Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Caviedes Castro

Universität zu Köln
30.4.2018

Topologie: Übungsblatt 4

Diese Übungen müssen bis spätestens 12 Uhr Montag 7.5.2018 in den Briefkasten im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackern Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum und $Z \subset X$ eine Teilmenge mit $|Z| = +\infty$. Beweisen Sie, dass $D(Z) \neq \emptyset$, d.h. Z besitzt einen Häufungspunkt.

Aufgabe 2. (10 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{T})$ ein hausdorffscher Raum und $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine Folge nichtleerer kompakter Unterräume sodass

$$X \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$$

Beweisen Sie, dass

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset\,.$$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Es sei $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, wobei $\mathcal{E}$ die euklidische Topologie ist. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ nicht kompakt ist, d.h. finden Sie eine Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Aufgabe 4. (10 Punkte)

Betrachten Sie $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ auf X gegeben durch

$$P \sim Q :\Longleftrightarrow \begin{array}{l} P = Q \textit{ oder} \\ P = (x,a) \textit{ und } Q = (x,b), \;\; x \in [0,1] \textit{ und } \{a,b\} = \{0,1\} \textit{ oder} \\ P = (a,y) \textit{ und } Q = (b,y), \;\; y \in [0,1] \textit{ und } \{a,b\} = \{0,1\} \textit{ oder} \\ P = (0,0) \textit{ und } Q = (1,1) \textit{ oder} \\ P = (0,1) \textit{ und } Q = (1,0). \end{array}$$

Wir betrachten den Quotientenraum $(X/\sim, \mathcal{E}_\pi)$, wobei $\mathcal{E}_\pi$ die Quotiententopologie ist, induziert von der (Teilraum) euklidischen $\mathcal{E}$ Topologie auf X.
Es sei $T := S^1 \times S^1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ mit Teilraumtopologie $\mathcal{E}_T$ induziert von der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^4$ und
$\widetilde{T} := \{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - 2\right)^2 + y_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ mit Teilraumtopologie $\mathcal{E}_{\widetilde{T}}$ induziert von der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^3$.

a) Skizzieren Sie die Teilmenge $\widetilde{T}$.
b) Beweisen Sie, dass die topologischen Räume $(X/\sim, \mathcal{E}_\pi)$, $(T, \mathcal{E}_T)$ und $(\widetilde{T}, \mathcal{E}_{\widetilde{T}})$ homöomorph sind.

(*Hinweis* : Betrachten Sie die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definiert als

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = ((x_1+2)x_3, (x_1+2)x_4, x_2).$$

Was ist das Bild von T?)

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

a) Ist $\mathbb{R}/\sim$ Hausdorffsch?
b) Beschreiben Sie die Topologie auf $\mathbb{R}/\sim$ explizit.