Mathematisches Institut
Prof. Dr. Sabatini
Assistent: Dr. Rot

Universität zu Köln
28.10.2015

Elementare Differentialgeometrie: Übungsblatt 2

Diese Übungen müssen bis spätestens Mittwoch 04.11.14 18 Uhr, in den Briefkästen im studentischen Arbeitsraum des MI (3. Stock) abgegeben werden. Schreiben Sie Ihre Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Übungsgruppe auf Ihre Abgabe und tackeren Sie alles zusammen.

Aufgabe 1. (10 Punkten)

Zeigen Sie, dass sich die Krümmung nicht andert, wenn eine Kurve, durch eine orientierungserhaltende Umparametrisierung, umparametrisiert wird.

Aufgabe 2. (10 Punkten)

Zeigen Sie, dass sich die Krümmung unter orientierungserhaltenden Isometriën nicht andert.

Aufgabe 3. (15 Punkten)

Sei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve gegeben durch

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(2t)).$$

a) Zeigen Sie, dass die Kurve periodisch ist und berechnen Sie die Periode L. Das heißt : Finden Sie die kleinste Zahl $L \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass $\alpha(t + L) = \alpha(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
b) Finden Sie alle Punkte $t \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha(t) = (0, 0)$.
c) Finden Sie die Tangente(n) der Kurve in $(0, 0)$.
d) Berechnen Sie einen Einheitstangentialvektor und einen Einheitsnormalenvektor der Kurve.
e) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve und zeigen Sie dass die Krümmung periodisch ist. Was ist die Periode ?

Aufgabe 4. (15 Punkten)

Sei $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve

$$\beta(t) = (e^t, \cosh t).$$

a) Berechnen Sie die Krümmung der Kurve β.

b) Wo ist die Krümmung maximal und was ist die maximale Krümmung ?