Prof. Dr. Silvia Sabatini WS 2016/2017

Nachklausur Lineare Algebra 9LP

29.03.17, 9:00 – 12:00

Es sind keine Hilfsmittel (Skript, Taschenrechner...) erlaubt. Täuschungsversuche, auch zugunsten anderer, führen zum Ausschluß von der Klausur. Taschen, Jacken und Mobiltelephone etc. sind im Hörsaal vorne zu deponieren. Wird das Mobiltelephon o.ä. nicht abgegeben, so gilt dies als Täuschungsversuch.
Begründen Sie stets Ihre Antworten. Antworten ohne Begründung liefern keine Punkte.
Die Aufgaben sind auf den entsprechenden Blättern (einschließlich Rückseite) zu bearbeiten. Falls Sie die am Ende angehefteten Leerseiten benutzen, machen Sie bitte einen Verweis bei der jeweiligen Aufgabe. Die Unterlagen müssen alle zusammengeheftet bleiben. Zusätzliche Seite bitte mit zusammen tackern. Die Notizzettel können **nicht** mit abgegeben werden. Verwenden Sie ausschließlich schwarze oder blaue Tinte/Kugelschreiber.
Die Klausur umfaßt 5 Aufgaben.

Name:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Klausurnummer: 1

Unterschrift

Den unteren Teil dieses Blattes **nicht** beschriften!

Aufgabe	Punkte		Aufgabe	Punkte
1			4	
2			5	
3				
Gesamt:				

Aufgabe 1. (4+4+4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $A_a \in M_3(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A_a invertierbar? Berechnen Sie den Rang $r(A_a)$ der Matrix A_a als Funktion von a.

b) Berechnen Sie die Inverse A_a^{-1} für jedes $a \in \mathbb{R}$, für das A_a invertierbar ist.

c) Schreiben Sie A_a^{-1} als ein Produkt von Elementarmatrizen für jedes $a \in \mathbb{R}$, für das A_a invertierbar ist.

Hinweis (Definition der Elementarmatrizen): Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei δ_i die m-dimensionale Zeile, deren Einträge a_{ih}, für $h = 1, \ldots, m$, gegeben sind durch δ_{ih} (das Kronecker-Delta).

— *Es seien $1 \leq i < j \leq m$. Wir definieren die quadratische Matrix $E_{ij}^m \in M_m(\mathbb{R})$ als die Matrix, deren Zeilen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{i-1}, \delta_j, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_{j-1}, \delta_i, \delta_{j+1}, \ldots, \delta_m$ sind.*

— *Sei $1 \leq i \leq m$. Gegeben $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sei $E_i^m(\lambda)$ die quadratische $m \times m$-Matrix, deren Zeilen gegeben sind durch $\delta_1, \ldots, \lambda\delta_i, \ldots, \delta_m$.*

— *Es seien jetzt $1 \leq i \neq j \leq m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Matrix $E_{ij}^m(\lambda)$ als die quadratische $m \times m$-Matrix, deren Zeilen gegeben sind durch $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}, \delta_i + \lambda\delta_j, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_{j-1}, \delta_j, \delta_{j+1}, \ldots, \delta_m$.*

Lösung 1.

a) $\det A_a = 2(a-1)$, daher ist bzw. A_a invertierbar ($r(A_a) = 3$) für $a \neq 1$. Für $a = 1$ haben wir

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deshalb

$$r(A_a) = \begin{cases} 3 & a \neq 1 \\ 2 & a = 1 \end{cases}.$$

b) Wir berechnen, für $a \neq 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 - aZ_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(1-a) & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 - Z_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2(1-a) & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2(1-a) & a & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 + Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2(1-a) & a & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{-1}{2(1-a)} Z_3}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2(a-1)} & \frac{-1}{2(a-1)} & \frac{1}{2(a-1)} \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 - 2Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2(a-1)} & \frac{-1}{2(a-1)} & \frac{1}{2(a-1)} \end{array}\right)$$

Und damit

$$A^{-1} = \frac{1}{2(a-1)} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2(a-1) \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Vom Algoritmus wissen wir

$$A^{-1} = E^3_{13}(-2) E^3_3\left(\frac{-1}{2(1-a)}\right) E^3_{23}(1) E^3_{32}(-1) E^3_{21}(-a)$$

Aufgabe 2. (4+3+3 Punkte)

Sei $n \geq 1$. Betrachten Sie den Vektorraum $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
Sind die unten definierten Teilmengen Untervektorräume? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

a) Die Teilmenge $B_n := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 0\}$, wobei $n \geq 1$.

b) Die Teilmenge

$$C := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Spur}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn} = 0\}.$$

Hier sind a_{ij} die Einträge der Matrix A.

c) Sei $0 \leq i \leq n$. Die Teilmenge $D_i := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid r(A) = i\}$, wobei $r(A)$ der Rang von A ist.

Lösung 2.

a) Für $n = 1$ ist $B = \{(0)\}$ und es ist klar, dass B ein Unterraum ist. Für $n > 1$ gilt dass nicht: Betrachten Sie $U = \text{diag}(0, 1, 1 \dots)$ und $V = \text{diag}(1, 0, 1, \dots 1)$. Dann gilt, dass $U, V \in B$ aber $\det(U + V) = 1$, also $U + V \notin B$.

b) Bemerken Sie dass $O \in C$. Seien $U, V \in C$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gillt

$$\text{Spur}(\lambda U + \mu V) = \lambda \text{Spur}(U) + \mu \text{Spur}(V) = 0.$$

Die Menge C ist ein Untervektorraum.

c) Bemerken Sie dass $D_0 = \{O\}$ und daher ist D_0 ein Untervektorraum. Für $i > 0$ gilt dass $O \notin D_i$, sodass D_i für $i > 0$ kein Untervektorraum ist.

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

a) Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $F \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$. Zeigen Sie, dass F injektiv ist genau dann, wenn $\mathrm{Ker}(F) = \{\mathbf{0}\}$ gilt.

b) Wir betrachten Elemente von $\mathbb{R}^3$ als Spaltenvektoren. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}$ an, für die es ein $G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $G(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq 3$ gibt.

Lösung 3.

a) Nehmen Sie an, dass $\operatorname{Ker}(F) = \{\mathbf{0}\}$. Sei $F(x) = F(y)$. Dann gilt, dass $x-y \in \operatorname{Ker}(F)$. Da $\operatorname{Ker}(F) = \{0\}$ ist, gilt das $x = y$. Die Abbildung F ist injektiv. Sei F jetzt injektiv und $u \in \ker(F)$. Dann gilt dass $F(u) = \mathbf{0} = F(\mathbf{0})$. Aus der Injektivität folgt $u = \mathbf{0}$. Damit ist gezeigt, dass $\operatorname{Ker} F = \{\mathbf{0}\}$.

b) Bemerken Sie, dass

$$\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2, v_3\}) = \begin{cases} 2 & a = -2 \\ 3 & a \neq -2. \end{cases}$$

Bemerken Sie, dass $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{w_1, w_2, w_3\} = \mathbb{R}^3$ und $\dim(\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{w_1, w_2, w_3\}) = 3$. Da gilt, dass $\dim_{\mathbb{K}}(F(U)) \leq \dim_{\mathbb{K}} U$ für alle (endlichdimensionale) $\mathbb{K}$-Vektorräume U und lineare Abbildungen F, gibt es kein G mit $G(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq 3$, wenn $a = -2$. Wenn $a \neq -2$ definieren wir

$$G(x) = aw_1 + bw_2 + cw_3, \qquad \text{wobei} \qquad x = av_1 + bv_2 + cv_3$$

Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, sind a, b, c eindeutig festgelegt und die Abbildung ist wohldefiniert. Es ist einfach zu kontrollieren, dass G linear ist.

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Sei $A \in GL_n(\mathbb{K})$ und v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Ist v ein Eigenvektor von A^{-1}? Wenn ja, berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert.

<u>Lösung</u> 4.

Sei $v \neq 0$ und $Av = \lambda v$. Dann gilt dass $v = A^{-1}Av = \lambda A^{-1}v$. Da A invertierbar ist, gilt dass $\lambda \neq 0$ und $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$. Wir sehen dass v ein Eigenvektor von A^{-1} mit Eigenwert λ^{-1} ist.

Aufgabe 5. (5+5 Punkte)

Wir betrachten Elemente von $\mathbb{R}^3$ als Spaltenvektoren. Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen annehmen, dass $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind. Sei $B \in M_3(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

und $F_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $F_B(x) = Bx$.

a) Berechnen Sie $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F_B)$.

b) Berechnen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(F_B)$ und $\mathrm{Im}(F_B)$.

<u>Lösung</u> 5.

a) Sei $\mathbf{e} = \{e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T\}$. Es gilt $A_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(F_B) = B$ und

$$A_{\mathbf{e},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{e}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}) = A_{\mathbf{e},\mathbf{w}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F_B) = A_{\mathbf{w},\mathbf{e}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3}) A_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(F_B) A_{\mathbf{e},\mathbf{v}}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^3})$, sodass

$$A_{\mathbf{w},\mathbf{v}}(F_B) = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 0 \\ 10 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$B \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(F_B)$. Die zweite und dritte Spalte von B sind linear unabhängig, und das Bild ist zweidimensional (da der Kern eindimensional ist). Daher ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Bildes.