Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
14.4.2016

Topologie: Übungsblatt 1

Diese Übungen müssen bis spätestens 16 Uhr Donnerstag 21.4.2016 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

N.B. Wir haben die Konvention, dass das Symbol $X \subset Y$ nicht impliziert, dass $X \neq Y$ gilt.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Seien $X \neq \emptyset$, und $J : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & J(X) = X \\ \text{ii)} & J(S) \subset S \\ \text{iii)} & J(S \cap T) = J(S) \cap J(T) \end{array}$$

für alle $S, T \in \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{T} := \{S \in \mathcal{P}(X) \,|\, S = J(S)\}$$

eine Topologie auf X ist.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Sei $\mathcal{B}_l = \{[a, b) \subset \mathbb{R} \,|\, a < b\}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_l$ die Basiseigenschaft hat.

b) Sei $\mathcal{T}_l$ die Topologie mit Basis $\mathcal{B}_l$. Geben Sie alle Intervallen $I \subset \mathbb{R}$ an, die offen in $\mathcal{T}_l$ sind.

c) Die Menge $\mathcal{B}_l$ ist nicht abzählbar. Existiert eine Untermenge $\mathcal{C}_l \subset \mathcal{B}_l$, sodass $\mathcal{C}_l$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_l$, wobei $\mathcal{C}_l$ abzählbar ist ?

d) Besitzt die Menge $\mathcal{D}_l := \{[a, b] \subset \mathbb{R} \,|\, a < b\}$ die Basiseigenschaft ?

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Sei $\mathcal{B}_r = \{(a,b] \subset \mathbb{R} \,|\, a < b\}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_r$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_l)$ homöomorph ist zu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_r)$.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Gegeben eine Topologie $\mathcal{O}$ auf Y : was ist die gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass die Abbildung f stetig ist ?

b) Gegeben eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X : was ist die feinste Topologie $\mathcal{O}$ auf Y, sodass die Abbildung f stetig ist ?

(Sie müssen beweisen, dass die Menge $\mathcal{T}$ in a), und $\mathcal{O}$ in b) tatsächlich Topologien sind.)

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Sei $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Polynomen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in n-Variabelen. Wir definieren die Nullstellenmenge von $\mathcal{F}$ durch

$$V(\mathcal{F}) := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{für alle} \quad i \in I\}.$$

Wir definieren nun $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ wie folgt : Eine Menge U ist in $\mathcal{T}$, genau dann wenn es eine Familie $\mathcal{F}$ von Polynomen gibt, sodass $U = \mathbb{R}^n \setminus V(\mathcal{F})$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass falls $n = 1$ diese Topologie die koendliche Topologie auf $\mathbb{R}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass falls $n > 1$, diese Topologie nicht die koendliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$ ist

Diese Topologie ist sehr wichtig in der Algebra. Sie heißt Zariski Topologie.