Prof. Dr. Silvia Sabatini Wintersemester 2015/2016

Klausur Elementare Differentialgeometrie 9CP

04.04.16, 11:30 – 14:30

Es sind keine Hilfsmittel (Skript, Taschenrechner...) erlaubt. Täuschungsversuche, auch zugunsten anderer, führen zum Ausschluß von der Klausur. Taschen, Jacken und Mobiltelephone etc. sind im Hörsaal vorne zu deponieren. Wird das Mobiltelephon o.ä. nicht abgegeben, so gilt dies als Täuschungsversuch.
Begründen Sie stets Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung liefern keine Punkte.
Die Aufgaben sind auf den entsprechenden Blättern (einschließlich Rückseite) zu bearbeiten. Falls Sie die am Ende angehefteten Leerseiten benutzen, machen Sie bitte einen Verweis bei der jeweiligen Aufgabe. Die Notizzettel können **nicht** mit abgegeben werden. Verwenden Sie ausschließlich schwarze oder blaue Tinte/Kugelschreiber.
Die Klausur umfaßt 4 Aufgaben.

Name : **Matrikelnummer :**

Studiengang :

Unterschrift

Den unteren Teil dieses Blattes **nicht** beschriften!

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte
1			4	
2				
3				
Gesamt :				

Aufgabe 1. (4+6 Punkte)

Seien $a > 0$ und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} 2a\cos(t) + a\cos(2t) \\ 2a\sin(t) - a\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Kurve regulär?

b) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve β von $\beta(0)$ bis $\beta(\frac{\pi}{3})$.

Lösung 1.

a) Wir berechnen

$$\dot\beta(t) = 2a \begin{pmatrix} -\sin(t) - \sin(2t) \\ \cos(t) - \cos(2t) \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned}
\|\dot\beta(t)\| &= 4a^2 \left(\sin^2(t) + 2\sin(t)\sin(2t) + \sin^2(2t) + \cos^2(t) - 2\cos(t)\cos(2t) + \cos^2(2t)\right) \\
&= 8a^2 \left(1 + \frac{(e^{it} - e^{-it})(e^{2it} - e^{-2it})}{-4} - \frac{(e^{it} + e^{-it})(e^{2it} + e^{-2it})}{4}\right) \\
&= 8a^2 \left(1 - \frac{e^{3it} + e^{-3it}}{2}\right) = 8a^2 \left(1 - \cos(3t)\right).
\end{aligned}$$

Die Kurve β is regulär falls $1 - \cos(3t) \neq 0$ und das ist falls $t \neq \frac{2\pi k}{3}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
L(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \|\dot\beta(t)\| dt = \sqrt{8}a \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 - \cos(3t)} dt \\
&= \frac{\sqrt{8}a}{3} \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos(u)} du \\
&= \frac{\sqrt{8}a}{3} \int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2(\frac{u}{2})} du \\
&= \frac{4a}{3} \left(-2\cos(u/2)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8a}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. (5+5 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve mit nirgends verschwindender Krümmung. Erinneren Sie sich an die Frenet-Gleichungen für das begleitende Dreibein der Kurve α :

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{v}}(s) &= \kappa(s)\,\underline{n}(s),\\
\dot{\underline{n}}(s) &= -\kappa(s)\,\underline{v}(s) + \tau(s)\,\underline{b}(s),\\
\dot{\underline{b}}(s) &= -\tau(s)\,\underline{n}(s).
\end{aligned}$$

Sei $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(s,\varphi) = \alpha(s) + r\big(\cos(\varphi)\,\underline{n}(s) + \sin(\varphi)\,\underline{b}(s)\big), \qquad \text{wobei} \qquad r > 0.$$

a) Zeigen Sie, falls $0 < r < \frac{1}{\kappa(s)}$, dass $D_{(s,\varphi)}F$ Rang 2 hat.

b) Falls wir die Definitionsmenge der Funktion F geeignet einschränken, ist das Bild von F eine Fläche S. Zeigen Sie, dass

$$N(s,\varphi) = -(\cos(\varphi)\,\underline{n}(s) + \sin(\varphi)\,\underline{b}(s))$$

ein Einheitsnormalenfeld auf S definiert.

<u>Lösung</u> 2.

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s}(s,\varphi) &= \underline{v}(s) + r(\cos(\varphi)\dot{\underline{n}}(s) + \tau(s)\sin(\varphi)\dot{\underline{b}}(s)) \\ &= (1 - r\kappa(s)\cos(\varphi))\,\underline{v}(s) - r\tau(s)\sin(\varphi)\,\underline{n}(s) + r\tau(s)\cos(\varphi)\,\underline{b}(s).\end{aligned}$$

Hier haben wir die Frenet-Gleichungen benutzt. Und

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}(s,\varphi) = -r\sin\varphi\,\underline{n}(s) + r\cos(\varphi)\,\underline{b}(s).$$

Wir sehen, das in der basis $\{\underline{v}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ die Abbildung $D_{(s,\varphi)}F$ geschrieben werden kann als,

$$D_{(s,\varphi)}F = \begin{pmatrix} 1 - r\kappa(s)\cos(\varphi) & 0 \\ -r\tau(s)\sin(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ r\tau(s)\cos(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Wir sehen das die matrix rang zwei hat falls die komponent des ersten Vektors nicht null is (da die zweite Vektor nimmer gleich Null ist und erste komponent null). Aber das ist so falls $r < \frac{1}{\kappa(s)}$.

b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} \times \frac{\partial F}{\partial \varphi}(s,\varphi) &= -r\sin(\varphi)(1 - r\kappa(s)\cos(\varphi))\,\underline{v}(s) \times \underline{n}(s) - r^2\tau(s)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,\underline{b}(s) \times \underline{n}(s) \\ &\quad + r\cos(\varphi)(1 - \kappa(s)\cos(\varphi))\,\underline{v}(s) \times \underline{b}(s) - r^2\tau(s)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\,\underline{n}(s) \times \underline{b}(s) \\ &= -r(1 - r\kappa(s)\cos(\varphi))(\cos(\varphi)\,\underline{n}(s) + \sin(\varphi)\,\underline{b}(s)).\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt dass $\underline{v}(s) \times \underline{n}(s) = \underline{b}(s)$ und $\underline{v}(s) \times \underline{b}(s) = -\,\underline{n}(s)$. Normalisieren wir dieses Vektorfeld denn kriegen wir N.

Aufgabe 3. (6+4+5 Punkte)

Eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ ist eine Helix, falls die Tangenten $\dot{\alpha}(s)$ an die Kurve einen konstanten Winkel mit einem festen Einheitsvektor einschließen, d.h. es gibt $V \in \mathbb{R}^3$, sodass $\langle \dot{\alpha}(s), V \rangle = \cos(\theta) \neq 0$ für einen festen θ.

a) Sei α eine Helix mit nicht verschwindender Krümmung und Torsion, und sei $\{v, n, b\}$ das begleitende Dreibein. Zeigen Sie, dass $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \tan(\theta)$.

(*Hinweis :* Berechnen Sie $\langle \dot{n}, V \rangle$, und benutzten Sie die Frenet-Gleichungen.)

b) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $a, b > 0$ und $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zeigen Sie, dass die Kurve $\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \frac{a}{c} \int_0^s \sin(\varphi(t))dt \\ \frac{a}{c} \int_0^s \cos(\varphi(t))dt \\ \frac{b}{c} s \end{pmatrix}$$

eine Helix ist.

c) Nehmen Sie an, dass φ so gewählt ist, dass die Krümmung und Torsion von α nicht verschwinden. Zeigen Sie, dass $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \frac{a}{b}$.

Lösung 3.

a) Wir haben dass $\langle \dot\alpha(s), V\rangle = \cos(\theta)$ is konstant. Denn

$$\frac{d}{dt}\langle \dot\alpha(s), V\rangle = 0,$$

sodass

$$\langle \underline{n}(s), V\rangle = 0.$$

Wir sehen das $V = \cos(\theta)\underline{v}(s) + \sin(\theta)\underline{b}(S)$, d.h. $\langle \underline{b}(s), V\rangle = \sin(\theta)$. Und differentieren wir weiter

$$0 = \langle \dot{\underline{n}}(s), V)\rangle = -\kappa(s)\langle\, \underline{v}(s), V\rangle + \tau(s)\langle\, \underline{b}(s), V\rangle.$$

Wir sehen das $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \tan(\theta)$.

b)

$$\left\langle \frac{d}{ds}\alpha(s), \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{a}{c}\sin(\varphi(s)) \\ \frac{a}{c}\cos(\varphi(s)) \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{b}{c} = \cos\theta$$

c) Da $\theta = \arccos(\frac{b}{c})$, und $c^2 = a^2 + b^2$ haben wir dass $\sin\theta = \frac{a}{c}$, sodass

$$\tan\theta = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}.$$

<u>Aufgabe</u> 4. (3+3+4+2+3 Punkte)

Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, und $F : U \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(u,v) = \begin{pmatrix} u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

Nehmen Sie an, dass U so gewählt ist, dass F eine Fläche S parametrisiert.

a) Berechnen Sie die erste Fundamentalform.

b) Zeigen Sie, dass

$$N = \frac{1}{1+u^2+v^2} \begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsnormalenfeld auf S ist. Das Einheitsnormalenfeld N orientiert die Fläche S.

c) Berechnen Sie die Weingartenabbildung der orientierten Fläche bezüglich der Basis $\{\frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\}$.

d) Berechnen Sie die Gauss- und mittlere Krümmung der Fläche in $F(u,v)$.

e) Berechnen Sie Γ^v_{uu}.

<u>Lösung</u> 4.

a) Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 \\ 2vu \\ 2u \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} 2uv \\ 1-v^2+u^2 \\ -2v \end{pmatrix}.$$

Sodass

$$\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\rangle = (1-u^2+v^2)^2+4u^2(1+v^2) = (1+u^2+v^2)^2 = \langle \frac{\partial F}{\partial v}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\rangle.$$

und $\langle \frac{\partial F}{\partial u}(u,v), \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)\rangle = 0$. Wir sehen

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} (1+u^2+v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+u^2+v^2)^2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = (1+u^2+v^2)\begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass

$$N = \frac{\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)}{\|\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)\|} = \frac{1}{1+u^2+v^2}\begin{pmatrix} -2u \\ 2v \\ 1-u^2-v^2 \end{pmatrix}$$

ein Einheitsnormalenfeld ist.

c) Wir berechnen

$$\frac{\partial N}{\partial u}(u,v) = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 1-u^2+v^2 \\ 2vu \\ 2u \end{pmatrix} = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial N}{\partial v}(u,v) = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 2uv \\ 1+u^2-v^2 \\ -2v \end{pmatrix} = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$$

Sodass

$$W_p = -dN = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

d) Wir haben $K = \det W$ und $H = \frac{1}{2}\mathrm{Spur} W$, sodass

$$K = \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4} \qquad H = 0.$$

e) Da g_{ij} diagonal ist haben wir $\Gamma^v_{uu} = \frac{1}{2}g^{vv}(-\partial_v g_{uu}) = \frac{-2v}{1+u^2+v^2}$