LKG 3-34-1

Analysis I WS 2002/03 Prof. Dr. Geiges

Aufgabe 1. (a) (5 Punkte) Für welche reellen Zahlen x gilt

$$x(2-x) > 1 - |x| \,?$$

(b) Es seien $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Man zeige

$$\text{(i)(4)} \quad \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1 \iff |z| = 1,$$

$$\text{(ii)(3)} \quad \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \iff |z| < 1.$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß gilt:

(a)(9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b)(12) $p^n > n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $p \geq 3$ ($p \in \mathbb{N}$).

Aufgabe 3. Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, und geben Sie an, ob ein Maximum bzw. Minimum vorliegt.

(a)(6) $M_1 := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$

(b)(6) $M_2 := \left\{\frac{x}{1+x^2} \colon x \in \mathbb{R}\right\}$

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert oder, falls keine Konvergenz vorliegt, den Limes superior und Limes inferior.

(a)(3) $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(3n+2)}$

(b)(4) $a_n = \sqrt[n]{n}$

(c)(4) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

(d)(3) $a_n = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n\right) + \dfrac{1}{n}$

Aufgabe 5. (a)(5) Geben Sie die präzise Definition dafür, daß eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{C}$ konvergiert.

(b)(10) Zeigen Sie: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn alle drei Folgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

Aufgabe 10. (a)(3) Berechnen Sie die Ableitung der Tangensfunktion und drücken Sie diese wieder mit Hilfe des Tangens aus.

(b)(5) Definiere

$$T(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie $T(n+2) = \dfrac{1}{n+1} - T(n)$.

(c)(4) Folgern Sie aus (b), daß $\lim\limits_{n\to\infty} T(n) = 0$.

(d)(4) Zeigen Sie $T(0) = \pi/4$ und $T(1) = \frac{1}{2}\log 2$.

(e)(7) Zeigen Sie durch Induktion nach n, daß

$$T(2n) = (-1)^{n+1}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(f)(3) Folgern Sie aus (c) und (e), daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\nu - 1} = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 11. Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a)(3) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+9}\,dx$

(b)(3) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

(c)(4) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x^2}\,dx$

(d)(5) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$

(e)(6) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$

Aufgabe 12. (14) Zeigen Sie: Die archimedische Spirale $r = c\varphi$ ($c > 0$, $0 \le \varphi \le \pi/2$) und die daraus durch Spiegelung an der y-Achse entstehende Kurve schneiden aus dem Kreis vom Radius $\frac{1}{2}c\pi$ ein Stück aus, dessen Flächeninhalt ein Sechstel der Kreisfläche beträgt (Zeichnung!).