

Vorlesung 21

Von Def. 8.1.3 bis
Korollar 8.2.7



Definition 8.1.3

Es sei I ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die differenzierbar in I ist. Nehmen wir an, dass $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ wieder differenzierbar in I ist. Dann heißt f *zweimal differenzierbar* und die Funktion

$$f'': I \rightarrow \mathbb{R} \quad f''(x) := (f')'(x)$$

wird **zweite Ableitung** genannt.

Höhere Ableitungen: induktiv definiert
(wenn sie existieren)

$$f^{(0)} := f$$

Angenommen, dass $f^{(n-1)}$ definiert wurden, dass sie differenzierbar ist:

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' \quad n\text{-te Ableitung}$$

* f : n -Mal differenzierbar in I , falls
 $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, $0 \leq k \leq n$

* f unendlich oft differenzierbar in I
falls $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert $\forall k \geq 0$

Beispiel : • $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
 $f'(x) = e^x$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k \geq 0$$

$$f^{(k)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

* die Exponentialfunktion ist unendlich oft differenzierbar

• $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar

• $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ unendlich oft diff.

* Übung (Leibnizsche Regel)

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -Mal differenzierbar

$\Rightarrow f \cdot g$ n -Mal differenzierbar, mit

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Notation : $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$C^0(I, \mathbb{R})$: Menge der stetigen Funktionen
 $I \rightarrow \mathbb{R}$

(Bmk : $C^0(I, \mathbb{R})$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$)

Def

$C^n(I, \mathbb{R})$: Menge der Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
die

- n -Mal differenzierbar sind
- $f^{(n)}$ stetig ist

Bmk: $f \in C^n(I, \mathbb{R}) \Rightarrow f^{(k)}$ stetig
für alle $0 \leq k \leq n$

$\forall k : 0 \leq k < n$, ist $f^{(k)}$ differenzierbar

$\Rightarrow$ (Satz 8.1.2.) $f^{(k)}$ stetig, $\forall 0 \leq k < n$

Def : $C^\infty(I, \mathbb{R})$: Menge der Funktionen
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, die unendlich oft
differenzierbar sind.

Bemk : $f \in C^\infty(I, \mathbb{R}) \Rightarrow f^{(k)}$ stetig, $\forall k \in \mathbb{N}$
(Satz 8.1.2)

$$C^0(I, \mathbb{R}) \supseteq C^1(I, \mathbb{R}) \supseteq C^2(I, \mathbb{R}) \supseteq \dots \supseteq C^\infty(I, \mathbb{R})$$

$$C^k(I, \mathbb{R}) \subseteq C^{k'}(I, \mathbb{R})$$

$$\forall k \geq k'$$

8.2 Funktionseigenschaften in Bezug auf ihre Ableitungen

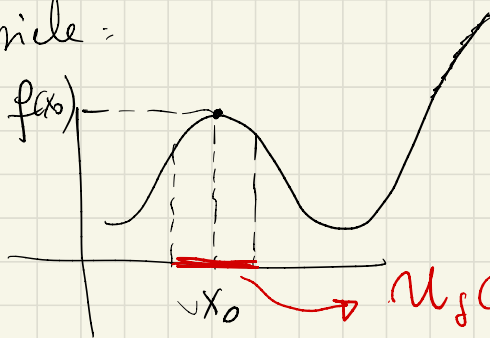
Definition 8.2.1

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$.

- x_0 ist ein **globales Maximum** von f in I , falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in I$;
- x_0 ist ein **globales Minimum** von f in I , falls $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in I$;
- x_0 ist ein **lokales Maximum** von f , falls eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ existiert, sodass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$;
- x_0 ist ein **lokales Minimum** von f , falls eine Umgebung $U_\delta(x_0)$ existiert, sodass $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U_\delta(x_0) \cap I$;

Lokale bzw. globale Maxima oder Minima werden **lokale bzw. globale Extrema** genannt.

Beispiele:



lokales Maximum
(nicht globales)

$f|_{U_\delta(x_0)}$ hat ein
globales Maximum

Ziel : die Ableitung f' zu benutzen,
um die Extrema zu analysieren
(Existenz)

Bwk : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$...

- * Für x_0 , die keine Häufungspunkte sind
- * Für x_0 , in dem $f'(x_0)$ existiert nicht...

• Wir werden annehmen:

- $x_0 \in I$ ein innerer Punkt ist
($\Rightarrow x_0$ Häufungspunkt)
- $f'(x_0)$ existiert

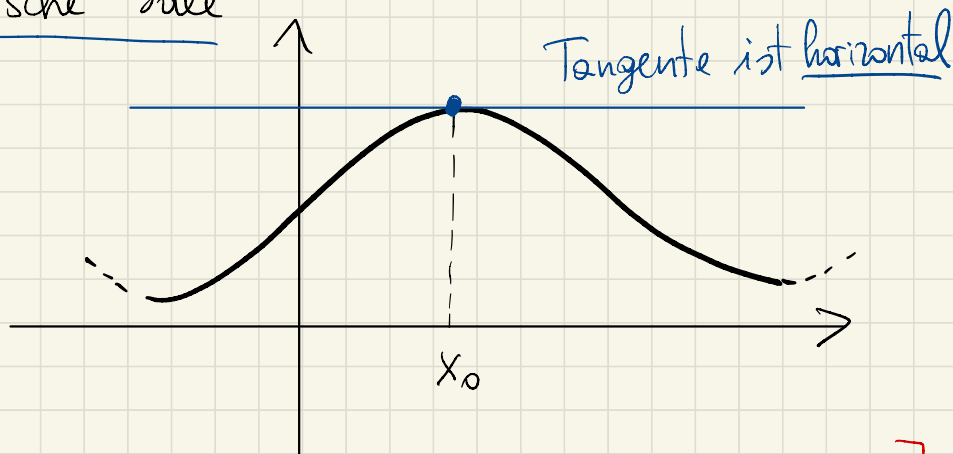
Satz 8.2.1

(Satz von Fermat) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und nehmen wir an, dass x_0 ein Extremum ist. Wenn

- (i) x_0 ein innerer Punkt von I ist und
- (ii) $f'(x_0)$ existiert,

dann muss $f'(x_0) = 0$ sein.

Geometrische Idee



Beweis: $x_0 \in I$ innerer Punkt und $f'(x_0) = 0$
 ~~$\Rightarrow$~~ x_0 ein Extremum ist

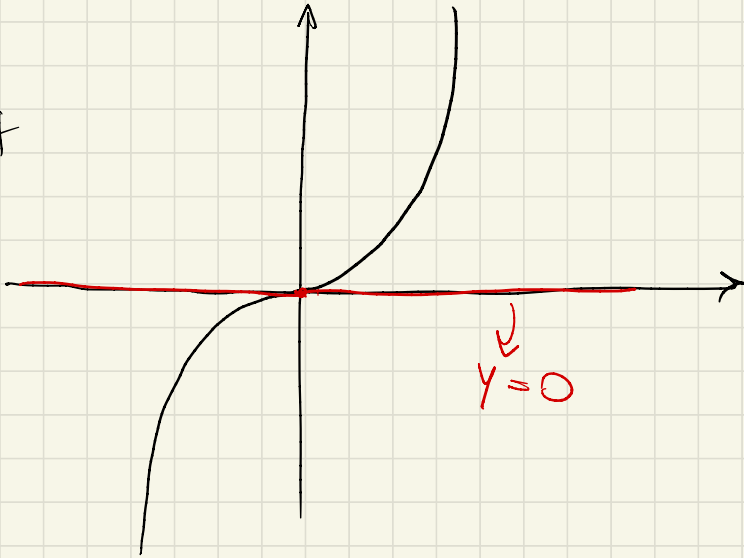
Bei: $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ aber $x_0 = 0$ ist
kein Extremum von f !

$$f(x) = x^3$$

f ist streng monoton wachsend

↓
 f besitzt
kein
Extremum



linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = l \in \mathbb{R} : \iff$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \underbrace{(x_0 - \delta, x_0)}_{x < x_0} \cap I \text{ ist} \\ |h(x) - l| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = l \in \mathbb{R} : \iff$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \underbrace{(x_0, x_0 + \delta)}_{x > x_0} \cap I \text{ ist} \\ |h(x) - l| < \varepsilon \end{array} \right\}$$

Lemma 8.2.2

Es sei $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und x_0 ein Häufungspunkt von $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann existiert $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x)$ existieren und sie gleich sind. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x).$$

Beweis (Übung)

Satz 8.2.3

Es sei $h, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen und x_0 ein Häufungspunkt von I .

- Nehmen wir an, dass die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren. Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\underline{h(x) \leq g(x)} \quad \text{für alle } x \in \underline{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}, \quad \text{dann ist } \underline{\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

- Nehmen wir an, dass die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)$ (bzw. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$) existieren.

Falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\underline{h(x) \leq g(x)} \quad \text{für alle } x \in \underline{(x_0 - \delta, x_0)} \quad \text{dann ist } \underline{\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x)}$$

(bzw. falls ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$\underline{h(x) \leq g(x)} \quad \text{für alle } x \in \underline{(x_0, x_0 + \delta)} \quad \text{dann ist } \underline{\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)}.)$$

Beweis, Übung

Satz 8.2.1

(Satz von Fermat) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und nehmen wir an, dass x_0 ein Extremum ist. Wenn

(i) x_0 ein innerer Punkt von I ist und

(ii) $f'(x_0)$ existiert,

dann muss $f'(x_0) = 0$ sein.

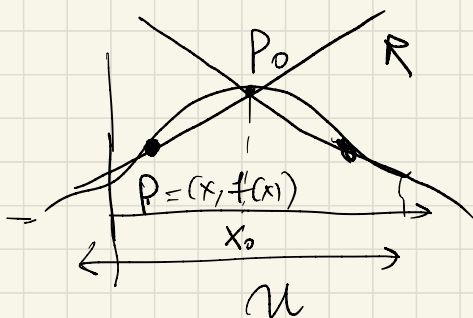
Beweis :

Brnk : Wir können annehmen, dass x_0 ein
⊗ lokales oder globales Maximum ist
(bzw. x_0 lok.-oder glob. Minimum ist)

$$\rightarrow \left[\begin{array}{l} \exists \mathcal{U} \text{ von } x_0 \text{ haben, sodass} \\ \underline{f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \mathcal{U} \subseteq I} \end{array} \right]$$

$$f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \quad \left(\begin{array}{l} x_0 \text{ ein globales Maximum} \\ \text{von } f|_{\mathcal{U}} \end{array} \right)$$

$$\mathcal{U} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \delta > 0$$



④

$$\underline{g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ ist } f(x) \leq f(x_0)$$

$$\underbrace{x < x_0, \quad f(x) - f(x_0) \leq 0}_{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ ist } \underline{g(x) \geq 0} \quad (1)$$

$$(2) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ ist } \left. \begin{array}{l} f(x) - f(x_0) \leq 0 \\ x - x_0 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ ist } g(x) \leq 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \geq 0$$

Satz 8.2.3 (h=0)

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \leq 0$$

Satz 8.2.3

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \geq 0$$

Satz 8.2.3 ($h=0$)

$$(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) \leq 0$$

Satz 8.2.3

$f'(x_0)$ existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

($\Rightarrow$ Lemma)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$$

$\parallel$
 $\bigcirc$

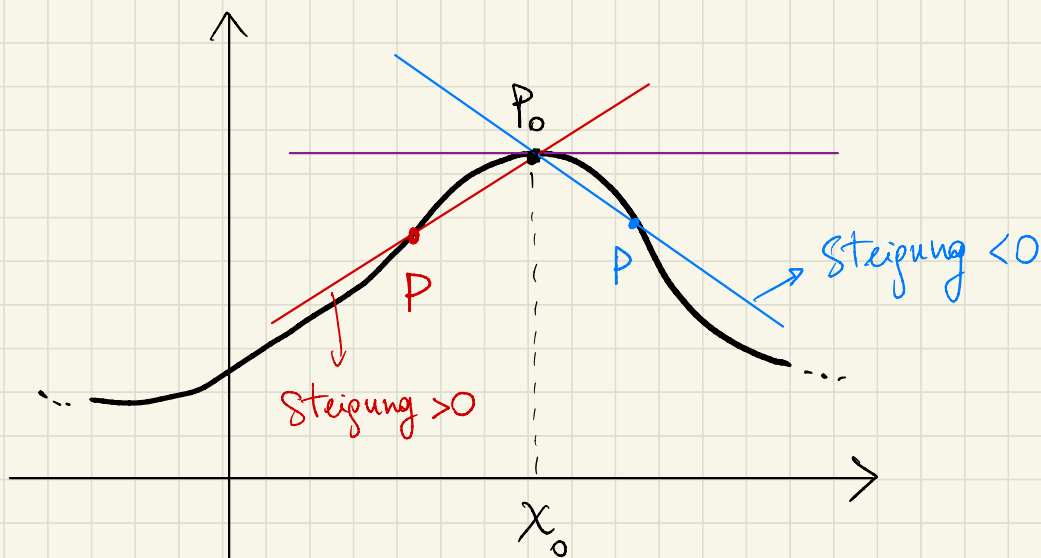
$\Leftarrow$

≥ 0

≤ 0



Geometrische Bedeutung?



$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

: Steigung der Gerade
durch $P = (x, f(x))$
und $P_0 = (x_0, f(x_0))$

Definition 8.2.2

Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$ ein innerer Punkt von I . Nehmen wir an, dass f differenzierbar in x_0 ist, und dass $f'(x_0) = 0$. Dann wird x_0 ein **kritischer** oder **stationärer Punkt** von f genannt.

Bwk : 1. Für die Suche nach Extremes, die innere Punkte sind, und in dem f differenzierbar ist, müssen wir zuerst

(*) $f'(x) = 0$ lösen

2. ist nicht genug, um zu wissen, dass $x_0: f'(x_0) = 0$ ein Extremum ist!
($f(x) = x^3 \dots$)

3. Es kann kompliziert sein, (*) explizit zu lösen!

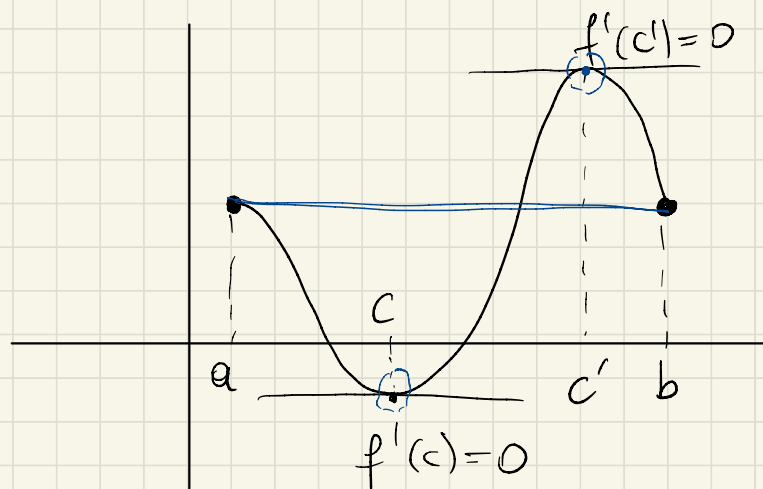
Satz 8.2.4

(Satz von Rolle)

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig;
- (ii) f ist differenzierbar in (a, b) ;
- (iv) $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass $f'(c) = 0$.



Beweis

$[a, b]$ kompakt $\Rightarrow f$ hat ein globales
Kor. Maximum $(M = f(x_M))$
5.5-2. und ein globales Min.
 $(m = f(x_m))$

$$(f([a, b]) = [m, M])$$

(*) $m = M \Rightarrow f$ konstant ist $\Rightarrow$
 $f'(c) = 0 \quad \forall c \in (a, b) \quad \checkmark$

(*) $m < M \Rightarrow$ es kann nicht sein, dass
 $\{x_m, x_M\} = \{a, b\}$

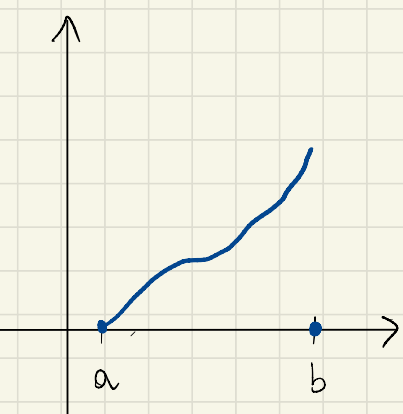
weil (Hyp. Rolle) $f(a) = f(b)$ aber
 $m = f(x_m) < M = f(x_M)$

$\Leftrightarrow$ entweder x_m oder (x_M) innerer Punkt ist
(z.B. x_m innerer Punkt)

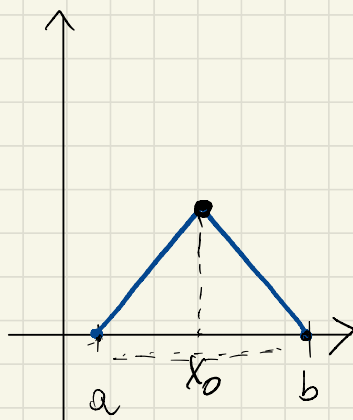
$\Rightarrow$
Fermat $f'(x_m) = 0$



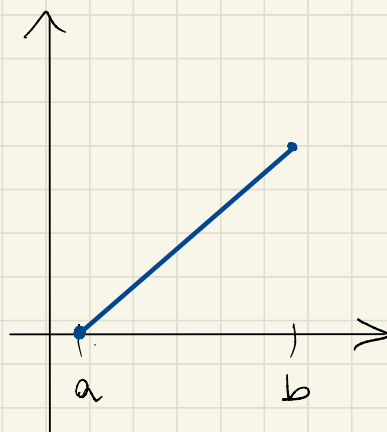
In diesen Beispielen gibt es kein $c \in (a, b)$:
 $f'(c) = 0$



- ↓ $[a, b]$
- (i) f nicht stetig
 - (ii) $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diff.
 - (iii) $f(a) = f(b)$



- f erfüllt
 (i) & (iii)
 f erfüllt
 nicht
 (ii)



- f erfüllt
 (i) (ii)
 aber nicht
 (iii)

Satz 8.2.5

(Satz von Cauchy - Der Mittelwertsatz I) Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) f und g sind stetig in $[a, b]$;
- (ii) f und g sind differenzierbar in (a, b) .

Dann existiert ein $c \in (a, b)$, sodass

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c). \quad (8.2.5)$$

Beweis

$$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \overbrace{[f(b) - f(a)]g(x)} + \underbrace{- [g(b) - g(a)]f(x)}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \cdot h \text{ stetig in } [a, b] \quad (\text{Satz 5.2.2}) \\ \cdot h \text{ diff. in } (a, b) \quad (\text{Satz 8.1.3}) \\ \cdot h(a) = h(b) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ erfüllt h die Hypothesen von Rolle

$$\Rightarrow \exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$$

$$h'(x) = \underbrace{[f(b) - f(a)]g'(x)} - [g(b) - g(a)]f'(x)$$

Bwk: Nehmen wir an, dass $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
(und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und
 $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diff.)

Denn: $g(a) \neq g(b)$ (Rolle)

In diesem Fall:

$$[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Neuformulierung (Satz von Cauchy)

Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- (i) f und g sind stetig in $[a, b]$;
- (ii) f und g sind differenzierbar in (a, b) ;
- (iii) $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Dann existiert ein $c \in (a, b)$, sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (8.2.6)$$

Satz 8.2.6

(Satz von Lagrange - Mittelwertsatz II)

Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

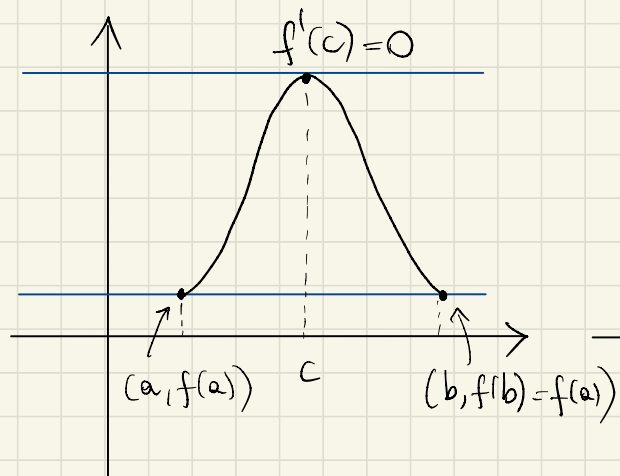
- (i) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig;
- (ii) f ist differenzierbar in (a, b) .

Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, sodass

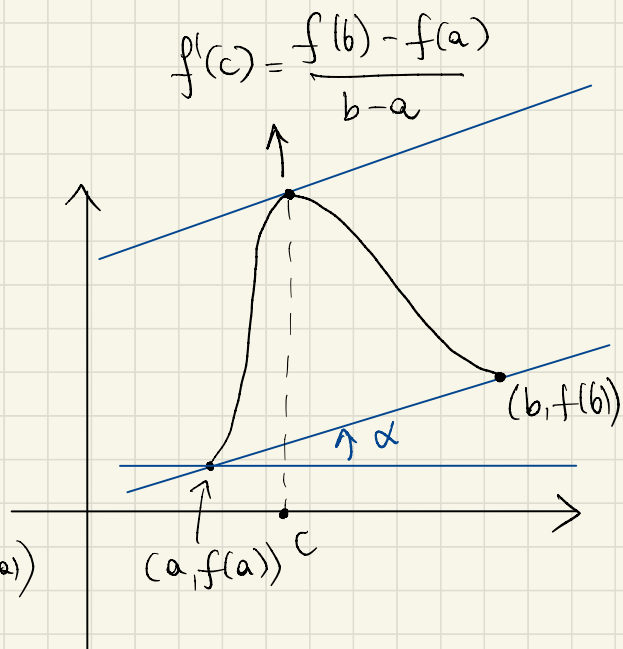
$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (8.2.7)$$

Beweis

Satz von Cauchy, $g(x) = x$, $g'(x) = 1 \neq 0$



Rolle



Lagrange

Korollar 8.2.7

Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann

$$1. \underline{f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)} \iff f \text{ monoton wachsend}$$
$$* \left[f \text{ monoton wachsend} \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \right]$$

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad g: \underbrace{(a, b) \setminus \{x_0\}}_A \rightarrow \mathbb{R}$$

Beweis: $f \text{ monoton wachsend} \Rightarrow \underline{g(x) \geq 0 \quad \forall x}$

$$\Rightarrow x_0 \in (a, b)$$
$$\underline{f'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{g(x)}_{\geq 0} \xRightarrow{\text{Satz 8.2.3.}} f'(x_0) \geq 0 //$$

$$* \left[f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ monoton wachsend} \right]$$

$$x, y \in (a, b) : \text{Lagrange für } f|_{[x, y]} : \text{stetig}$$

$$\bullet (f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ diff.} \Rightarrow f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \Rightarrow$$

$$[x, y] \subseteq (a, b) \rightarrow f: [x, y] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$\bullet f: (x, y) \rightarrow \mathbb{R} \text{ diff.}$$

$\Rightarrow$ Lagrange für $f|_{[x,y]}$:

$$\exists c \in (x,y) : \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} = \frac{f(y) - f(x)}{\underbrace{(y-x)}_{\geq 0}} \} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f monoton wachsend



2. $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f$ monoton fallend

3. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend

(4. $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton fallend)

(Adaptierung ...)

1) $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend
Lagrange

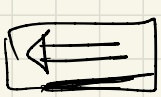
Beweis:

f streng monoton wachsend ~~$\Rightarrow$~~ $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$

Beispiel: $f(x) = x^3$

f ist streng mon. wachsend aber $f'(0) = 0$!!

5. $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b)$ $\Leftrightarrow$ f konstant in (a,b) ist



✓

$\Rightarrow$ $(x,y \in (a,b))$, $x < y$, $f|_{[x,y]}$
(Lagrange): $\exists \underline{c} \in (x,y)$

$$0 = \underbrace{f'(c)} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow \underline{f(x) = f(y)}$$

$(x,y \text{ beliebig}) \Rightarrow f \text{ konstant}$

