

Vorlesung 22



Vom letzten Mal...

Korollar 8.2.7 Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die differenzierbar in (a, b) ist.

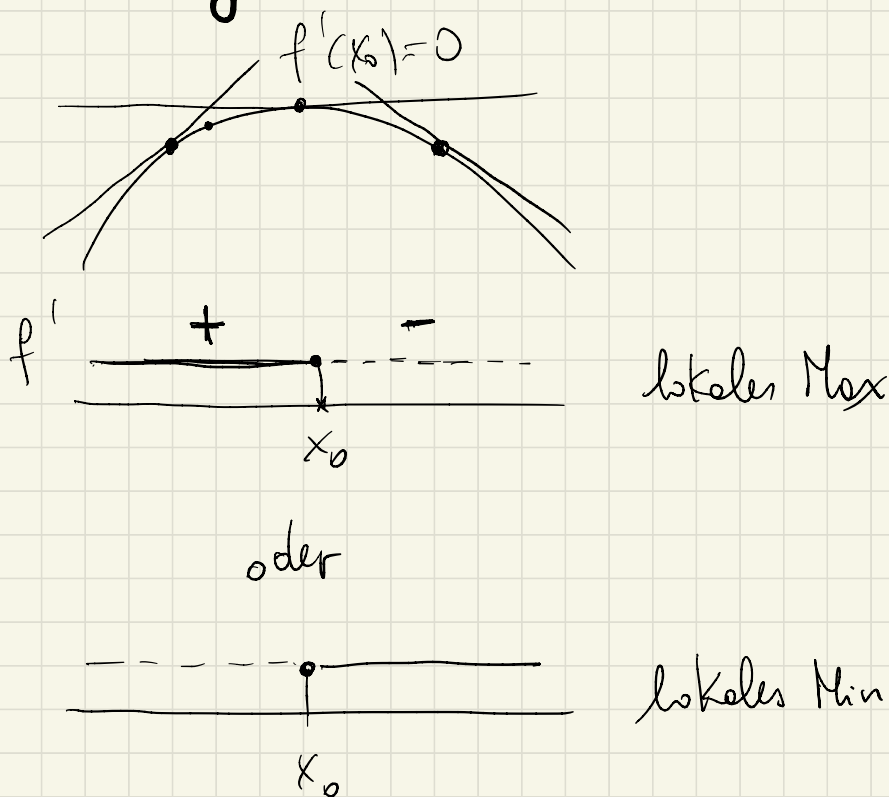
1. $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ monoton wachsend;
2. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ monoton fallend;
3. $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend;
4. $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b) \Rightarrow f$ streng monoton fallend;
5. $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ konstant in (a, b) ist.

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{wobei} \quad \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \geq 0$$

Proposition 8.2.8

Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$. Wenn eine Umgebung $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ von x_0 existiert, so dass $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ und $f'(x) \leq 0$ (bzw. $f'(x) \geq 0$) für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, dann ist x_0 ein lokales Maximum (bzw. ein lokales Minimum).

Beweis: Übung (Korollar)



8.3 Taylorapproximation und Taylorpolynome

Wir wollen (lokal) eine Funktion
mit einem Polynom approximieren ...

Definition 8.3.1

Es seien f und g zwei Funktionen, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, mit x_0 Häufungspunkt für I .
Es sei $g(x) \neq 0$ in $I \setminus \{x_0\}$. Dann sagen wir, dass

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0, \text{ wenn } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ähnlich, falls existiert $N > 0$, sodass $g(x) \neq 0$ für alle $x > N$ (bzw. $g(x) \neq 0$ für alle $x < N$), dann

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow \pm\infty, \text{ wenn } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Das Symbol "o" ist ein sogenanntes *Landau-Symbol*, und lautet "klein o".

Bedeutung: $f(x) = o(g(x))$ $x \rightarrow x_0$ bedeutet ...

" f geht gegen Null schneller als g "
für $x \rightarrow x_0$

$$\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \exists \mathcal{U}(x_0) : \begin{array}{l} |f(x)| < |g(x)| \\ \forall x \in \mathcal{U}(x_0) \end{array} \right]$$

Beispiele : * $\underbrace{f(x) = o(1)}_{x \rightarrow x_0}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ "f infinitesimal für $x \rightarrow x_0$ "

* $(x-x_0)^k = o((x-x_0)^h)$ $x \rightarrow x_0 \quad \forall k > h$

$$\left[\frac{(x-x_0)^k}{(x-x_0)^h} \right] = (x-x_0)^{\overbrace{(k-h)}^{>0}} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Bemerk : $f(x) = o((x-x_0)^k)$ $x \rightarrow x_0, k \geq 1$
 $\Rightarrow f(x) = o((x-x_0)^h)$ $x \rightarrow x_0, 0 \leq h \leq k$

$$f(x) = o((x-x_0)^k)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{(x-x_0)^h} \cdot \frac{(x-x_0)^{k-h}}{(x-x_0)^{k-h}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^{\overbrace{(k-h)}^{>0}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k} = 0$$

* Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$.

* Können wir ein Polynom $T_1(x)$ ersten Grades finden, dass f in einer Umgebung von x_0 "approximiert"?

Satz 8.1.1:

f differenzierbar in $x_0 \iff$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\iff f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$T_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$T_1 \text{ erfüllt: } \begin{aligned} &\Rightarrow (f - T_1)(x) = o(x - x_0) \\ &\Rightarrow \left[(f - T_1)(x) = \right. \\ &\quad \left. = o(1) \right] \end{aligned}$$
$$\Rightarrow f(x) - T_1(x) = o(x - x_0)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Stetigkeit von } f \Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0) \quad x \rightarrow x_0 \\ T_1(x) \rightarrow f(x_0) \quad x \rightarrow x_0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - T_1(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0 \end{array} \right]$$

Lemma 8.3.1

Es sei I ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Dann gibt es genau ein Polynom ersten Grades $T_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, sodass

$$f(x) - T_1(x) = o(x - x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \quad (8.3.1)$$

und zwar (8.3.1) gilt genau dann, wenn $a_0 = f(x_0)$ und $a_1 = f'(x_0)$.

Beweis

$$T_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$f(x) - T_1(x) = o(x - x_0) \Rightarrow f(x) - T_1(x) = o(1)$$

$$* f \text{ diff. in } x_0 \Rightarrow f \text{ stetig in } x_0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{(f(x) - T_1(x))} &= f(x_0) - a_0 \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \underline{a_0 = f(x_0)} \end{aligned}$$

$$* f \text{ diff. in } x_0 \Rightarrow \exists! a \in \mathbb{R} :$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$a = f'(x_0) \Rightarrow \left[\begin{aligned} (f - T_1)(x) &= o(x - x_0) \\ \Rightarrow a_1 = a &= f'(x_0) \end{aligned} \right]$$

Bwk : Unter allen Polynomen ersten Grades,
ist $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
das beste Polynom, das $f(x)$ in einer
Umgebung von x_0 approximiert.

Können wir besser machen?

Es ist nicht im Allgemeinen mehr,

{ dass $\underbrace{(f - T_1)(x)} = o((x - x_0)^k)$ für $k > 1$

$$0 = o((x - x_0)^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Behauptung : Für eine "schöne Kategorie"

Für einen festen x_0 von Funktion, $\exists$

$\underbrace{T_k}_{(T_k)}(x)$ k -ten Grades, sodass
in einer Umgebung von x_0

$$\underbrace{(f - T_k)(x)} = \underbrace{o((x - x_0)^k)}_{\Rightarrow o((x - x_0)^h) \quad \forall h \leq k}$$

... heuristisch...

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Was ist ein Polynom Grades höchstens k ,
das f (in einer Umgebung von x_0)
approximiert?

$T_k(x) :=$ "Trunkierung von f " bis zum Grad k .

$$T_k(x) := \begin{cases} (a) \quad \sum_{i=0}^k a_i (x-x_0)^i & , k \leq n \\ (b) \quad f(x) = \sum_{i=0}^n a_i (x-x_0)^i & k > n \end{cases}$$

$$\text{Dn (b)} \quad \underline{f - T_k} = 0 = o((x-x_0)^k) \quad \forall k$$

$$\text{Dn (a)} \quad f(x) - T_k(x) = \sum_{\substack{i=0 \\ \underline{i=k+1}}}^n a_i (x-x_0)^i =$$

$$= (x-x_0)^{k+1} \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ (i=j+k+1)}}^{n-k-1} a_i (x-x_0)^j = o((x-x_0)^k)$$

$\leadsto \gamma_n(a)$ und (b)

$$\underbrace{\left(f - T_k \right)(x) = o\left((x-x_0)^k\right), x \rightarrow x_0}$$

* Wie könnten wir die Koeffizienten a_i umschreiben?

$$f(x) = f^{(0)}(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k \Rightarrow f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \underbrace{(x-x_0)^{k-1}} \Rightarrow f'(x_0) = 1 \cdot a_1$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2} \Rightarrow f''(x_0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2$$

Übung (Induktion):

$$f^{(k)}(x) = \sum_{h=k}^n h(h-1)(h-2) \cdots (h-k+1) a_h (x-x_0)^{h-k}$$

und $f^{(k)}(x_0) = k(k-1) \cdots 1 \cdot a_k = k! a_k$

Definition 8.3.2

Es sei I ein offenes Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Nehmen wir an, dass f n -mal differenzierbar in x_0 ist, für ein $n \in \mathbb{N}$. Das n -te **Taylorpolynom** von f bei x_0 ist definiert durch

$$T_n(x) = \sum_{h=0}^n \left(\frac{f^{(h)}(x_0)}{h!} \right) (x - x_0)^h.$$

Wenn $x_0 = 0$ wird $T_n(x)$ auch n -te **Mac Laurin-Polynom** genannt.

Definition 8.3.3

Es seien I ein offenes Intervall, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $x_0 \in I$ ein Punkt, in dem $f^{(k)}(x_0)$ und $g^{(k)}(x_0)$ existieren, für alle $0 \leq k \leq n$. Dann haben f und g eine **Berührung n -ter Ordnung** in x_0 , falls

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq n.$$

Proposition 8.3.2

Es sei I ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die n -Mal differenzierbar in x_0 ist. Dann ist $T_n(x)$ das einzige Polynom, sodass f und T_n eine Berührung n -ter Ordnung in x_0 haben.

Beweis: Übung

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Vektorraum (über } \mathbb{R} \text{)} & & \text{Vektorraum (über } \mathbb{R} \text{)} \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \tau_n : C^n(I, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\
 f & \longmapsto & \tau_n[f] := T_n(x)
 \end{array}$$

Eigenschaften: Übung

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} :$

$$\tau_n[\alpha f + \beta g] = \alpha \tau_n[f] + \beta \tau_n[g]$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(ii)} & C^n(I, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\tau_n} \mathbb{R}[x] \\
 \frac{d}{dx} \downarrow & & \downarrow \frac{d}{dx} \\
 & \square & \\
 & C^{n-1}(I, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\tau_{n-1}} \mathbb{R}[x]
 \end{array}$$

$$\text{Also : } \tau_{n-1}\left[\frac{df}{dx}\right] = \frac{d}{dx}[\tau_n[f]]$$

Satz 8.3.4

(Satz von Taylor)

Es sei I ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die n -Mal differenzierbar in I ist. Es sei $x_0 \in I$. Dann

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \quad (\text{Peano-Restglied})$$

(8.3.6)

Lemma 8.3.5

Es sei $f: [x_0, z] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (x_0, z) differenzierbar ist. Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gibt es für jedes $x \in (x_0, z)$ ein $\xi = \xi(x)$, sodass

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f'(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}}.$$

Beweis (Lemma 8.3.5.)

$$h: [0, (z - x_0)^n] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(y) = x_0 + \sqrt[n]{y}$$

$$g: [0, (z - x_0)^n] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g = f \circ h$$

[Wsk: Definitionsmenge für $h \rightarrow f \circ h$ Sinn macht]

$\rightarrow g$ stetig in $[0, (z - x_0)^n]$

g differenzierbar in $(0, (z - x_0)^n)$

$$g'(y) = f'(h(y)) \cdot h'(y) = f'(x_0 + \sqrt[n]{y}) \cdot \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

$$(g = f \circ h) \quad h(y) = x_0 + \sqrt[n]{y}$$

Es sei $y \in (0, (z - x_0)^n)$ fest

g erfüllt die Hypothesen des Satzes von
Lagrange $g: [0, y] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists c \in (0, y) : \underbrace{\frac{g(y) - g(0)}{y - 0}} = \underbrace{g'(c)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0 + \sqrt[n]{y}) - f(x_0)}{y} = f'(x_0 + \sqrt[n]{c}) \cdot \frac{1}{n} \cdot c^{\frac{1}{n}-1}$$

$$x = h(y) = x_0 + \sqrt[n]{y} \Rightarrow y = (x - x_0)^n$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f'(\xi)}{n \cdot (\xi - x_0)^{n-1}}$$

$$\underbrace{\xi = x_0 + \sqrt[n]{c}} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(\xi - x_0)^{n-1}} = c^{\frac{1}{n}-1}$$



Beweis (des Satzes von Taylor)

* $x > x_0$ (Fall $x < x_0$ ähnlich)

Bwk: $f \in T_n$ haben in x_0 eine Berührung n -ter

Ordnung: $\underbrace{f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0)}_{\forall k: 0 \leq k \leq n}$:

$$f - T_n : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$$

↗ erfüllt Hypothesen Lemma 8.3.5

$\Rightarrow \exists x_1 \in (x_0, x)$:

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f(x) - T_n(x) - \overbrace{(f(x_0) - T_n(x_0))}^0}{(x - x_0)^n} =$$

$$\stackrel{\text{Lemma}}{=} \frac{f'(x_1) - T_n'(x_1)}{n(x_1 - x_0)^{n-1}} \quad (A)$$

* Falls $n > 1 \leadsto f' - T_n' : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$

$\exists \underline{x_2} \in \underline{(x_0, x_1)}$:

$$\frac{f'(x_1) - T_n'(x_1)}{(x_1 - x_0)^{n-1}} = \frac{f'(x_1) - T_n'(x_1) - \overbrace{(f'(x_0) - T_n'(x_0))}^0}{(x_1 - x_0)^{n-1}} =$$

$$\text{Lemma) } \frac{f''(x_2) - T_n''(x_2)}{(n-1) \cdot (x_2 - x_0)^{n-2}} \quad (B)$$

(A) + (B) $\rightarrow$

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{f''(x_2) - T_n''(x_2)}{(x_2 - x_0)^{n-2}}$$

$$x_0 < x_2 < x_1 < x$$

Mit Induktion ... falls f $(n-1)$ -Mal differenzierbar ist $\Rightarrow \exists x_{n-1} : x_0 < x_{n-1} < x$

$$(c) \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n! \underbrace{(n-1) \cdots 2}_{n!}} \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - T_n^{(n-1)}(x_{n-1})}{(x_{n-1} - x_0)^{n-1}}$$

(C) ist

$$\frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{1}{n!} \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - \left(\dots \right) (x_{n-1} - x_0)}{(x_{n-1} - x_0)}$$

Übung: $T_n^{(n-1)}(x) = \underbrace{f^{(n-1)}(x_0)} + \underbrace{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}$

Bemk: $x_0 < x_{n-1} < x \Rightarrow x \rightarrow x_0$
 $\Rightarrow x_{n-1} \rightarrow x_0$

$$\lim_{x_{n-1} \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x_{n-1}) - \left(f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x_{n-1} - x_0) \right)}{(x_{n-1} - x_0)} =$$

$$= 0$$

$\leadsto$ Satz 5.3.4 + (C)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(f - T_n)(x)} = \underbrace{0 \cdot (x - x_0)^n}$$



Satz 8.3.6

Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die $(n+1)$ -Mal differenzierbar ist und $x_0 \in (a, b)$. Dann für alle $x \in (a, b)$, gibt es ein c zwischen x_0 und x , sodass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\text{Lagrange-Restglied}) \quad (8.3.11)$$

Beweis

* $x_0 < x$ ($x_0 > x$ ähnlich)

$$\underline{F}: [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{f(t)} = \underline{f(t)} + \underline{f'(t)}(x-t) + \frac{\underline{f''(t)}}{2}(x-t)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{\underline{f^{(n)}(t)}}{n!}(x-t)^n$$

$$\underline{\text{Bemk:}} \quad 1) \quad \left. \begin{array}{l} F(x) = f(x) \\ F(x_0) = T_n(x) \end{array} \right\} \downarrow$$

$$2) \quad f \text{ (n+1)-Mal diff.} \Rightarrow f^{(i)} \text{ stetig } \forall$$
$$i, 0 \leq i \leq \underline{n}$$

$$\Rightarrow F \text{ stetig in } [x_0, x]$$

$$F \text{ differenz. in } (x_0, x)$$

$G: [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $G: (x_0, x) \rightarrow \mathbb{R}$
 und $G'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (x_0, x)$

$\underbrace{F, G}_{\text{loosely}} \rightarrow \exists c \in (x_0, x):$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{\overline{F'(c)}}{G'(c)} \quad (*)$$

Bmk 1 $\Rightarrow F(x) - F(x_0) = f(x) - T_n(x) = R_n(x)$
 Was ist $F'(x)$?

Übung: $F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$

$$(*) \quad R_n(x) = F'(c) \frac{G(x) - G(x_0)}{G'(c)} =$$

$$= \frac{\frac{f^{(n+1)}(c) (x-c)^n}{n!}}{G'(c)} \frac{G(x) - G(x_0)}{G'(c)}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad R_n(x) &= \frac{f'(c) (g(x) - g(x_0))}{g'(c)} = \\
 &= \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c) (x-c)^n}{n!}}_{\text{Laplace}} \frac{g(x) - g(x_0)}{g'(c)}
 \end{aligned}$$

$$G(t) := (x-t)^{n+1}$$

$$G(x) = 0$$

$$G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$$

$$G'(t) = \underline{-(n+1)(x-t)^n} : G'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (x_0, x)$$

$$\leadsto R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cancel{(x-c)^n} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{\cancel{-(n+1)(x-c)^n}} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-x_0)^{n+1}$$

Laplace

Beispiele

$$1) \quad f(x) = e^x \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$$
$$x_0 = 0 \quad f'(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

$$(\text{Taylor}) \Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \rightarrow 0$$

$$2) \quad f(x) = \sin(x) \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$$
$$x_0 = 0$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, & f''(x) = -\sin x, & f^{(n)}(0) = -\cos x \\ f(0) = 0 & f'(0) = 1 & f''(0) = 0 & f'''(0) = -1 \\ f^{(4)}(x) = \sin x & f^{(5)}(x) = \cos x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{2k}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$f'(0) = 1 = f^{(4h+1)}(0) \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

$$f^{(3+4h)}(0) = -1 \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow T_{2n+1}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Übung}}}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = \underbrace{T_{2n+2}(x)}$$

$$\leadsto \sin(x) = \underbrace{T_{2n+1}(x)}_{\text{Übung}} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0$$

$$3) f(x) = \cos x$$

$$\text{Übung: } T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{(2k)}}{(2k)!} = T_{2n+1}(x)$$

$$\leadsto \cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ gerade: } f(x) = f(-x) \text{ (z.B. } \cos) \\ f \text{ ungerade: } f(-x) = -f(x) \text{ (z.B. } \sin) \end{array} \right.$$

$$f \text{ ungerade: } f(-x) = -f(x) \text{ (z.B. } \sin)$$