Die folgenden Aufgaben dürfen nur mit den Methoden der Vorlesung bearbeitet werden.

✓ 1. (i) Man beweise: $x < e^x$ und $\ln(x) < x$ für $x > 0$.

(ii) Man bestimme den Grenzwert der Folge (a_n), definiert durch $a_n = \sqrt[n]{n \ln(n)}$.

~ 2. Es sei $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f(1, n) = 2n - 1$ und $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$, falls $m \geq 1$. Man zeige, dass f bijektiv ist.

~ 3. Man untersuche, ob die Folgen (a_n) konvergieren und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

(i) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$,

(ii) $a_n = \sqrt[n]{\frac{\alpha^n + \beta^n}{2}}$, wobei $\alpha, \beta > 0$.

4. Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(\frac{1}{2}) = 1$. Man zeige, dass es ein nichtleeres Teilintervall $[a, b] \subset [0, 1]$ gibt, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.

5. Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ und $f(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

~ 6. Man beweise oder widerlege: Es gilt $(n + 1)! < 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

7. Es sei (a_n) definiert durch $a_n = 8n^2 - n + 3$. Man zeige, dass es zu jeder reellen Zahl K ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n > K$ für alle $n > N$.

~ 8. (i) Man untersuche für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln(x^n) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}.$$

(ii) Man untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n \ln(n)}}.$$

9. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Man zeige, dass f einen Fixpunkt hat, das heißt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$ existiert.