KG3-10-2

Prof. Dr. H. Lange
T. Fimmel

Klausur zur Analysis I

Montag, den 29.3.1999

AUFGABE 1: (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge der reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ (als Vereinigung von Intervallen), die der folgenden Ungleichung genügen:

$$|x^2 + |2x - 1|| < 1 \quad .$$

AUFGABE 2: (9 Punkte)

Gegeben seien die folgenden drei Teilmengen der komplexen Zahlenebene

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{ z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < Re(z) < 1, \; -1 < Im(z) < 1 \} \\ Z_2 &= K_1(1+i) \text{ die offene Kreisscheibe vom Radius 1 um } 1+i \\ Z_3 &= \{ r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \,|\, r \in \mathbb{R}, r > 0, \varphi \in \mathbb{R}, \tfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi \} \,. \end{aligned}$$

Zeichnen Sie diese Mengen in der komplexen Ebene und untersuchen Sie je zwei der drei Mengen auf nichtleeren Durchschnitt.

AUFGABE 3: (8 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonaccizahlen, d.h.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \qquad a_1 = a_2 = 1 \quad .$$

Zeigen Sie, daß diese Folge streng monoton wachsend ist und gegen $+\infty$ konvergiert.

AUFGABE 4: (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(i) $a_n = n - \frac{n^2+1}{n}$,

(ii) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

(iii) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}$,

(iv) $a_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$,

auf Konvergenz und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz ihren Grenzwert.

AUFGABE 5: (10 Punkte)

Gegeben sei die Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2} \quad .$$

(i) Bestimmen Sie die Menge aller Häufungspunkte dieser Folge.

(ii) Bestimmen Sie Infimum und Supremum dieser Folge.

(iii) Untersuchen Sie die Folge auf Existenz eines Minimums und Maximums und geben Sie dieses gegebenenfalls an.

U43-10-2

AUFGABE 6: (8 Punkte)

Sei a eine reelle Zahl. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch die Vorschrift

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ a & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

definiert. Untersuchen Sie f in allen Punkten des Definitionsbereiches in Abhängigkeit von der Wahl von a auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

AUFGABE 7: (8 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

AUFGABE 8: (6 Punkte)

Zeigen Sie die Konvergenz der Reihen

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$,

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}}$.

und bestimmen Sie ihre Summe.

AUFGABE 9: (9 Punkte)

Sei $\alpha > 0$ eine reelle Zahl. Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R(\alpha)$ der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n \quad .$$

Bestimmen Sie für die Werte α, für die $R(\alpha) \neq +\infty$ gilt, die Konvergenz der Reihe in $x = R(\alpha)$ und $x = -R(\alpha)$.

AUFGABE 10: (9 Punkte)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$ ein Punkt. f heißt in x_0 streng monoton wachsend, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ gilt, daß die Bedingung $x < x_0$ resp. $x > x_0$ die Bedingung $f(x) < f(x_0)$ resp. $f(x) > f(x_0)$ impliziert.
Zeigen Sie:

(i) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion, so ist f in allen $x_0 \in I$ streng monoton wachsend.

(ii) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ in allen $x_0 \in I$ streng monoton wachsend, so ist f streng monoton wachsend.