Analysis 1 Klausur WS1415 Geiges

Thorsten Bülo

7. Februar 2015

1

1.1 a

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

1.2 b

Zeigen Sie:

$$1 * 2^2 * 3^3 * \cdots * n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}} \text{ für allen} \in \mathbb{N}$$

2

2.1 a

Stellen Sie folgende Terme in der Form $x + iy$ und in der Form $r * e^{i\varphi}$ dar:

$$(\frac{1+i}{1-i})^k \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

2.2 b

Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist.

3

3.1 a

Definieren Sie präzise die Konvergenz einer komplexen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$

3.2 b

Zeigen Sie, dass die Folge $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n \quad n \in \mathbb{N}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

3.3 c

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Zeigen Sie: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} = a$

4

Anmerkung: Im Original war hier eine Skizze gegeben, ich hab aber keine Lust zu zeichnen. Daher werde ich die Situation umschreiben:

Problemstellung: Eine Leiter soll durch einen Flur getragen werden. Dieser Flur knickt im rechten Winkel ab, wobei die beiden Teilstücke von unterschiedlicher Breite sind, a und b. Wie lang darf die maximale Länge der Leiter in Abhängigkeit von a und b sein? Tipp: Macht euch selbst eine Skizze, das ist hilfreich ;)

5

5.1 a

Geben Sie eine präzise Definition der Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $I \subset \mathbb{R}$

5.2 b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 * \cos(\frac{1}{x}) & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Untersuchen Sie diese Funktion auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit.

5.3 c

Nennen und beweisen Sie die Leibnizsche Regel für die Ableitung von Produkten zweier Funktionen.

6

6.1 a

Begründen Sie, warum $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ eine Umkehrfunktion hat. Diese heiße arccos.
Zeigen Sie: $\quad \sin(\arccos(t)) = \sqrt{1 - t^2}$ für $t \in [-1, 1]$

6.2 b

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{für} \quad t \in [-1,1]$$

Berechnen Sie das Integral und vereinfachen Sie die Stammfunktion mit Hilfe von (a).

7

7.1 a

Zeigen Sie: $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$ für alle $n \geq 2$.

7.2 b

Untersuchen Sie auf Konvergenz oder Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n*(n+1)}}$$

7.3 c

Es sei $a_n \geq 0, b_n \geq 0$. Zeigen Sie: Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent sind, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n * b_n$ konvergent.

7.4 d

Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{\log(x)}$. Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge?

Nachwort:
Diese Klausur habe ich aus Stichpunkten rekonstruiert. Das heißt, die Wortwahl entspricht nicht dem Original, inhaltlich bin ich mir ziemlich sicher dass alles korrekt ist. Allerdings kann ich dafür selbstverständlich nicht garantieren. Ich hoffe, ich habe hiermit ein wenig bei eurer Klausurvorbereitung geholfen.
Grüße von Thorsten

Verbesserungsvorschläge bitte an thorsten.buelo@gmail.com