Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
16.12.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 9

Diese Übungen müssen bis spätestens 18 Uhr Mittwoch 13.01.16 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen. Dieses Übungsblatt ist den letzte für die Studenten die die 6CP Prüfung machen.

Aufgabe 1. (15 Punkte)

Eine Drehfläche (oder Rotationsfläche) S entsteht, wenn man eine ebene Kurve $c : I \to \mathbb{R}^3$, die, sagen wir, in der $(x-z)$-Ebene liegt (d.h. $c(t) = (c_1(t), 0, c_3(t))$), um die z-Achse rotiert. Man kann beweisen (aber das tun wir hier nicht), falls die Kurve regulär ist und ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist, und die z-Achse nicht schneidet, dass die Fläche S regulär ist. Wir nehmen an, dass die Kurve c diese Eigenschaften hat.

a) Sei $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Differential von $F : I \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ gegeben durch

$$F(t,\varphi) = \begin{pmatrix} c_1(t)\cos(\varphi) \\ c_1(t)\sin(\varphi) \\ c_3(t) \end{pmatrix}$$

Rang 2 hat.

b) Berechnen Sie die Tangentialebene durch $F(t,\varphi) \in S$.

c) Berechnen Sie die erste Fundamentalform in dieser lokalen Parametrisierung.

Aufgabe 2. (12 Punkte)

Sei $0 < r < R$. Der Torus $\mathbb{T}$ ist die Drehfläche die durch Rotation der Kurve

$$c(t) = \begin{pmatrix} r\cos(t) + R \\ 0 \\ r\sin(t) + R \end{pmatrix}$$

um die z-Achse entsteht.

a) Skizzieren Sie den Torus und zeignen Sie die Parameter r und R in Ihre Skizze ein.

b) Berechnen Sie die Erste Fundementalform in der lokalen Parameterisierung der Aufgabe 1.

c) Sei $p \in \mathbb{T}$. Berechnen Sie alle Punkte $q \in \mathbb{T}$, sodass $T_p\mathbb{T} = T_q\mathbb{T}$.

Aufgabe 3. (13 Punkte)

Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Kurve $c(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$. Sei S die Drehfläche die durch Rotation der Kurve c um die z-Achse entsteht.

a) Zeigen Sie, dass S keine reguläre Fläche ist.

b) Finden Sie einen Punkt $p \in S$, sodass $S \setminus \{p\}$ eine reguläre Fläche ist.

c) Beweisen Sie, dass $S \setminus \{p\}$ eine reguläre Fläche ist.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Seien $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und $N : S \to S^2$ die Einheitsnormalenfeld $N(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Weingartenabbildung

$$W_p : T_pS^2 \to T_pS^2,$$

wobei $p = (x, y, z) \in S^2$.