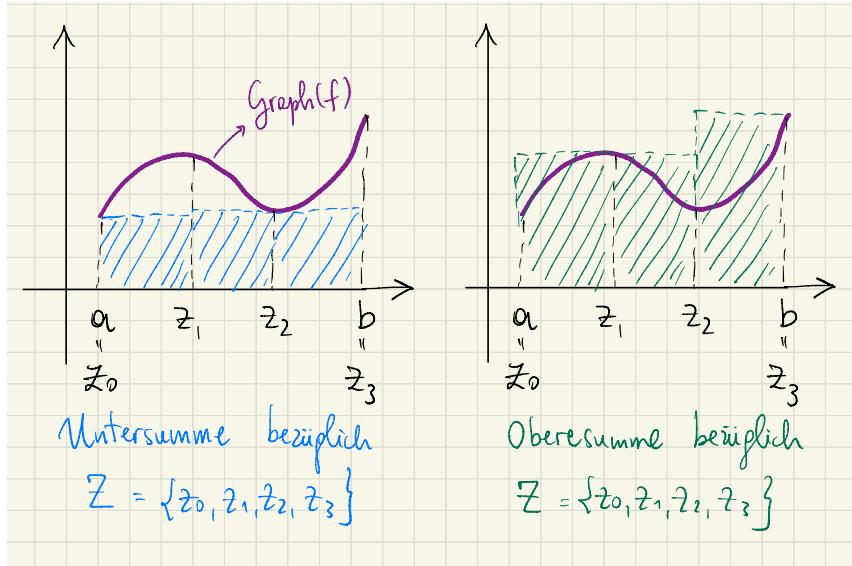


Figure 9.1.1

**Beispiel 9.1.1**

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$  die Zerlegung von  $[0, 1]$  in  $n$  Intervalle der Länge  $\frac{1}{n}$ . Dann folgt, dass

$$U(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\inf f\left([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\right)}_{=\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k}_{=\frac{(n-1)n}{2}} = \frac{n-1}{2n}$$

wobei die letzte Gleichheit aus (1.3.1) folgt, sowie

$$O(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}} \cdot \underbrace{\sup f\left([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]\right)}_{=\frac{k+1}{n}} = \frac{1}{n^2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)}_{=\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n+1}{2n}$$



Es sei  $Z$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Wenn man  $Z'$  aus  $Z$  durch Zufügen von Punkten in  $[a, b]$  erhält, das heißt, wenn  $Z \subseteq Z'$ , dann nennen wir  $Z'$  eine **Verfeinerung der Zerlegung  $Z$** .

Es seien beispielsweise  $Z$  und  $Z'$  zwei Zerlegungen von  $[a, b]$ , dann ist  $Z \cup Z'$  eine Verfeinerung sowohl von  $Z$  als auch von  $Z'$ . Wir fassen im folgenden Lemma einige grundlegende Eigenschaften von Untersummen und Obersummen zusammen.

**Lemma 9.1.1**

*Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.*

1. *Wenn  $Z'$  eine Verfeinerung einer Zerlegung  $Z$  ist, dann gilt*

$$U(Z, f) \leq U(Z', f) \quad \text{und} \quad O(Z', f) \leq O(Z, f).$$

2. *Es seien  $Z, Z'$  zwei Zerlegungen von  $[a, b]$ , dann gilt*

$$U(Z', f) \leq O(Z, f).$$

3. *Es ist*

$$\sup\{U(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} \leq \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}.$$

*Proof.* Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion.

1. Es sei nun  $Z'$  eine Verfeinerung einer Zerlegung  $Z$ . Wenn  $Z' = Z \cup \{w\}$ , d.h. wenn wir  $Z'$  durch Hinzufügen von einem Punkt erhalten, dann werden Sie in Übungsblatt 12 zeigen, dass

$$U(Z, f) \leq U(Z', f) \quad \text{und} \quad O(Z', f) \leq O(Z, f).$$

Der allgemeine Fall folgt nun indem wir dieses Argument iterieren.

2. Nehmen wir zuerst an, dass  $Z = Z'$ . Nachdem für eine beliebige beschränkte nichtleere Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  gilt, dass  $\inf(M) \leq \sup(M)$ , folgt sofort aus den Definitionen, dass  $U(Z, f) \leq O(Z, f)$ .

Es seien nun  $Z, Z'$  zwei beliebige Zerlegungen von  $[a, b]$ . Dann folgt, dass

$$\begin{aligned} U(Z', f) &\leq U(Z \cup Z', f) && \text{nach 1.} \\ &\leq O(Z \cup Z', f) && \text{für jede Zerlegung } Y \text{ gilt } U(Y, f) \leq O(Y, f) \\ &\leq O(Z, f) && \text{nach 1.} \end{aligned}$$

3. Diese Aussage folgt aus 2. und aus der Definition von Supremum und Infimum.

□

Wir führen nun die wichtigste Definition dieses Kapitels.

### Definition 9.1.2

Eine beschränkte Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Riemann-integrierbar**, wenn

$$\sup\{U(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} = \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}.$$

Wenn  $f$  Riemann-integrierbar ist, dann heißt

$$\int_a^b f(x) dx := \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$$

das **Riemann-Integral über  $f$  von  $a$  nach  $b$** .

Für ganz “schöne” Funktionen repräsentiert das Riemann-Integral den Flächeninhalt zwischen der Abszissenachse und dem Graph der Funktion  $f$ , zwischen  $a$  und  $b$ . Beachten Sie, dass diese Region nicht immer eine “Fläche” in dem Sinne ist, wie wir denken: Nehmen Sie zum Beispiel die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Wir werden bald sehen, dass diese Funktion eigentlich nicht Riemann-integrierbar ist.

Wir sagen in Zukunft oft auch ‘integrierbar’ anstatt ‘Riemann-integrierbar’ und ‘Integral’ anstatt ‘Riemann-Integral’. Wenn  $f$  Riemann-integrierbar ist, dann sagen wir auch, dass  $\int_a^b f(x)dx$  existiert. 1

### Beispiel 9.1.2

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine konstante Funktion, das heißt es gibt ein  $c \in \mathbb{R}$ , so dass  $f(x) = c$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dann gilt für jede Zerlegung  $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$  von  $[a, b]$ , dass

$$U(Z, f) = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \underbrace{\inf f([z_k, z_{k+1}])}_{=c} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot c = c(z_n - z_0) = c(b - a).$$

Genauso zeigt man auch, dass  $O(Z, f) = c(b - a)$ . Wir haben also gezeigt, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist, und dass

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a).$$



### Beispiel 9.1.3

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & \text{andernfalls.} \end{cases} \end{aligned}$$

Es sei  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} U(Z, f) &= \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \underbrace{\inf f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{= 0, \text{ weil } [z_k, z_{k+1}] \\ \text{rationale Zahlen enthält}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 0 = 0 \\ O(Z, f) &= \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \underbrace{\sup f([z_k, z_{k+1}])}_{\substack{= 1, \text{ weil } [z_k, z_{k+1}] \\ \text{irrationale Zahlen enthält}}} = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \cdot 1 = 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist also nicht Riemann-integrierbar. 2



Der folgende Satz erlaubt es, die Integrabilität einer Funktion zu zeigen, ohne direkt mit Infimum und Supremum zu arbeiten.

---

<sup>1</sup>Wenn wir schreiben ‘Riemann-integrierbar’, dann stellt sich die Frage, ob es denn noch andere Definitionen von ‘Integrierbarkeit’ gibt, außer der Riemann-Integrierbarkeit. Dies ist in der Tat der Fall, in Analysis III werden wir das Lebesgue-Integral kennenlernen, welches noch mal viel allgemeiner (und auch deutlich komplizierter) ist.

<sup>2</sup>In Analysis III werden wir sehen, dass  $f$  Lebesgue-integrierbar ist mit Lebesgue-Integral 1.

**Satz 9.1.2**

Eine beschränkte Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann integrierbar, wenn es eine Folge von Zerlegungen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $[a, b]$  gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f).$$

Zudem, wenn es eine solche Folge von Zerlegungen gibt, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f).$$

*Beweis:* Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Wir nehmen zuerst an, dass  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist. Wir setzen  $I := \int_a^b f(x) dx$ . Es ist eine Folgerung aus der Definitionen von Infimum und Supremum, dass Folgen von Zerlegungen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(Z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existieren, mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = I = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z'_n, f).$$

(Übung für Sie.) Dann gilt

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n \cup Z'_n, f) && \text{nach Lemma 9.1.1 1.} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n \cup Z'_n, f) && \text{nach Lemma 9.1.1 2.} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z'_n, f) && \text{nach Lemma 9.1.1 1.} \\ &= I. \end{aligned}$$

Nachdem der erste Ausdruck gleich dem letzten Ausdruck ist, müssen alle Ungleichheiten also schon Gleichheiten sein. Die Folge von Zerlegungen  $(Z_n \cup Z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat also die gewünschte Eigenschaft.

Nehmen wir nun an, es gibt eine Folge von Zerlegungen  $Z_n$  von  $[a, b]$ , so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) &\leq \sup\{U(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} && \text{Definition von Supremum} \\ &\leq \inf\{O(Z, f) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\} && \text{weil } U(Z, f) \leq O(Z, f) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f) && \text{Definition von Infimum.} \end{aligned}$$

Wir haben angenommen, dass der erste Ausdruck gleich dem letzten Ausdruck ist. Wir sehen also wiederum, dass alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sind. Insbesondere ist  $f$  integrierbar.  $\square$

Für später halten wir auch schon folgendes Korollar zu Satz 9.1.2 fest.

**Korollar 9.1.3****(Riemannsches Integrabilitätskriterium)**

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Die Funktion  $f$  ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gibt, so dass

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \epsilon.$$

*Beweis:* Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Wir nehmen zuerst an, dass  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist. Wir setzen  $I = \int_a^b f(x) dx$ . Dann gibt es nach Satz 9.1.2 eine Zerlegung  $Z$  mit  $I - U(Z, f) < \frac{\epsilon}{2}$  und mit  $O(Z, f) - I < \frac{\epsilon}{2}$ . Daraus folgt die Ungleichung  $O(Z, f) - U(Z, f) < \epsilon$ .

Umgekehrt, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  vom Intervall  $[a, b]$  gibt, so dass  $O(Z, f) - U(Z, f) < \epsilon$ , dann gibt es insbesondere zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Zerlegung  $Z_n$  von  $[a, b]$ , so dass  $O(Z_n, f) - U(Z_n, f) < \frac{1}{n}$ . Da  $O(Z_n, f) - U(Z_n, f) \geq 0$  (Lemma 9.1.1) 2. oder einfach aus der Definitionen von  $O(Z, f)$  und  $U(Z, f)$ ), folgt aus dem Einschließungssatz, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (O(Z_n, f) - U(Z_n, f)) = 0. \quad (9.1.1)$$

Wir bemerken dazu, dass die Folgen  $(O(Z_n, f))_n$  und  $(U(Z_n, f))_n$  beschränkt sind (warum ist es so?). Deshalb impliziert der Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 4.2.2), dass eine Teilfolge  $(n_k)_k$  von Indizes gibt, sodass beide Teilfolgen  $(O(Z_{n_k}, f))_k$  und  $(U(Z_{n_k}, f))_k$  konvergieren (nochmal, warum?). Da (9.1.1) gilt, können wir dann schließen, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} U(Z_{n_k}, f) = \lim_{k \rightarrow \infty} O(Z_{n_k}, f).$$

Also ist  $f$  nach Satz 9.1.2 integrierbar. □

Im Folgenden werden wir aber erst einmal nur Satz 9.1.2 anwenden.

**Beispiel 9.1.4**

1. Wir betrachten wiederum die Funktion

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

zusammen mit der Folge von Zerlegungen  $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Auf Seite 299 hatten wir berechnet, dass  $U(Z_n, f) = \frac{n-1}{2n}$  und  $O(Z_n, f) = \frac{n+1}{2n}$ . Es folgt dann, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{U(Z_n, f)}_{=\frac{n-1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{O(Z_n, f)}_{=\frac{n+1}{2n}}.$$

Es folgt also aus Satz 9.1.2, dass  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$ .

2. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f: [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \neq 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{wenn } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

zusammen mit der Folge von Zerlegungen  $Z_n := \{-1, -\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, 1\}$ , siehe Abbildung 9.1.2

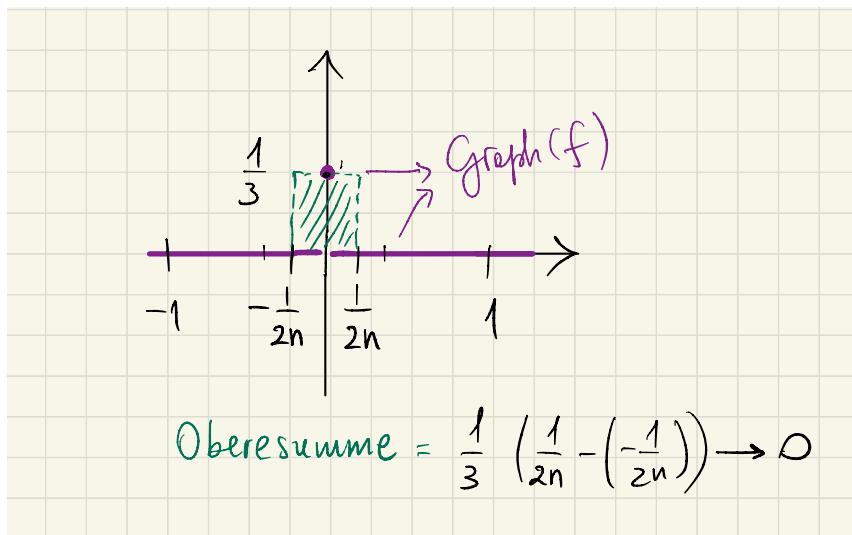


Figure 9.1.2

Dann gilt

$$\begin{aligned} U(Z_n, f) &= 0, \\ O(Z_n, f) &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2n} - \left( -\frac{1}{2n} \right) \right) = \frac{1}{3n}. \end{aligned}$$

Die Grenzwerte dieser Folgen von Untersummen und Obersummen sind jeweils 0. Es folgt also aus Satz 9.1.2, dass  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ .



**Satz 9.1.4**

Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbare Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch die Funktionen  $f + g$  und  $\lambda \cdot f$  integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \lambda \cdot f(x) dx &= \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir zuerst das folgende:

**Lemma 9.1.5**

Für jede Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gilt, dass

$$U(Z, f) + U(Z, g) \leq U(Z, f + g)$$

sowie

$$O(Z, f + g) \leq O(Z, f) + O(Z, g).$$

*Beweis des Lemmas 9.1.5:* Wir beweisen die Aussage für die Untersummen. Die Aussage für die Obersummen wird dann ganz analog bewiesen. Es folgt sofort aus den Definitionen, dass es genügt zu zeigen, dass für jedes Intervall  $[c, d]$  folgende Ungleichung gilt:

$$\inf \left( f([c, d]) \right) + \inf \left( g([c, d]) \right) \leq \inf \left( (f + g)([c, d]) \right).$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\inf \left( f([c, d]) \right) + \inf \left( g([c, d]) \right) \leq (f + g)(x) \quad \text{für alle } x \in [c, d]$$

Es gilt aber in der Tat für ein beliebiges  $x \in [c, d]$ , dass

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \geq \inf \left( f([c, d]) \right) + \inf \left( g([c, d]) \right).$$

Wir haben dann die Behauptung des Lemmas bewiesen.  $\square$

*Beweis des Satzes 9.1.4:* Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktionen. Wir müssen zeigen, dass  $f + g$  integrierbar ist mit

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Nach Satz 9.1.2 existieren Folgen von Zerlegungen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $[a, b]$ , so dass

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} U(X_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} O(X_n, f) = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U(Y_n, g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} O(Y_n, g) = \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

und deshalb, nochmal nach Satz 9.1.2, genügt es nun zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(X_n \cup Y_n, f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} O(X_n \cup Y_n, f + g) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Es folgt nun, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} U(X_n, f) + \lim_{n \rightarrow \infty} U(Y_n, g) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} U(X_n \cup Y_n, f) + \lim_{n \rightarrow \infty} U(X_n \cup Y_n, g) && \text{nach Lemma 9.1.1 1.} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} U(X_n \cup Y_n, f + g) && \text{nach Lemma 9.1.5} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} O(X_n \cup Y_n, f + g) && \text{nach Lemma 9.1.1 2.} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} O(X_n \cup Y_n, f) + \lim_{n \rightarrow \infty} O(X_n \cup Y_n, g) && \text{nach Lemma 9.1.5} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} O(X_n, f) + \lim_{n \rightarrow \infty} O(Y_n, g) && \text{nach Lemma 9.1.1 1.} \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

Dies ist jedoch nur möglich, wenn alle Ungleichheiten schon Gleichheiten sind. Wir haben damit also die Behauptung bewiesen.

Es sei nun  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Aussage für  $\lambda f$  zeigt man fast genauso. Dies ist für Sie eine **Übung**.  $\square$

### Korollar 9.1.6

*Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Riemann-integrierbare Funktion und es sei  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, welche sich von  $f$  nur in endlich vielen Punkten unterscheidet. Dann ist  $g$  ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

*Beweis:* Wir definieren  $h(x) := g(x) - f(x)$ . Bis auf endlich viele Ausnahmen gilt dann  $h(x) = 0$  für  $x \in [a, b]$ . Ähnlich wie im Beispiel auf Seite 304 kann man zeigen, dass  $h$  Riemann-integrierbar ist mit  $\int_a^b h(x)dx = 0$ . Das Korollar folgt nun aus Satz 9.1.4 nachdem  $g = f + h$ .  $\square$

Die folgende Eigenschaft wird sehr oft in diesem Kapitel benutzt:

### Lemma 9.1.7

**(Monotonieeigenschaft des Integrals)** *Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Riemann-integrierbare Funktionen, so dass  $f(x) \leq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ . Dann ist*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

*Beweis:* Die Aussage folgt leicht aus den Definitionen, nachdem für jedes Intervall  $[c, d]$  in  $[a, b]$  gilt, dass

$$\inf(f([c, d])) \leq \inf(g([c, d])).$$

Die Details sind für Sie eine Übung. □

**Lemma 9.1.8**

Es sei  $a < b < c$  und  $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

wenn die beiden Integrale auf der rechten Seite existieren.

*Beweis:* Nach Satz 9.1.2 existieren Folgen von Zerlegungen  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $[a, b]$  und  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $[b, c]$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U(Y_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} O(Y_n, f) = \int_a^b f(x)dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f) = \int_b^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Für eine beliebige Zerlegung  $Y$  von  $[a, b]$  und eine beliebige Zerlegung  $Z$  von  $[b, c]$  ist  $Y \cup Z$  eine Zerlegung von  $[a, c]$ . Es folgt sofort aus den Definitionen, dass

$$\begin{aligned} (*) \quad U(Y, f) + U(Z, f) &= U(Y \cup Z, f) \\ O(Y, f) + O(Z, f) &= O(Y \cup Z, f) \end{aligned}$$

Es folgt also, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} U(Y_n, f) + \lim_{n \rightarrow \infty} U(Z_n, f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} U(Y_n \cup Z_n, f) \quad \text{nach } (*) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} O(Y_n \cup Z_n, f) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} O(Y_n, f) + \lim_{n \rightarrow \infty} O(Z_n, f) \quad \text{nach } (*) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx. \end{aligned}$$

Alle Ungleichheiten müssen also Gleichheiten sein und es folgt aus Satz 9.1.2, dass

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

□

Es sei  $I$  ein Intervall und es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Für  $b < a$  in  $I$  definieren wir dann

$$\int_a^b f(x)dx := - \int_b^a f(x)dx.$$

Für  $a \in I$  definieren wir zudem

$$\int_a^a f(x)dx := 0.$$

Mit dieser Konvention erhalten wir nun folgendes Korollar zu Lemma 9.1.8.

### Korollar 9.1.9

*Es sei  $I$  ein Intervall und es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion. Für beliebige  $a, b, c \in I$  gilt, dass*

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

*wenn alle drei Integrale existieren.*

### Bemerkung 9.1.1

Man kann die Aussage noch etwas verbessern: wenn zwei der drei Integrale existieren, dann existiert auch das dritte. Um dies zu beweisen müßte man dann auch die Aussage von Lemma 9.1.8 leicht abändern. Dies verbleibt als freiwillige Übungsaufgabe. ◇

*Proof.* Das Korollar folgt leicht durch ‘richtiges Anordnen von  $a, b, c$ ’ und Lemma 9.1.8. Beispielsweise, wenn  $b < c < a$ , dann folgt aus Lemma 9.1.8, dass

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx,$$

Mithilfe der Konvention erhalten wir, dass

$$-\int_a^b f(x)dx = \int_b^c f(x)dx - \int_a^c f(x)dx,$$

also ist

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

Die anderen Fälle werden ganz analog bewiesen. □

## 9.2 Integrabilitätskriterien

In diesem Abschnitt wollen wir verschiedene Integrabilitätskriterien beweisen. Beispielsweise wollen wir zeigen, dass stetige Funktionen immer integrierbar sind. Wir werden dabei mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium, d.h. mit Korollar 9.1.3, arbeiten. Zur Erinnerung, dieses besagt, dass eine beschränkte Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann integrierbar ist, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$  gibt, so dass

$$O(Z, f) - U(Z, f) < \epsilon.$$

Bevor wir uns der Formulierung und den Beweisen von verschiedenen Integrabilitätskriterien zuwenden, ist es also hilfreich die Differenzen  $O(Z, f) - U(Z, f)$  zwischen Obersummen und Untersummen etwas umzuschreiben. Es sei also  $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$  eine Zerlegung von  $[a, b]$ . Dann können wir  $O(Z, f) - U(Z, f)$  auch folgendermaßen umschreiben:

$$O(Z, f) - U(Z, f) \leq (b - a) \max \left\{ d(f, [z_i, z_{i+1}]) \mid i = 0, \dots, n - 1 \right\}. \quad (9.2.1)$$

In der Tat haben wir

$$\begin{aligned} O(Z, f) - U(Z, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \sup f([z_i, z_{i+1}]) - \sum_{i=0}^n (z_{i+1} - z_i) \inf f([z_i, z_{i+1}]) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \left( \sup f([z_i, z_{i+1}]) - \inf f([z_i, z_{i+1}]) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \sup \left\{ |f(x) - f(x')| \mid x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \right\}. \end{aligned}$$

Für ein Teilintervall  $[r, s]$  von  $[a, b]$  bezeichnen wir jetzt

$$d(f, [r, s]) := \sup \left\{ |f(x) - f(x')| \mid x, x' \in [r, s] \right\}$$

als die maximale Differenz auf dem Teilintervall  $[r, s]$ . Mit dieser Notation gilt dann also, dass

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) d(f, [z_i, z_{i+1}]).$$

Insbesondere gilt also, dass

$$\begin{aligned} O(Z, f) - U(Z, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) d(f, [z_i, z_{i+1}]) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \max \left\{ d(f, [z_i, z_{i+1}]) \mid i = 0, \dots, n - 1 \right\} \\ &= (b - a) \max \left\{ d(f, [z_i, z_{i+1}]) \mid i = 0, \dots, n - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Der wichtigste Satz dieses Abschnitts besagt, dass jede stetige Funktion integrierbar ist in jedem kompakten Intervall. Um diesen Satz zu beweisen, brauchen wir noch ein wichtiges Konzept, und zwar das Konzept von gleichmässiger Stetigkeit.

### 9.2.1 Gleichmäßige Stetigkeit

Die Definition von “gleichmäßig stetig” ist auf den ersten, und oft auch auf den zweiten Blick verwirrend. Es sei  $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die stetig in  $D$  ist. Es sei, wie immer,  $U_\delta(x_0)$  eine offene Umgebung von  $x_0$ , für ein  $\delta > 0$ . Wir wissen, schon, dass  $f$  stetig in  $D$  ist genau dann, wenn

$$\forall x_0 \in D, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(x_0, \epsilon), \quad \text{sodass } \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D \quad \text{gilt } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Wir bemerken nochmal, dass  $\delta$  von  $\epsilon$  *und* (natürlich) von  $x_0$  abhängt. Bemerken Sie, dass wir in der ursprünglichen Definition der Stetigkeit nicht geschrieben haben, dass  $\delta$  von  $x_0$  abhängt. Aber wir haben zuerst die Definition der Stetigkeit von  $f$  in *einem Punkt*  $x_0$  gegeben (und danach gesagt, dass  $f$  stetig in  $D$  ist, falls sie stetig in jedem Punkt  $x_0 \in D$  ist). Deshalb hängt  $\delta$  auch von  $x_0$  ab.

Vereinfacht ausgedrückt, eine Funktion  $f$  ist gleichmäßig stetig, wenn “es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, das nur von  $\epsilon$  abhängt; also ein  $\delta$ , welches für alle  $x_0$  passt”. Präziser gesagt haben wir die folgende:

#### Definition 9.2.1

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ist **gleichmäßig stetig** in  $D$ , wenn

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \quad \text{sodass } \forall x_0 \in D, \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap D, \quad \text{gilt } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \quad (9.2.2)$$

Es gibt sehr viele “schöne Funktionen” die stetig in jedem Punkt der Definitionsmenge  $D$  sind (zum Beispiel Funktionen, die  $C^\infty(D, \mathbb{R})$  sind), aber die nicht gleichmäßig stetig sind. Zum Beispiel

#### Übung 9.2.1

Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen nicht gleichmäßig stetig in  $D$  sind:

$$1. \quad f: D = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$2. \quad f: D = (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$



Diese Funktionen sind zwar “wunderschön” ( $C^\infty(D, \mathbb{R})$ ), aber nicht gleichmäßig stetig. Also, was ist daran falsch? Abbildung 9.2.1 sollte versuchen, Ihnen eine Erklärung zu geben: Sobald für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta$  gefunden wurde, das für den Punkt  $x_0$  funktioniert, bemerken wir, wie für die linke Funktion  $\delta(x_0) \rightarrow 0$  für  $x_0 \rightarrow 0$ , während für die rechte Funktion,  $\delta(x_0) \rightarrow 0$  für  $x_0 \rightarrow \infty$ . Also können wir ein solches  $\delta$  nicht “minimieren”. In der Tat, um die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion zu zeigen, wäre es genug zu beweisen, dass für alle feste  $\epsilon > 0$ ,  $\inf\{\delta(\epsilon, x_0), x_0 \in D\} =: \tilde{\delta}(\epsilon)$  strikt positiv ist (warum gilt diese Bemerkung?).

Was sind dann schöne Kategorien von Funktionen, die automatisch gleichmäßig stetig sind? Das wird in der folgenden Übung erklärt:

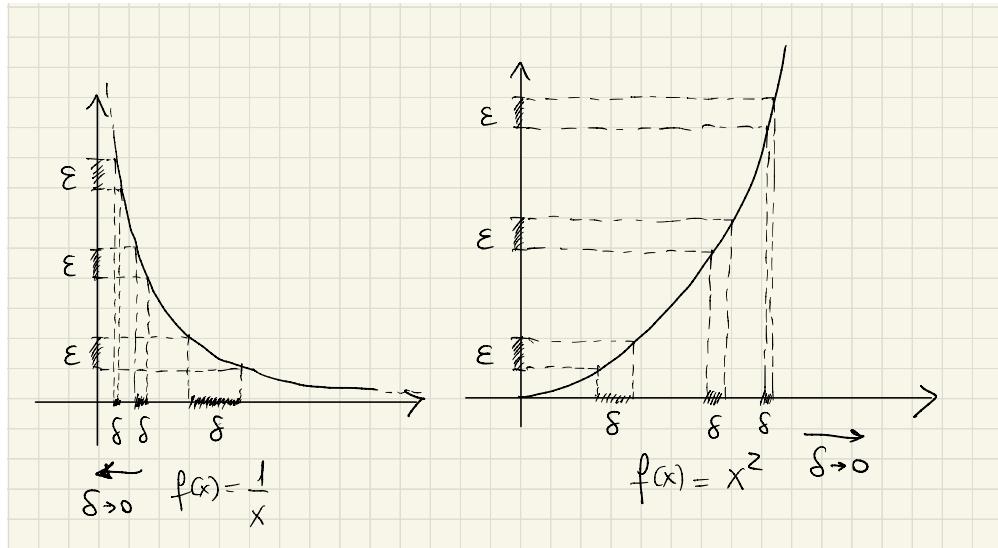


Figure 9.2.1

**Übung 9.2.2** 1. Beweisen Sie, dass jede lipschitzstetige Funktion (siehe Beispiel 5.2.1 (iv)) gleichmäßig stetig ist, wobei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzstetig ist (mit Konstanten  $L$ ), falls für alle  $x_1, x_2 \in D$  gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

2. Es sei  $D$  ein offenes Intervall und  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, dass falls

$$|f'(x)| \leq k \in \mathbb{R}_{>0} \quad \text{für alle } x \in D,$$

dann ist  $f$  lipschitzstetig und deshalb (durch 1. dieser Übung) gleichmäßig stetig.

3. Es sei  $f \in C^1(0, +\infty)$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$  und  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l' \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass  $f$  lipschitzstetig in  $(0, +\infty)$  ist, und deshalb gleichmäßig stetig.



Nächster Satz gibt uns eine andere wichtige Kategorie von Funktionen, die gleichmäßig sind. Hier spielt die Hauptrolle die Kompaktheit der Definitionsmenge.

**Satz 9.2.1**

**(Satz von Heine-Cantor)** Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Wenn  $f$  stetig ist, dann ist  $f$  auch gleichmäßig stetig.

*Proof.* Wir werden den Satz mit einem Widerspruchsbeweis beweisen. Nehmen wir also an, dass  $f$  nicht gleichmäßig stetig ist. Was ist die Verneinung von (9.2.2)? Dies ist:

$$\exists \epsilon > 0, \text{ sodass } \forall \delta > 0, \exists x \in [a, b] \text{ und } y \in [a, b] \text{ mit } |x - y| < \delta \text{ und } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

Sei also solch ein  $\epsilon > 0$  gewählt. Für jedes  $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$  erhalten wir also  $x_n, y_n \in [a, b]$ , so dass

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Da die Folge  $(x_n)$  in  $[a, b]$  liegt, die kompakt ist (da es beschränkt und abgeschlossen ist), existiert eine Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , welche gegen  $c \in [a, b]$  konvergiert. Nachdem  $0 \leq |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt, dass auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c$ . In der Tat, impliziert der Einschnürungssatz, dass  $|x_n - y_n| \rightarrow 0$  geht. Wir können nun nicht aber sagen, dass  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ , da diese Grenzwerte nicht existieren könnten! Aber wir wissen, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$  existiert und ist gleich  $c$ . Deshalb, da auch  $|x_{n_k} - y_{n_k}| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow +\infty$ , haben wir, dass  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c$ .

Da  $f$  stetig ist, folgt aus Satz 5.2.1, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) - f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k}\right) = f(c) - f(c) = 0.$$

Dies ist aber im Widerspruch zu der Aussage, dass  $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$  für alle  $k$ .  $\square$

Nach dieser langen Vorbemerkung können wir jetzt endlich den wichtigsten Satz dieses Abschnittes beweisen:

**Satz 9.2.2**

Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.

*Beweis:* Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Nach dem Riemannschen Integrierbarkeitskriterium (Korollar 9.1.3) und nach der Ungleichung (9.2.1) genügt es zu zeigen, dass es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zerlegung  $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$  gibt, so dass

$$(b - a) \max \{d(f, [z_i, z_{i+1}]) \mid i = 0, \dots, n - 1\} < \epsilon$$

oder, so dass die äquivalente Ungleichung

$$\max \{d(f, [z_i, z_{i+1}]) \mid i = 0, \dots, n - 1\} < \frac{\epsilon}{b - a}$$

gilt. Es sei also  $\epsilon > 0$ .

Wir müssen also eine Zerlegung vom Intervall  $[a, b]$  finden, welche so “fein” ist, dass die maximale Differenz  $d(f, [z_i, z_{i+1}])$  auf jedem Teilintervall  $[z_i, z_{i+1}]$  höchstens  $\frac{\epsilon}{b-a}$  beträgt. Anders ausgedrückt, die  $z_i$ 's müssen so eng beieinander liegen, dass die Funktionswerte dazwischen sich nur noch um höchstens  $\frac{\epsilon}{b-a}$  unterscheiden können. Eine solche Zerlegung finden wir, wenn wir uns der gleichmäßigen Stetigkeit entsinnen.

Da  $f$  stetig ist und auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  definiert ist, folgt aus Satz 9.2.1, dass  $f$  gleichmäßig stetig ist. Zur Erinnerung, das heißt

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall_{\substack{x, x' \in [a, b] \\ \text{mit } |x - x'| < \delta}} |f(x) - f(x')| < \eta.$$

Anders ausgedrückt, es gilt

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall_{\substack{\text{Intervalle} \\ [c, d] \subset [a, b] \\ \text{mit Länge} \leq \delta}} d(f, [c, d]) < \eta.$$

Wir setzen nun  $\eta = \frac{\epsilon}{b-a}$  und wir wählen ein  $\delta > 0$  mit der obigen Eigenschaft. Die Idee ist nun eine Zerlegung zu wählen, so dass das Intervall von jedem Teilintervall  $[z_k, z_{k+1}]$  höchstens  $\delta$  beträgt.

Wir wählen ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $\frac{b-a}{n} < \delta$ . Wir betrachten dann die Zerlegung  $z_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$  wobei  $i = 0, \dots, n$ . Es folgt aus der obigen Ungleichung, dass wie gewünscht  $d(f, [z_i, z_{i+1}]) < \frac{\epsilon}{b-a}$  für alle  $i$ .  $\square$

Der folgende Satz ist auch sehr wichtig und sein Beweis ist für Sie eine Übung:

**Satz 9.2.3**

*Jede monotone, beschränkte Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.*

Wir kehren jetzt wieder zurück zum Studium von integrierbaren Funktionen.

**Lemma 9.2.4**

*Es sei  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion und es sei  $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine lipschitzstetige Funktion, so dass  $h([a, b]) \subseteq I$ , wobei  $I$  ein kompaktes Intervall ist. Dann ist die Funktion  $\phi \circ h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls integrierbar.*

*Proof.* Es sei  $\phi$  lipschitzstetig mit Konstante  $L$ . Wir wollen auch hier wieder mit dem Kriterium für Integrierbarkeit arbeiten. Wir müssen dazu die Differenzen  $O(Z, \phi \circ h) - U(Z, \phi \circ h)$  abschätzen.

Es sei nun  $Z = \{z_0, \dots, z_n\}$  eine beliebige Zerlegung von  $[a, b]$ . Nach der Ungleichung (9.2.1) folgt, dass

$$\begin{aligned} O(Z, \phi \circ h) - U(Z, \phi \circ h) &= \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \sup \left\{ \underbrace{|\phi(h(x)) - \phi(h(x'))|}_{\leq L \cdot |h(x) - h(x')| \text{ da } \phi \text{ Lipschitz-stetig}} \middle| x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \right\} \\ &\leq L \sum_{i=0}^{n-1} (z_{i+1} - z_i) \sup \left\{ |h(x) - h(x')| \middle| x, x' \in [z_i, z_{i+1}] \right\} \\ &\leq L \cdot (O(Z, h) - U(Z, h)). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun mithilfe des Kriteriums, dass  $\phi \circ f$  integrierbar ist. Sei also  $\epsilon > 0$ . Nachdem  $f$  integrierbar ist, existiert eine Zerlegung  $Z$  von  $[a, b]$ , so dass

$$O(Z, h) - U(Z, h) < \frac{\epsilon}{L}.$$

Es folgt aus der obigen Ungleichung, dass wie gewünscht

$$O(Z, \phi \circ h) - U(Z, \phi \circ h) < L \cdot \frac{\epsilon}{L} = \epsilon.$$

□

Es ist einfach zu zeigen, dass die Funktion  $\phi(x) = |x|$  lipschitzstetig ist, mit Konstante 1 (**Übung**). Wir erhalten also folgendes Korollar zu 9.2.4.

### Korollar 9.2.5

Wenn  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Funktion ist, dann ist auch  $|f|$  integrierbar.

Wir können jetzt beweisen, dass das Produkt von zwei integrierbaren Funktionen wiederum integrierbar ist.

### Satz 9.2.6

Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei integrierbare Funktionen. Dann ist die Produktfunktion  $f \cdot g$  ebenfalls integrierbar.

*Proof.* Wir zeigen zuerst, dass das Quadrat einer integrierbaren Funktion  $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  wiederum integrierbar ist. Nachdem jede integrierbare Funktion per Definition beschränkt ist, existiert ein  $C \in \mathbb{R}$ , so dass  $|h(x)| \leq C$  für alle  $x$ . Mit der Hilfe von Übung 9.2.2 2. kann es leicht bewiesen werden, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \phi: [-C, C] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

lipschitzstetig ist. Es folgt also aus Lemma 9.2.4, dass  $h^2 = \phi \circ h$  integrierbar ist.

Es seien  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei integrierbare Funktionen. Die Aussage des Satzes folgt nun aus Satz 9.1.4, der obigen Aussage, und der Beobachtung, dass

$$f \cdot g = \frac{1}{2} [(f + g)^2 - f^2 - g^2].$$

□

### Lemma 9.2.7

Wenn  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ist, dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

*Beweis:* Aus der Tatsache, dass

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

und aus Lemma 9.1.7 folgt, dass

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Es folgt also wie gewünscht, dass  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . □

### Satz 9.2.8

(Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gibt es ein  $\xi \in [a, b]$ , so dass

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Was ist die geometrische Bedeutung dieses Satzes? Schauen Sie sich die nächsten Abbildungen an: Es gibt ein  $\xi \in [a, b]$ , sodass der Flächeninhalt des Rechteckes mit Seiten  $(b-a)$  und  $f(\xi)$  genau des Flächeninhaltes unter dem Graph von  $f$  ist (Abbildung 9.2.2); also gibt es ein  $\xi \in [a, b]$ , sodass der rote Flächeninhalt genau der blaue Flächeninhalt ist (Abbildung 9.2.3).

*Beweis:* Da  $f$  stetig ist und  $[a, b]$  kompakt ist, impliziert Korollar 5.5.2, dass  $f$  ein Maximum  $M$  und ein Minimum  $m$  annimmt. Deshalb für alle  $x \in [a, b]$  haben wir, dass

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Da  $m$  (bzw.  $M$ ) konstant sind, haben wir, dass  $\int_a^b m dx = m(b-a)$  (bzw.  $\int_a^b M dx = M(b-a)$ ). Dann folgt aus Lemma 9.1.7, dass

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$$

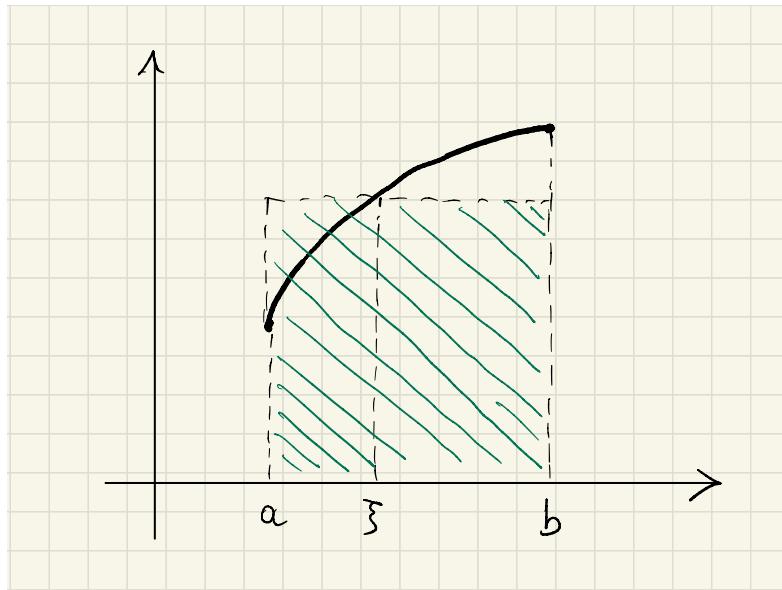


Figure 9.2.2

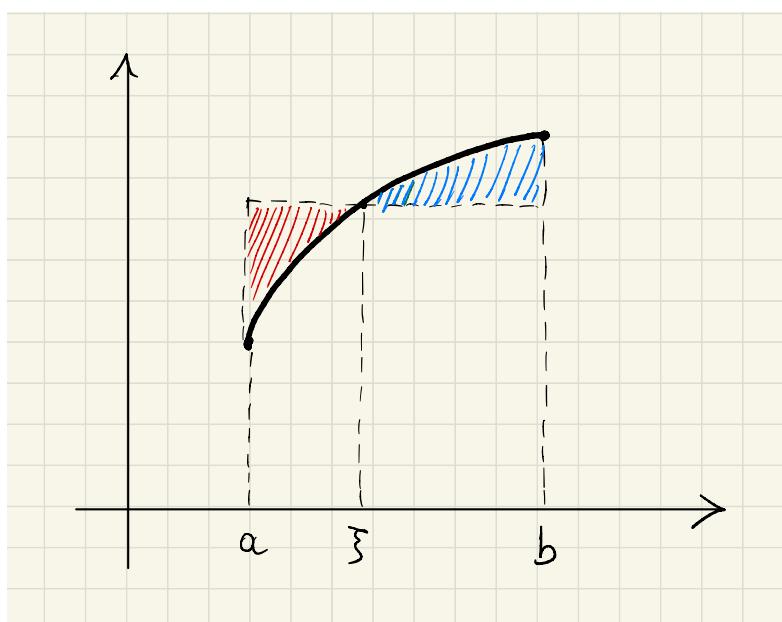


Figure 9.2.3

### 9.3. DER HAUPTSATZ DER INTEGRAL- UND DIFFERENTIALRECHNUNG

und deshalb ist

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Da  $f$  alle Werte zwischen  $m$  und  $M$  annimt (Korollar 5.5.4), können wir schließen, dass ein  $\xi \in [a, b]$  existiert, sodass

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

□

## 9.3 Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

In diesem Kapitel sei  $I$  durchgehend ein Intervall. Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, wobei  $I$  ein offenes Intervall ist.

### Definition 9.3.1

Eine **Stammfunktion** von  $f$  ist eine differenzierbare Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $F'(x) = f(x)$  für alle Punkte  $x$  von  $I$ .

Wir können nun einen der wichtigsten Sätze der Analysis I formulieren.

### Satz 9.3.1

(**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**)

Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und es sei  $x_0 \in I$ . Dann ist

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

eine Stammfunktion von  $f$ .

*Beweis:* Es sei  $x \in I$  ein beliebiger Punkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_{x_0}^{x+h} f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt}_{\substack{= f(\xi_h) \text{ für ein } \xi_h \in [x, x+h], \\ \text{nach dem Mittelwertsatz} \\ \text{der Integralrechnung}}} \quad \text{nach Korollar 9.1.9} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) \\
&= f\left(\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h\right) \quad \text{weil } f \text{ stetig} \\
&= f(x), \quad \text{denn aus } \xi_h \in [x, x+h] \text{ folgt } \lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = x.
\end{aligned}$$

□

Wir haben dann bewiesen, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Wir werden bald sehen, dass es nicht immer der Fall ist für Funktionen, die nicht stetig sind (siehe Satz 9.3.3 und Beispiel 9.3.1).

### Bemerkung 9.3.1

Wir bemerken, dass wir in der Definition der Stammfunktion von  $f$  in Satz 9.3.1 eine Wahl getroffen haben, und zwar haben wir  $x_0$  gewählt. Folglich hängt  $F$  von  $x_0$  ab. Was passiert, wenn wir einen anderen Punkt wählen? Es sei  $y_0 \in I$  und

$$G(x) := \int_{y_0}^x f(x)dx.$$

Dann können wir Korollar 9.1.9 benutzen, um zu schließen, dass

$$G(x) = \int_{y_0}^x f(x)dx = \int_{y_0}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^x f(x)dx = \int_{y_0}^{x_0} f(x)dx + F(x).$$

Wir bemerken, dass  $\int_{y_0}^{x_0} f(x)dx$  unabhängig von  $x$  ist und deshalb konstant. Also haben wir bemerkt, dass die Differenz zwischen zwei Stammfunktionen einer stetigen Funktion immer konstant ist. Das nächste Lemma erklärt, dass dies immer der Fall ist. ◇

### Lemma 9.3.2

*Wenn  $F$  und  $G$  Stammfunktionen von  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sind, dann ist die Funktion  $F - G$  eine konstante Funktion.*

*Beweis:* Es gilt  $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ . Es folgt nun aus Korollar 8.2.7 5., dass  $F - G$  eine konstante Funktion ist. □

### 9.3. DER HAUPTSATZ DER INTEGRAL- UND DIFFERENTIALRECHNUNG

Warum ist dann Bemerkung 9.3.1 nicht genug, um zu beweisen, dass  $G - F$  konstant ist? Mit dieser Übung wollen wir bemerken, dass **die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht immer stetig ist** (und deshalb können wir nicht immer annnehmen, dass  $f = F'$  stetig ist: Voraussetzung, die in Lemma 9.3.2 nicht benötigt ist).

#### Übung 9.3.1

Es sei

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{wenn } x \neq 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass  $F$  differenzierbar in  $\mathbb{R}$  ist und dass die Ableitung  $F'$  nicht stetig in  $x_0 = 0$  ist. ♠

Mit dieser Übung haben Sie ein Beispiel einer differenzierbaren Funktion, deren Ableitung nicht stetig in einem Punkt ist. Mit ein wenig Aufwand (der Werkzeuge erfordert, die wir im Moment nicht haben) kann man differenzierbare Funktionen  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  konstruieren, deren Ableitung jedoch auf einer “sehr großen” Teilmenge von  $I$  nicht stetig ist.

Dann stellen wir uns die folgende Frage: Wenn  $f$  eine Stammfunktion zulässt, d.h. wenn  $f$  die Ableitung einer differenzierbaren Funktion  $F$  ist, welche notwendigen Eigenschaften muss  $f$  erfüllen? Wir antworten teilweise diese Frage in folgender:

#### Satz 9.3.3

**(Mittelwertsatz der Ableitungen)** Es sei  $F: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion und  $x_1, x_2 \in (a, b)$ . Dann nimmt  $F'$  alle Werte zwischen  $F'(x_1)$  und  $F'(x_2)$  an.

*Beweis:* Nehmen wir an, dass  $F'(x_1) < F'(x_2)$  (der Fall  $F'(x_1) > F'(x_2)$  kann ganz analog betrachtet werden) und es sei  $\lambda$ , sodass  $F'(x_1) < \lambda < F'(x_2)$ . Wir müssen beweisen, dass ein  $c \in (x_1, x_2)$  existiert, sodass  $F'(c) = \lambda$ . Es sei  $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $g(x) := F(x) - \lambda x$ . Dann ist  $g'(x_1) = F'(x_1) - \lambda < 0$  und  $g'(x_2) = F'(x_2) - \lambda > 0$ . Da das Vorzeichen der Ableitung von  $g$  nicht konstant ist, nach Korollar 8.2.7 können wir schließen, dass  $g$  nicht monoton ist (also, weder monoton steigend noch monoton fallend). Wir bemerken dazu, dass  $g$  stetig ist (warum?) und dass die Definitionsmenge ein Intervall ist. Nach Proposition 7.1.1 erhalten wir, dass, da  $g$  nicht (streng) monoton in  $[x_1, x_2]$  ist, muss  $g$  nicht injektiv sein. Deshalb gibt es Punkte  $y_1, y_2 \in [x_1, x_2]$  sodass  $g(y_1) = g(y_2)$ . Nehmen wir an, dass  $y_1 < y_2$ . Dann erfüllt die Funktion  $g: [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}$  die Hypothesen des Satzes von Rolle. Also können wir einen  $c \in (y_1, y_2) \subseteq (a, b)$  finden, sodass  $g'(c) = 0$ , aber  $g'(c)$  ist genau  $F'(c) - \lambda$ . □

**Beispiel 9.3.1**

Mit Satz 9.3.3 können wir einfach beweisen, dass die sogenannte *Heaviside-Funktion*

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ 1 & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

keine Stammfunktion besitzt (da sie nicht alle Werte zwischen 0 und 1 annimmt). ♣

Wenn  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  ist, dann schreiben wir im Folgenden

$$\int f(x)dx = F.$$

Diese Schreibweise ist zwar etwas problematisch, weil  $F$  nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist. Aber uns ist dies im weiteren Verlauf der Vorlesung egal. Wir nennen  $\int f(x)dx$  manchmal auch das **unbestimmte Integral von  $f$** .

**Satz 9.3.4**

*Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $F$  eine Stammfunktion. Dann gilt für alle  $a, b \in I$ , dass*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Für eine beliebige Funktion  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $a, b \in I$  schreiben wir

$$\left[ F(x) \right]_a^b := F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

*Proof.* Wir betrachten die Funktion

$$G(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung besagt, dass  $G$  ebenfalls eine Stammfunktion von  $f$  ist. Nach Lemma 9.3.2 existiert ein  $C \in \mathbb{R}$ , so dass  $F(x) = G(x) + C$  für alle  $x \in I$ . Per Definition ist  $G(b) = \int_a^b f(x)dx$  und  $G(a) = 0$ . Es folgt, dass

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) = F(b) - F(a).$$

□

### 9.3. DER HAUPTSATZ DER INTEGRAL- UND DIFFERENTIALRECHNUNG

Aus den schon bestimmten Ableitungen erhalten wir jetzt folgende Tabelle:

Funktion	Ableitung	Funktion	Stammfunktion
$e^x$	$e^x$	$e^x$	$e^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\arccos(x)$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\ln( x )$
$\ln(-x), x < 0,$	$\frac{1}{x}$		

Aus Satz 8.1.3 erhalten wir zudem sofort folgendes Lemma.

#### Lemma 9.3.5

Es seien  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int f(x) + g(x) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad \text{sowie} \\ \int \lambda f(x) dx &= \lambda \int f(x) dx. \end{aligned}$$

#### 9.3.1 Partielle Integration

Wie wir schon im vorherigen Kapitel gesehen haben, können wir aus unseren Ergebnisse über Ableitungen neue Aussagen über Stammfunktionen gewinnen. In diesem Kapitel werden wir neue Integrationsregeln aus den Ableitungsregeln gewinnen.

In diesem Kapitel sei  $I$  weiterhin ein Intervall.

#### Satz 9.3.6

##### (Partielle Integration)

Es seien  $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetig differenzierbare<sup>a</sup> Funktionen, also  $u, v \in C^1(I; \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

<sup>a</sup>Zur Erinnerung, eine Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig differenzierbar, wenn  $f$  differenzierbar ist, und wenn  $f'$  stetig ist.

*Beweis:* Aus der Produktregel der Ableitung folgt, dass

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

also

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x).$$

Aus Lemma 9.3.5 und der Definition einer Stammfunktion folgt nun, dass

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

□

### Bemerkung 9.3.2

An welcher Stelle haben wir die Voraussetzung verwendet, dass  $u$  und  $v$  stetig differenzierbar sind? ◇

Die Formel aus dem vorherigen Satz kann man auch etwas knapper wie folgt formulieren:

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx.$$

Mithilfe der partiellen Integration kann man also ein Integral durch ein anderes, hoffentlich deutlich leichteres, Integral ersetzen. Die partielle Integration bietet sich normalerweise dann an, wenn sich durch das Ableiten der Funktion  $u$  der Integrand  $u'v$  vereinfacht. Dies ist beispielsweise oft der Fall, wenn  $u = x^n$  oder wenn  $u = \ln(x)$ .

### Beispiel 9.3.2

1. Wir betrachten  $f(x) = x \cdot \cos(x)$ . Dann gilt

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'} dx = \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\sin(x)}_v - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_v dx = x \sin(x) + \cos(x).$$

2. Manchmal muss man ein Integral erst geschickt als Produkt umschreiben, um partielle Integration erfolgreich anwenden zu können. Beispielsweise ist

$$\int \ln(x) dx = \int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{1}_{v'} dx = \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{x}_v - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{x}_v dx = \ln(x) \cdot x - x.$$

♣

### 9.3. DER HAUPTSATZ DER INTEGRAL- UND DIFFERENTIALRECHNUNG

#### 9.3.2 Substitution

Das folgende Lemma folgt sofort aus der Kettenregel für Ableitungen.

##### Lemma 9.3.7

*Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und es sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Für alle  $c, d \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\int c \cdot f(cx + d) dx = F(cx + d).$$

*Beweis:* Der Beweis ist für Sie eine einfache Übung. □

Beispielsweise gilt

$$\int 2 \cos(2x + 3) dx = \sin(2x + 3).$$

Der folgende Satz ist nun eine Verallgemeinerung vom vorherigen Lemma.

##### Satz 9.3.8

*Es sei  $u: [a, b] \rightarrow I$  eine stetig differenzierbare Funktion und es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

*Beweis:* Es sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt nach der Kettenregel für Ableitungen, dass

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = f(u(x)) \cdot u'(x).$$

Anders ausgedrückt,  $F(u(x))$  ist eine Stammfunktion von  $f(u(x)) \cdot u'(x)$ . Es folgt also aus Satz 9.3.4, dass

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx &= \left[ F(u(x)) \right]_{x=a}^{x=b} = F(u(b)) - F(u(a)) \\ &= \left[ F(u) \right]_{u=u(a)}^{u=u(b)} \\ &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du. \end{aligned}$$

□

Wenn wir nur unbestimmte Integrale betrachten, dann besagt die Substitutionsregel, dass

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du.$$

**Beispiel 9.3.3**

Wir wollen nun eine Stammfunktion von  $\sin(x^2 + 3) \cdot x$  finden. Die Idee ist, die Substitution  $u = x^2 + 3$  durchzuführen. Damit wir diese Substitution durchführen können, müssen wir allerdings  $\sin(x^2 + 3) \cdot x$  in die Form von

$$f(u(x)) \cdot u'(x) = f(x^2 + 3) \cdot 2x$$

bringen. Wir führen diese Idee jetzt aus

$$\begin{aligned} \int \sin(x^2 + 3) \cdot x dx &= \frac{1}{2} \int \underbrace{\sin(x^2 + 3)}_{=:u(x)} \cdot \underbrace{2x}_{=:u'(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(u) du && \text{Substitution } u = x^2 + 3 \\ &= -\frac{1}{2} \cos(u) \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 3) && \text{Rücksubstitution } u = x^2 + 3. \end{aligned}$$



Wir beschließen das Kapitel über die Substitution mit folgendem Lemma.

**Lemma 9.3.9**

Es ist

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}\pi.$$

*Beweis:* Wir bestimmen erst einmal eine Stammfunktion von  $\sqrt{1-x^2}$ . Es ist

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int (1-\underbrace{\sin(\arcsin(x))^2}_{=:u(x)}) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{=:u'(x)} dx \\ &= \int 1 - \sin(u)^2 du && \text{Substitution } u(x) = \arcsin(x) \\ &= \int \cos^2(u) du = (*). \end{aligned}$$

Wir wollen jetzt eine Stammfunktion für  $\cos^2(u)$  finden, indem wir  $\cos^2(u)$  umschreiben. Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2(u) + \cos^2(u), \quad \text{und} \\ \cos(2u) &= \cos^2(u) - \sin^2(u). \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach  $\cos^2(u)$  erhalten wir also, dass

$$\cos^2(u) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)).$$

<sup>3</sup> Wir können jetzt mit dem Integral oben weiterrechnen, und erhalten mithilfe von Lemma 9.3.7, dass

$$(*) = \frac{1}{2} \int 1 + \cos(2u) du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u).$$

Durch Einsetzen erhalten wir jetzt, dass

$$\int_{x=-1}^{x=1} \sqrt{1-x^2} dx = \left[ \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) \right]_{u=\arcsin(-1)}^{u=\arcsin(1)} = \left[ \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin(2u) \right]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

□

## 9.4 Uneigentliche Integrale

### Definition 9.4.1

Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, wobei  $a \in \mathbb{R}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , so dass für jedes  $a \leq d < b$  das Integral  $\int_a^d f(x) dx$  existiert. Wir definieren dann

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{d \nearrow b} \int_a^d f(x) dx,$$

und nennen es das **uneigentliche Integral auf  $[a, b]$** . Ganz analog definiert man das uneigentliche Integral auf einem halb-offenen Intervall  $(a, b]$ .

Es gibt also drei Möglichkeiten: entweder konvergiert das uneigentliche Integral gegen eine reelle Zahl, oder es divergiert bestimmt gegen  $\pm\infty$ , oder es existiert nicht.

### Beispiel 9.4.1

Es ist

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d e^{-x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^d = \lim_{d \rightarrow \infty} (-e^{-d} + 1) = 1.$$

♣

---

<sup>3</sup> Alternativ kann man eine Stammfunktion für  $\cos^2(x)$  auch geschickt mithilfe von partieller Integration bestimmen. Genauer gesagt, es ist

$$\begin{aligned} \int \cos^2(x) dx &= \int \cos(x) \cdot \cos(x) dx = \cos(x) \cdot \sin(x) - \int (-\sin(x)) \cdot \sin(x) dx \\ &= \cos(x) \cdot \sin(x) + \int (1 - \cos^2(x)) dx \\ &= \cos(x) \sin(x) + x - \int \cos^2(x) dx. \end{aligned}$$

Wir lösen jetzt nach  $\int \cos^2(x) dx$  auf, und erhalten, dass

$$\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}(\cos(x) \sin(x) + x).$$

**Lemma 9.4.1**

Für  $s > 1$  gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1}.$$

*Beweis:* Es sei  $s > 1$ . Dann ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_1^d x^{-s} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^d = \lim_{d \rightarrow \infty} \left( \frac{d^{-s+1}}{-s+1} + \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{s-1}.$$

4

□

**Definition 9.4.2**

Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, wobei  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  und  $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , so dass für ein  $c \in (a, b)$  die uneigentlichen Integrale  $\int_a^c f(x) dx$  und  $\int_c^b f(x) dx$  existieren oder bestimmt gegen  $\pm\infty$  divergieren. Dann definieren wir

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

wenn die rechte Seite definiert ist. Wir nennen dann  $\int_a^b f(x) dx$  das **uneigentliche Integral von  $f$  auf  $(a, b)$** .

Man kann leicht mithilfe von Korollar 9.1.9 zeigen, dass die Definition nicht von der Wahl von  $c \in (a, b)$  abhängt.

Folgender Satz folgt sofort aus Satz 9.3.4 und aus den Definitionen.

**Satz 9.4.2**

Es sei  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \nearrow b} F(x) - \lim_{x \searrow a} F(x),$$

wenn die rechte Seite definiert ist.

Beispielsweise ist

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

---

<sup>4</sup>An welcher Stelle haben wir verwendet, dass  $s > 1$ ?

### 9.4.1 Reihen und uneigentliche Integrale

Im Folgenden werden wir noch kurz die Konvergenz von Reihen und von uneigentlichen Integralen in Verbindung bringen. Genauer gesagt können wir nun folgenden Satz formulieren (ohne Beweis)<sup>5</sup>

#### Satz 9.4.3

*Es sei  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton fallende Funktion. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ konvergiert.}$$

#### Beispiel 9.4.2

Es sei  $s > 1$ . Wir hatten in Lemma 9.4.1 gezeigt, dass das uneigentliche Integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$  konvergiert. Es folgt dann aus Satz 9.4.3, angewandt auf  $f(x) = \frac{1}{x^s}$ , dass für jedes  $s \in (1, \infty)$  die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert (siehe auch Beispiel 6.1.6). ♣

#### Beispiel 9.4.3

Andererseits gilt, dass

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_1^d \frac{1}{x} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} [\ln(x)]_1^d = \lim_{d \rightarrow \infty} (\ln(d) - \ln(1)) = \infty.$$

Zusammen mit Satz 9.4.3 angewandt auf  $f(x) = \frac{1}{x}$  gibt dies einen neuen Beweis dafür, dass die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  bestimmt gegen  $+\infty$  divergiert. ♣

---

<sup>5</sup>Sie finden einen Beweis auf Seite 222 von Forster "Analysis I".

## 9.5 Zusätzliche Übungen

**Übung 9.5.1** • Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Riemann-integrierbare Funktion.  
Zeigen Sie, dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

existiert und

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

gilt.

- Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so dass der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

existiert. Ist die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.



### Übung 9.5.2

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{falls } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 f(x) dx .$$

